С. В. НАГАЕВ, Р. МУХАМЕДХАНОВА

(Ташкент)

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ИЗ ТЕОРИИ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим ветвящийся случайный процесс с дискретным временем и с одним типом частиц.

Через $P_m(n)$ обозначим вероятность того, что одна частица за время n превратится в m частиц. Положим $p_m = P_m(1)$. Введем производящие функции

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i, \quad F_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(n) x^i.$$

Как известно (см., например, работу [9]),

$$F_k(x) = F\left[F_{k-1}(x)\right]. \tag{1.1}$$

Положим $\alpha_k = F^{(k)}(1)$. Для первых четырех факториальных моментов введем специальные обозначения: $\alpha_1 = A$, $\alpha_2 = B$, $\alpha_3 = C$, $\alpha_4 = D$.

Пусть μ_n — число частиц в момент времени n, если процесс начался в начальный момент времени с одной частицы.

Величина $P_0(n)$ есть вероятность вырождения процесса, начавшегося с одной частицы, к моменту n.

Пусть $Q_n = 1 - P_0(n)$ — вероятность продолжения процесса. Положим $Q_n(x) = 1 - F_n(x)$.

Введем условный закон распределения:

$$S_n(y) = P\left\{ \frac{\mu_n}{M^*(n)} < y / \mu_n > 0 \right\},$$

где

$$M^*(n) = M(\mu_n / \mu_n > 0).$$

Пусть

$$S(y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad y \leqslant 0, \\ 1 - e^{-y} & \text{при} \quad y > 0. \end{cases}$$

Асимптотическое поведение вероятности Q_n для дискретного времени изучено А. Н. Колмогоровым [1]. Результаты А. Н. Колмогорова формулируются следующим образом:

$$Q_n \sim \begin{cases} KA^n & \text{при} \quad A < 1, \quad B < \infty; \\ \frac{2}{Bn} & \text{при} \quad A = 1, \quad B > 0, \; C < \infty; \\ 1 - \lambda & \text{при} \quad A > 1, \end{cases} \tag{1.2}$$

где K — положительная константа, зависящая от вида $F(x)$; $0 \leqslant \lambda < 1$ — корень уравнения $F(x) - x = 0$.

Аналогичные результаты для непрерывного времени были получены Б. А. Севастьяновым [2]. В. М. Золотарев [5] в случае непрерывного времени определил

$$Q(t) = \begin{cases} Ke^{at} - \frac{b}{2a} K^2 e^{2at} + o\left(e^{2at}\right) & \text{при } a < 0, \; b < \infty; \\ \frac{2}{bt} + \frac{4c}{3b^3} \frac{\log t}{t^2} + o\left(\frac{\log t}{t^2}\right) & \text{при } a = 0, \; b > 0, \; c < \infty; \end{cases} \tag{1.3}$$

$$Q_\lambda(t) = K_\lambda e^{a_\lambda t} - \frac{b_\lambda}{2a_\lambda} K_\lambda^2 e^{2a_\lambda t} + o\left(e^{2a_\lambda t}\right) \quad \text{при } a > 0;$$

здесь

$$Q_\lambda(t) = \lambda - P_0(t), \; a = f'(1), \; b = f''(1); \; c = f'''(1);$$

$$a_\lambda = f'(\lambda), \; b_\lambda = f''(\lambda), \; c_\lambda = f'''(\lambda);$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad p_k = \frac{dP_k(t)}{dt},$$

где $P_k(t)$ — вероятность того, что одна частица за промежуток времени t превратится в k частиц.

В. П. Чистяков [4] нашел следующий член в разложении (1.3) при $a = 0$ и $d < \infty$. Р. Мухамедханова [7] получила асимптотическое разложение при $a < 0$ и конечности k факториальных моментов. Разложения типа (1.3) для дискретного времени приводятся в работе А. В. Нагаева [6].

В данной работе получаются асимптотические разложения Q_n в случае дискретного времени. Число членов разложения при $A < 1$ равно m, если $\alpha_m < \infty$, а при $A > 1$ оно не зависит от числа факториальных моментов.

При $A = 1$ мы ограничиваемся случаем $D < \infty$, хотя наш метод дает возможность получить асимптотические разложения при условии конечности факториальных моментов более высокого порядка.

А. М. Яглом [3[показал, что при любом $F(x)$ функция распределения $S_n(y)$ при $n \to \infty$ стремится к распределению $S(y)$, если $A=1$, $B \neq 0$ и $C < \infty$.

В настоящей работе оценивается скорость сходимости $S_n(y)$ к показательному распределению при $A=1$, $B>0$, $C<\infty$.

В. П. Чистяков [4] доказал локальные предельные теоремы для непрерывного времени. В работе [4] упоминается о том, что Н. В. Смирновым для дискретного случая при $A=1$ получена локальная предельная теорема, однако доказательство и даже формулировка этой теоремы до сих пор не опубликованы. Нами доказывается локальная предельная теорема при $A=1$, $B>0$, $D<\infty$.

§ 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПРОЦЕССА

I. Случай $A<1$

Теорема 1. Если $A<1$ и существует факториальный момент порядка $(1+\delta)$, то при $n \to \infty$

$$Q_n = K_1 A^n + o(A^n),$$

где K_1 — некоторая константа, зависящая от вида $F(x)$.

Эта теорема лишь незначительно отличается формулировкой и методом доказательства от теоремы 1, приведенной в работе [6].

Доказательство. В силу (1.1)

$$Q_n = AQ_{n-1} + O\left(Q_{n-1}^{1+\delta}\right). \tag{2.1}$$

Отсюда

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = A + O\left(Q_{n-1}^{\delta}\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} \to A \quad \text{при } n \to \infty. \tag{2.2}$$

Полагая $b_n = \frac{1}{Q_n}$, из (2.1) получаем

$$b_{n-1} = Ab_n + O\left(\frac{b_n}{b_{n-1}^{\delta}}\right),$$

$$b_n = \frac{1}{A} b_{n-1} + c_n, \; c_n = O\left(\frac{b_n}{b_{n-1}^{\delta}}\right), \; n \geqslant 1, \; b_0 = 1,$$

или

$$b_n = \frac{1}{A^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{A^{n-k}}. \tag{2.3}$$

Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{A^n} \sum_{k=1}^{\infty} A^k c_k.$$

В силу (2.2)

$$c_k = O\left(\left[\frac{b_k}{b_{k-1}}\right]^{\delta} \cdot [b_k]^{1-\delta}\right) = O\left(b_k^{1-\delta}\right).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при $n > N$

$$Q_n > (A - \varepsilon) Q_{n-1},$$

откуда

$$b_k = O\left([A - \varepsilon]^{-k}\right).$$

Так как при $\varepsilon < A - A^{\frac{1}{1-\delta}}$ имеем

$$\frac{A}{[A-\varepsilon]^{1-\delta}} < 1,$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A}{(A-\varepsilon)^{1-\delta}}\right]^k$$

сходится, поэтому сходится и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^k c_k.$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{A^{n-k}} = \frac{1}{A^n} \sum_{k=1}^{\infty} A^k c_k - \frac{1}{A^n} \sum_{k=n+1}^{\infty} A^k c_k,$$

то вследствие (2.3)

$$b_k = \frac{K'}{A^n} + o\left(\frac{1}{A^n}\right),$$

где

$$K' = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A^k c_k .$$

Значит,

$$Q_n = \frac{1}{\frac{K'}{A^n} + o\left(\frac{1}{A^n}\right)} = K_1 A^n + o(A^n).$$

Теорема 2. При $A < 1$, $\alpha_m < \infty$, $m > 1$ и $n \to \infty$

$$Q_n = K_1 A^n + K_2 A^{2n} + K_3 A^{3n} + \ldots + K_m A^{mn} + \rho_{mn},$$

где K_1, $K_2, \ldots, K_m$ — некоторые постоянные, зависящи вида функции $F(x)$, $\rho_{mn} = o(A^{mn})$.

Доказательство теоремы проводится методом матем ческой индукции.

Пусть при $\alpha_m < \infty$ выполнено равенство (2.5). $\alpha_{m+1} < \infty$, то из (1.1) следует

$$Q_n = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} \frac{\alpha_k}{k!} Q_{n-1}^k + r_{(m+1)(n-1)},$$

где

$$r_{(m+1)(n-1)} = o\left(Q_{n-1}^{m+1}\right).$$

Отсюда

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{A} \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{\alpha_{k+1}}{(k+1)!} \frac{Q_{n-1}^k}{A} + \frac{r_{(m+1)(n-1)}}{A Q_{n-1}}} =$$

$$= \frac{b_{n-1}}{A} + \sum_{i=0}^{m-1} L_i Q_{n-1}^i + \tilde{r}_{(m-1)(n-1)},$$

где L_0, $L_1, \ldots, L_{m-1}$ — постоянные, зависящие от α_k;

$$k = \overline{1, m+1}; \qquad \tilde{r}_{(m-1)(n-1)} = o\left(Q_{n-1}^{m-1}\right).$$

Из формулы (2.7) нетрудно получить

$$b_n = \frac{1}{A^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} L_i Q_k^i A^{k-n} + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{r}_{(m-1)k} A^{k-n} \quad ($$

или

$$b_n=\frac{1}{A^n}+\frac{1}{A^n}\sum_{k=1}^{n-1}A^k\sum_{i=0}^{m-1}L_i\,Q_k^i+\frac{1}{A^n}\sum_{k=1}^{n-1}\tilde{r}_{(m-1)k}A^k. \quad (2.9)$$

Рассмотрим сумму вида

$$S_{jn}=\sum_{k=1}^{n-1}A^k Q_k^j, \quad 1\leqslant j\leqslant m-1.$$

Подставляя вместо Q_k его разложение (2.5), получаем

$$S_{jn}=\sum_{k=1}^{n-1}A^k\sum_{l=0}^{j}C_j^l\,\Omega_{mk}^{j-l}\,\rho_{mk}^l, \quad (2.10)$$

где

$$\Omega_{mk}=\sum_{i=1}^{m}K_i\,A^{ik}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}A^k\Omega_{mk}^{j-l}\,\rho_{mk}^l.$$

Этот ряд, очевидно, сходится. Обозначим его сумму через $S_j(l)$. Нетрудно видеть, что при $l\geqslant 1$

$$\sum_{k=n}^{\infty}A^k\,\Omega_{mk}^{j-l}\,\rho_{mk}^l=o\left(A^{mn}\right). \quad (2.11)$$

Из формул (2.10), (2.11) следует

$$S_{jn}=\sum_{k=1}^{n-1}A^k\,\Omega_{mk}^j+\sum_{l=1}^{j}S_j(l)\,C_j^l+o\left(A^{mn}\right). \quad (2.12)$$

Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{n-1}A^k\,\Omega_{mk}^j=\sum_{s=1}^{mj}\frac{A^s}{1-A^s}M_{sm}^{(j)}+\sum_{l=j}^{m}N_{l\cdot m}^{(j)}A^{ln}+o\left(A^{mn}\right), \quad (2.13)$$

где $M_{sm}^{(j)}$, $N_{lm}^{(j)}$ — постоянные, зависящие от вида $F(x)$.

Из (2.9) вытекает

$$b_n = \frac{1}{A^n} + \frac{1}{A^n} \sum_{i=0}^{m-1} L_i S_{in} + \frac{1}{A^n} \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{r}_{(m-1)k} A^k. \qquad (2.14)$$

Подставляя в (2.12) вместо $\sum_{k=1}^{n-1} A^k \Omega^j_{mk}$ его выражение (2.13), получаем

$$S_{jn} = \sum_{s=1}^{mj} \frac{A^s}{1-A^s} M^{(l)}_{sm} + \sum_{l=j}^{m} N^{(j)}_{lm} A^{ln} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{j} S_j(l)\, C^{(l)}_j + o\left(A^{mn}\right). \qquad (2.15)$$

Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{r}_{(m-1)k} A^k$, который, очевидно, сходится. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} \tilde{r}_{(m-1)k} A^k = o\left(A^{mn}\right), \qquad (2.16)$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^{n-1} \tilde{r}_{(m-1)k} A^k = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{r}_{(m-1)k} A^k + o\left(A^{mn}\right). \qquad (2.17)$$

Из формул (2.14) — (2.17) получаем

$$b_n = \frac{T_1}{A^n} + T_2 + \sum_{i=1}^{m-1} T_{i+2} A^{in} + o\left(A^{(m-1)n}\right), \qquad (2.18)$$

где $T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}$ — постоянные, зависящие от вида функции $F(x)$. Из (2.18) легко следует утверждение теоремы.

II. Случай $A = 1$

Теорема 3. Если $A = 1$, $B > 0$, $C < \infty$, то при $n \to \infty$

$$Q_n = \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B}\right)\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \qquad (2.19)$$

Асимптотическое разложение для Q_n при $A = 1$, $B > 0$, $C < \infty$ приводится в работе [6], однако там коэффициент при втором члене вычислен неточно.

Доказательство. Из условия теоремы и (1.1) следует

$$Q_n = Q_{n-1} - \frac{B}{2} Q_{n-1}^2 + \frac{C}{6} Q_{n-1}^3 + o\left(Q_{n-1}^3\right),$$

откуда в силу (1.2)

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{1 - \frac{B}{2b_{n-1}} + \frac{C}{6b_{n-1}^2} + o\left(\frac{1}{b_{n-1}^2}\right)} =$$

$$= b_{n-1} + \frac{B}{2} + \left(\frac{B^2}{4} - \frac{C}{6}\right)\frac{2}{Bn} + o\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (2.20)$$

Из (2.20) легко вывести

$$b_n = \frac{Bn}{2} + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{3B}\right)\ln n + o(\ln n),$$

что равносильно утверждению теоремы.

Теорема 4. Если $A = 1$, $B > 0$, $D < \infty$, то при $n \to \infty$

$$Q_n = \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B}\right)\frac{\ln n}{n^2} + \frac{4K}{B^2 n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right), \qquad (2.21)$$

где K — некоторая постоянная, зависящая от вида $F(x)$.

Доказательство. В силу (1.1)

$$Q_n = Q_{n-1} - \frac{B}{2} Q_{n-1}^2 + \frac{C}{6} Q_{n-1}^3 - \frac{D}{24} Q_{n-1}^4 + o\left(Q_{n-1}^4\right). \qquad (2.22)$$

Отсюда легко получить

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{1 - \frac{B}{2} Q_{n-1} + \frac{C}{6} Q_{n-1}^2 - \frac{d}{24} Q_{n-1}^3 + o\left(Q_{n-1}^3\right)} =$$

$$= b_{n-1} + \frac{B}{2} + \left(\frac{B^2}{4} - \frac{C}{6}\right) Q_{n-1} + \tilde{\rho}_{n-1}, \qquad (2.23)$$

где

$$\tilde{\rho}_{n-1} = O\left(Q_{n-1}^2\right).$$

Из формулы (2.23) вытекает

$$b_n = \frac{nB}{2} + \left(\frac{B^2}{4} - \frac{C}{6}\right) \sum_{k=0}^{n-1} Q_k + \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\rho}_k + 1\,. \tag{2.24}$$

Рассмотрим $\sum\limits_{k=1}^{n-1} Q_k$. Подставляя вместо Q_k его выражение (2.19), получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1} Q_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{Bk} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{k^2} + \sum_{k=1}^{n-1} q_k, \tag{2.25}$$

где

$$q_k = o\left(\frac{\ln k}{k^2}\right).$$

Как известно (см., например, работу [11], § 541),

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = c_1 + \ln n + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где c_1 — постоянная Эйлера. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \tag{2.26}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n-1} q_k = \sum_{k=1}^{\infty} q_k + o\left(\frac{\ln n}{n}\right). \tag{2.27}$$

Далее, поскольку $\tilde{\rho}_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\rho}_k = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\rho}_k + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2.28}$$

Полагая

$$K = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\rho}_k + \left(\frac{B^2}{4} - \frac{C}{6}\right)\left[\frac{2C_1}{B} + \sum_{k=1}^{n-1} q_k + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{k^2}\right],$$

из формул (2.24) — (2.28) получаем

$$b_n = \frac{nB}{2} + \left(\frac{B^2}{4} - \frac{C}{6}\right)\frac{2}{B}\ln n + K + O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

откуда следует утверждение теоремы.

III. Случай $A > 1$

Положим $Q_{n\lambda} = \lambda - P_0(n)$, $\alpha_k^\lambda = F^{(k)}(\lambda)$ и $\alpha_1^\lambda = A_\lambda$. Нетрудно видеть, что $A_\lambda < 1$.

Теорема 5. Если $A > 1$, то для любого фиксированного целого $m > 0$ и $n \to \infty$

$$Q_{n\lambda} = K_{1\lambda} A_\lambda^n + K_{2\lambda} A_\lambda^{2n} + \ldots + K_{m\lambda} A_\lambda^{mn} + o\left(A_\lambda^{mn}\right),$$

где $K_{1\lambda}, K_{2\lambda}, \ldots, K_{m\lambda}$ — некоторые постоянные, зависящие от вида $F(x)$.

Как известно [1], $Q_{n\lambda} \to 0$ при $n \to \infty$. Легко получить

$$Q_{n\lambda} = A_\lambda Q_{(n-1)\lambda} - \frac{B_\lambda}{2} Q_{(n-1)\lambda}^2 + \ldots + (-1)^{m+1} \frac{\alpha_m^\lambda}{m!} Q_{(n-1)\lambda}^m +$$

$$+ o\left(Q_{(n-1)\lambda}^m\right).$$

Теорема доказывается с помощью этого соотношения точно так же, как теорема 2 с помощью (2.6).

§ 3. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ К ПОКАЗАТЕЛЬНОМУ ЗАКОНУ И ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА В СЛУЧАЕ $A = 1$

Лемма 1. Если $F^{(k)}(1) < \infty$, то $F^{(k)}(x)$ равномерно непрерывна в круге $|x| \leqslant 1$.

Доказательство. Очевидно, при любом N

$$|F^{(k)}(x_1)-F^{(k)}(x_2)|\leqslant N|x_1-x_2|F^{(k)}(1)+2\sum_{j=N+1}^{\infty} j^k p_j,$$

$$|x_1|\leqslant 1,\quad |x_2|\leqslant 1.$$

Отсюда легко следует утверждение леммы.

Положим $b_n(x)=\dfrac{1}{Q_n(x)}$.

Лемма 2. Если $C<\infty$, то

$$b_n(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{nB}{2}+\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{3B}\right)\ln\left(1+\frac{n}{a(x)}\right)+$$

$$+o\left(\ln\left(1+\frac{n}{a(x)}\right)\right)+K(x),\ |x|\leqslant 1,$$

где $K(x)$ — некоторая ограниченная функция;

$$a(x)=\frac{2}{B(1-x)}.$$

Доказательство. Из (1.1) в силу леммы 1 вытекает

$$Q_{n+1}(x)=Q_n(x)-\frac{B}{2}Q_n^2(x)+\frac{C}{6}Q_n^3(x)+o\left(Q_n^3(x)\right).\quad(3.1)$$

Символ $f_k(x)=o(g_k(x))$, где $f_k(x)$ и $g_k(x)$ — последовательности функций комплексного аргумента, здесь и в дальнейшем служит для выражения того факта, что существует последовательность постоянных $\alpha_k\to 0$, такая, что

$$|f_k(x)|<\alpha_k|g_k(x)|.$$

Символ $f_k(x)=O(g_k(x))$ в свою очередь означает, что

$$|f_k(x)|<L|g_k(x)|,$$

где константа L не зависит от x.

Вследствие (3.1)

$$b_{n+1}(x)=\frac{b_n(x)}{1-\frac{B}{2}Q_n(x)+\frac{C}{6}Q_n^2(x)+o\left(Q_n^2(x)\right)}=$$

$$=b_n(x)+\frac{B}{2}+\left(\frac{B^2}{4}-\frac{C}{6}\right)Q_n(x)+o\left(Q_n(x)\right).\qquad(3.2)$$

Отсюда

$$b_n(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{nB}{2} + \left(\frac{B^2}{4} - \frac{C}{6}\right) \sum_{k=0}^{n-1} Q_k(x) + $$

$$+ o\left(\sum_{i=0}^{n-1} Q_i(x)\right), \tag{3.3}$$

поскольку $Q_0(x) = 1 - x$. Заметим, что $|Q_k(x)| \leqslant 2Q_k = = O\left(\frac{1}{k}\right)$. Следовательно,

$$b_n(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{nB}{2} + o(n). \tag{3.4}$$

Далее

$$Q_n(x) = \frac{1}{\frac{nB}{2} + \frac{1}{1-x} + o(n)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{nB}{2} + \frac{1}{1-x}} \left[1 + o\left(\frac{n}{\frac{nB}{2} + \frac{1}{1-x}}\right)\right], \tag{3.5}$$

поэтому

$$\sum_{k=0}^{n-1} Q_k(x) = \frac{2}{B} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k + \frac{2}{B(1-x)}} + \sum_{k=0}^{n-1} r_k(x), \tag{3.6}$$

где

$$r_k(x) = o\left(\frac{k}{\left(\frac{kB}{2} + \frac{1}{1-x}\right)^2}\right).$$

Воспользуемся теперь формулой суммирования (см. работу [10], стр. 297, формулу (67))

$$\sum_{j=0}^{p-1} \varphi(j) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B_\nu}{\nu!} \{\varphi^{(\nu-1)}(p) - \varphi^{(\nu-1)}(0)\} -$$

$$-\frac{1}{n!} \int_0^0 [B_n(t) - B_n] \sum_{j=0}^{p-1} \varphi^{(n)}(j+1-t)\,dt, \tag{3.7}$$

где B_n и $B_n(t)$ — соответственно числа и многочлены Бернулли. Из (3.7), полагая $n=1$, $\frac{2}{B(1-x)}=a(x)$ и используя получаемую ниже оценку (3.15), имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+a(x)}=K_1(x)+\int_0^n \operatorname{Re}\frac{1}{t+a(x)}\,dt+i\int_0^n \operatorname{Im}\frac{1}{t+a(x)}\,dt+$$

$$+O\left(\left|\operatorname{Re}\frac{1}{n+a(x)}\right|\right)+O\left(\left|\operatorname{Im}\frac{1}{n+a(x)}\right|\right)=$$

$$=K_1(x)+\ln\bigl(n+a(x)\bigr)-\ln a(x)+O\left(\left|\frac{1}{n+a(x)}\right|\right), \qquad (3.8)$$

где $K_1(x)$ — некоторая ограниченная функция. Аналогично получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{|k+a(x)|^2}=K_2(x)+\int_0^n\frac{t\,dt}{|t+a(x)|^2}+O\left(\frac{n}{[n+a(x)]^2}\right)=$$

$$=K_2(x)+\ln|n+a(x)|-\ln|a(x)|+O\left(\frac{n}{[n+a(x)]^2}\right), \qquad (3.9)$$

где $K_2(x)$ — некоторая ограниченная функция.

Из формул (3.6),(3.8) и (3.9) следует

$$\sum_{k=0}^{n-1}Q_k(x)=\ln\bigl(n+a(x)\bigr)-\ln a(x)+K_3(x)+$$

$$+O\left(\frac{1}{n+a(x)}\right)+O\left(\ln\left(1+\frac{n}{a(x)}\right)\right), \qquad (3.10)$$

где $K_3(x)$ — некоторая ограниченная функция.

Из (3.3) и (3.10) получаем утверждение леммы.

Лемма 3. Если $D<\infty$, то

$$b_n(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{nB}{2}+\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{3B}\right)\ln\left(1+\frac{n}{a(x)}\right)+$$

$$+K(x)+O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \qquad (3.11)$$

где $K(x)$ — некоторая ограниченная функция, зависящая от вида $F(x)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$Q_{n+1}(x) = Q_n(x) - \frac{B}{2} Q_n^2(x) + \frac{C}{6} Q_n^3(x) + + O\left(Q_n^4(x) \right). \tag{3.12}$$

Отсюда

$$b_{n+1}(x) = \frac{b_n(x)}{1 - \frac{B}{2b_n(x)} + \frac{C}{6b_n^2(x)} + O\left(\frac{1}{b_n^3(x)}\right)} =$$

$$= b_n(x) + \frac{B}{2} + \left(\frac{B^2}{4} - \frac{C}{6}\right)\frac{1}{b_n(x)} + O\left(\frac{1}{b_n^2(x)}\right)$$

и

$$b_n(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{nB}{2} + \left(\frac{B^2}{4} - \frac{C}{6}\right) \sum_{k=0}^{n-1} Q_k(x) + + O\left(\sum_{k=0}^{n-1} Q_k^2(x) \right). \tag{3.13}$$

В силу леммы 2

$$Q_n(x) = \gamma_n(x) + \left(\frac{C}{3B} - \frac{B}{2}\right)\gamma_n^2(x)\ln\left(1 + \frac{n}{a(x)}\right) + + \gamma_n^2(x) K(x) + o\left(\gamma_n^2(x)\ln\left(1 + \frac{n}{a(x)}\right)\right), \tag{3.14}$$

где

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{1-x} + \frac{nB}{2}}.$$

Очевидно, при $|x| \leqslant 1$

$$\operatorname{Re}\frac{1}{1-x} = \operatorname{Re}\frac{1-\bar{x}}{1+|x|^2} \geqslant 0,$$

поэтому

$$|\gamma_n(x)| \leqslant \frac{2}{nB}. \tag{3.15}$$

Из (3.15) следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 (x) \ln \left(1 + \frac{n}{a(x)}\right)$$

абсолютно сходится и сумма его равномерно ограничена для $|x| \leqslant 1$.

Подставляя в (3.13) выражение для $Q_n(x)$ (3.14), получаем

$$b_n(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{nB}{2} + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{3B}\right) \ln \left(1 + \frac{n}{a(x)}\right) + K(x) + \\ + O\left(\sum_{k=n}^{\infty} Q_k^2(x)\right) + O\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}\right), \tag{3.16}$$

где $K(x)$ — некоторая ограниченная функция. Но

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ \sum_{k=n}^{\infty} Q_k^2(x) = O\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{3.17}$$

Из (3.16) и (3.17) следует утверждение леммы.

Лемма 4. Если $C < \infty$, то

$$\int e^{ity}\, dS_n(y) = \frac{1}{1-it} + \left(1 - \frac{2C}{3B^2}\right) \frac{it}{1-it} \times \\ \times \left\{\ln(1-it) \cdot \left(\frac{1}{1-it} - 1\right) + \right. \\ \left. + \ln n \right\} \frac{1}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n} \cdot \frac{t^2}{1+t^2}\right). \tag{3.18}$$

Доказательство. Положим

$$\varphi_n(x) = M\left(x^{\mu_n} / \mu_n > 0\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$\varphi_n(x) = Q_n(x)\left(b_n(x) - b_n(0)\right). \tag{3.19}$$

Из (3.19), (3.14) и леммы 2 следует

$$\varphi_n(x) = \frac{\gamma_n(x)}{1-x} + \left(\frac{C}{3B} - \frac{B}{2}\right)\left[\frac{\gamma_n^2(x)}{1-x}\ln\left(1+\frac{n}{a(x)}\right) + \right.$$

$$\left. + \gamma_n(x)\left(\ln(n+1) - \ln\left(1+\frac{n}{a(x)}\right)\right)\right] + o\left(\gamma_n(x)\cdot\ln n\right). \tag{3.20}$$

Очевидно,

$$\frac{\gamma_n(x)}{1-x} = \frac{1}{1+(1-x)\dfrac{nB}{2}}.$$

Используя асимптотические разложения для Q_n (см. теорему 4), для $|t| < \delta n$ (δ достаточно мало) получаем

$$\frac{\gamma_n\left(e^{itQ_n}\right)}{1-e^{itQ_n}} = \frac{1}{1-it+O\left(\dfrac{\ln n}{n}|t|\right)+O\left(\dfrac{t^2}{n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1-it} + O\left(\frac{\ln n}{n}\frac{|t|}{1+t^2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{t^2}{1+t^2}\right). \tag{3.21}$$

Далее при $|t| < \delta n$

$$\gamma_n\left(e^{itQ_n}\right) = -\frac{itQ_n + O\left(t^2Q_n^2\right)}{1-itQ_n\dfrac{nB}{2}+O\left(t^2Q_n^2 n\right)} =$$

$$= -\frac{2}{Bn}\cdot\frac{it}{1-it} + O\left(\frac{|t|^3}{n^2(1+t^2)}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\cdot\frac{t^2+|t|}{1+t^2}\right) \tag{3.22}$$

и

$$\ln\left(1+\frac{n}{a\left(e^{itQ_n}\right)}\right) = \ln\left(1-it+O\left(\frac{\ln n}{n}|t|\right)+O\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) =$$

$$= \ln(1-it) + O\left(\frac{\ln n}{n}\cdot\frac{t^2+|t|}{1+t^2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\frac{|t|^3}{1+t^2}\right). \tag{3.23}$$

Полагая в (3.20) $x = e^{itQ_n}$ и используя соотношения (3.21) — (3.23), получаем

$$\varphi_n\left(e^{itQ_n}\right) = \frac{1}{1-it} + \left(1 - \frac{2C}{3B^2}\right)\frac{1}{n} \times$$

$$\times \left\{ it \ln(1-it)\left[\frac{1}{(1-it)^2} - \frac{1}{1-it}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{it\ln(n+1)}{1-it}\right\} + o\left(\frac{\ln n}{n}\frac{t^2}{1+t^2}\right). \tag{3.24}$$

Чтобы закончить доказательство, остается заметить, что

$$M^*(n) = \frac{1}{Q_n}.$$

Теорема 6. Если $C < \infty$, то

$$S_n(y) - S(y) = O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right).$$

Доказательство. Полагая в теореме Эссена (см. работу [8], § 39, теорему 1)

$$F(y) = S_n(y),\ G(y) = S(y) \text{ и } T = \delta n,$$

имеем

$$S_n(y) - S(y) = O\left[\frac{1}{n}\left(\int_0^{\delta n} \frac{t\ln|t|}{1+t^2}\,dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ln n \int_0^{\delta n} \frac{t}{1+t^2}\,dt\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.25}$$

Но

$$\int_0^{\delta n} \frac{t\ln|t|}{1+t^2}\,dt = O(\ln^2 n) \tag{3.26}$$

и

$$\int_0^{\delta n} \frac{t}{1+t^2}\,dt = O(\ln n). \tag{3.27}$$

Из (3.25) — (3.27) следует утверждение теоремы.

Теорема 7. Если $D < \infty$, то

$$\frac{nB}{2} P^*_m(n) = e^{-2m/Bn} + \alpha_{mn} + O\left(\frac{\ln n}{m}\right),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{mn} = 0$ равномерно относительно m.

Доказательство. Очевидно, что

$$P^*_m(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-imt} \varphi_n(e^{it})\, dt. \qquad (3.28)$$

Положим

$$\psi_n(x) = \frac{\gamma_n(x)}{1-x} + \left(\frac{C}{3B} - \frac{B}{2}\right)\left[\frac{\gamma_n^2(x)}{1-x}\ln\left(1+\frac{n}{a(x)}\right) + \right.$$

$$\left. + \gamma_n(x)\left(\ln(n+1) - \ln\left(1+\frac{n}{a(x)}\right)\right)\right].$$

В силу леммы 3

$$Q_n(x) = \gamma_n(x) + \left(\frac{C}{3B} - \frac{B}{2}\right)\gamma_n^2(x)\ln\left(1+\frac{n}{a(x)}\right) -$$

$$- K(x)\gamma_n^2(x) + O\left(\gamma_n^2(x)\frac{\ln n}{n}\right). \qquad (3.29)$$

Из (3.19), (3.29) и (3.11) следует

$$\varphi_n(x) = \psi_n(x) + K(x)\left(\gamma_n(x) - \gamma_n^2(x)/1-x\right) -$$

$$- K(0)\gamma_n(x) + O\left(\gamma_n(x)\frac{\ln n}{n}\right). \qquad (3.30)$$

Рассмотрим

$$I_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{imt}\psi_n(e^{it})\, dt.$$

Очевидно,

$$\frac{\gamma_n(e^{it})}{1-e^{it}} = \frac{1}{1+\frac{nB}{2}(1-e^{it})}. \qquad (3.31)$$

Далее

$$1 + \frac{nB}{2}(1-e^{it}) = 1 + nB\sin^2\frac{t}{2} - \frac{inB}{2}\sin t. \qquad (3.32)$$

Поскольку при $|t| < \frac{\pi}{2}$

$$|\sin t| > \frac{2}{\pi}|t|$$

и при $\frac{\pi}{2} < |t| < \pi$

$$\sin^2 \frac{t}{2} > \frac{t^2}{2\pi} > \frac{|t|}{4},$$

то при $0 \leqslant |t| \leqslant \pi$

$$\left| 1 + \frac{\pi B}{2}\left(1 - e^{it}\right) \right| > \frac{nB}{8}|t| + 1. \tag{3.33}$$

Отсюда при $0 \leqslant |t| < \frac{\pi n B}{2}$

$$\frac{1}{1 - it} - \frac{1}{1 + \frac{nB}{2}\left(1 - e^{2it/nB}\right)} =$$

$$= \frac{nB\left(1 - e^{2it/nB}\right) + it}{2\left[1 + \frac{nB}{2}\left(1 - e^{2it/nB}\right)\right](1 - it)} = O\left(\frac{t^2}{n(1 + t^2)}\right) \tag{3.34}$$

и

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{1 + \frac{nB}{2}\left(1 - e^{2it/nB}\right)} = O\left(\frac{1}{1 + t^2}\right). \tag{3.35}$$

Далее

$$\ln\left(1 + \frac{n}{a\left(e^{2it/nB}\right)}\right) = \ln\left(1 - it + O\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) =$$

$$= \ln(1 - it) + O\left(\frac{|t|^3}{n(1 + t^2)}\right). \tag{3.36}$$

Используя (3.33), нетрудно получить

$$\gamma_n\left(e^{2it/Bn}\right) = -\frac{2}{Bn}\frac{it}{1 - it + O\left(\frac{t^2}{n}\right)} +$$

$$+ O\left(\frac{t^2}{n\left[1 + \frac{Bn}{2}\left(1 - e^{2it/Bn}\right)\right]}\right) =$$

$$= -\frac{2}{Bn}\frac{it}{1-it} + O\left(\frac{|t|^2}{n^2(1+t^2)}\right). \tag{3.37}$$

Таким образом,

$$\gamma_n\left(e^{2it/Bn}\right)\ln\left(1+\frac{n}{a\left(e^{2it/Bn}\right)}\right) = -\frac{2}{Bn}\frac{it}{1-it}\ln(1-it) + $$

$$+ O\left(\frac{t^2\ln(1+t)}{n^2(1+t^2)}\right). \tag{3.38}$$

Из (3.38) и (3.34) следует

$$\frac{\gamma_n^2\left(e^{2it/Bn}\right)}{1-e^{2it/Bn}}\ln\left(1+\frac{n}{a\left(e^{2it/Bn}\right)}\right) =$$

$$= -\frac{2}{Bn}\frac{it}{(1-it)^2}\ln(1-it) + O\left(\frac{t^2\ln|1+t|}{n^2(1+t^2)}\right). \tag{3.39}$$

Очевидно,

$$I_1 = \frac{2}{Bn}\int\limits_{-\frac{B\pi n}{2}}^{\frac{B\pi n}{2}} e^{-\frac{2imt}{Bn}}\psi_n\left(e^{2it/Bn}\right)dt - \frac{2}{Bn}\left[\int\limits_{-\frac{B\pi n}{2}}^{\frac{B\pi n}{2}} e^{-\frac{2imt}{Bn}}\frac{1}{1-it}dt + \right.$$

$$+ \int\limits_{|t|<n/m} e^{-\frac{2imt}{Bn}}\left(\frac{\gamma_n\left(e^{2it/Bn}\right)}{1-e^{2it/Bn}} - \frac{1}{1-it}\right)dt +$$

$$+ \int\limits_{\frac{n}{\sqrt{m}}<|t|<\frac{B\pi n}{2}} e^{-\frac{2imt}{Bn}}\frac{\gamma_n\left(e^{it/Bn}\right)}{1-e^{2it/Bn}}dt + \int\limits_{\frac{n}{\sqrt{m}}<|t|<\frac{B\pi n}{2}} \times$$

$$\times e^{-\frac{2imt}{Bn}}\frac{1}{1-it}dt + \left(\frac{C}{3B}-\frac{B}{2}\right)\int\limits_{-\frac{B\pi n}{2}}^{\frac{B\pi n}{2}} e^{-\frac{2imt}{Bn}}\left[\frac{\gamma_n^2\left(e^{2it/Bn}\right)}{1-e^{2it/Bn}}\times\right.$$

$$\times\ln\left(1+\frac{n}{a\left(e^{2it/Bn}\right)}\right) + \gamma_n\left(e^{2it/Bn}\right)\left(\ln\left(1+\frac{n}{a\left(e^{2it/Bn}\right)}\right) - \right.$$

$$\left.\left.\left. - \ln(n+1)\right)\right]dt. \right. \tag{3.40}$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_{-\frac{B\pi n}{2}}^{\frac{B\pi n}{2}} \frac{e^{-2imt/Bn}}{1-it}\, dt = e^{-2m/Bn} + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{3.41}$$

Вследствие (3.34)

$$\int\limits_{|t|<\frac{n}{\sqrt{m}}} e^{-\frac{2imt}{Bn}}\left(\frac{\gamma_n\left(e^{2it/Bn}\right)}{1-e^{2it/Bn}} - \frac{1}{1-it}\right) dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right). \tag{3.42}$$

Интегрируя по частям и используя (3.35), получаем

$$\int\limits_{\frac{n}{\sqrt{m}}\leqslant |t|\leqslant \frac{B\pi n}{2}} e^{-2imt/Bn}\frac{\gamma_n\left(e^{2it/Bn}\right)}{1-e^{2it/Bn}}\, dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right). \tag{3.43}$$

Аналогично вычисляем

$$\int\limits_{\frac{n}{\sqrt{m}}\leqslant |t|\leqslant \frac{B\pi n}{2}} \frac{e^{-\frac{2imt}{Bn}}}{1-it}\, dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \tag{3.44}$$

и

$$\int\limits_{-\frac{B\pi n}{2}}^{\frac{B\pi n}{2}} \left(\frac{it}{1-it} - \frac{t^2}{(1-it)^2}\right)\ln(1-it)\, e^{-\frac{2imt}{Bn}}\, dt = O\left(\frac{n\ln n}{m}\right). \tag{3.45}$$

Далее

$$\int\limits_{-\frac{B\pi n}{2}}^{\frac{B\pi n}{2}} \frac{it}{1-it}\, e^{-\frac{2imt}{Bn}}\, dt = O\left(\frac{n}{m}\right) \tag{3.46}$$

и

$$\int\limits_{-\frac{B\pi n}{2}}^{\frac{B\pi n}{2}} \frac{t^2\ln|t|}{1+t^2}\, dt = O(\ln n).$$

Из формул (3.40) — (3.46) следует

$$\frac{Bn}{2} I_1 = e^{-2m/Bn} + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) + O\left(\frac{\ln n}{m}\right). \qquad (3.47)$$

Обратимся теперь к интегралу

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \left[K(e^{it}) - K(0) \right] \gamma_n(e^{it}) - K(e^{it}) \cdot \frac{\gamma_n^2(e^{it})}{1 - e^{it}} \right\} e^{-itm} \, dt.$$

Если $|1 - x| > \eta > 0$, то

$$\frac{K(x)}{\frac{1}{1-x} + \frac{Bn}{2}} = \frac{2}{nB} \frac{K(x)}{1 + \frac{1}{(1-x)Bn}} = \frac{2}{Bn} K(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

поэтому

$$\int_{\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi} K(e^{ti}) \gamma_n(e^{it}) e^{-imt} \, dt =$$

$$= \frac{2}{Bn} \int_{\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi} K(e^{ti}) e^{-imt} \, dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \qquad (3.48)$$

С другой стороны, вследствие (3.33)

$$K(e^{it}) \gamma_n(e^{it}) | < \frac{|t| K(e^{it})}{1 + \frac{nB}{8} |t|}. \qquad (3.49)$$

Значит,

$$\int_{|t| \leqslant \varepsilon} K(e^{it}) \gamma_n(e^{it}) e^{-imt} \, dt = O\left(\frac{\varepsilon}{n}\right). \qquad (3.50)$$

Заметим, что вследствие ограниченности $K(x)$

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi} K(e^{it}) e^{-mt} \, dt = 0,$$

поэтому в силу (3.48) и (3.50) при $m \to \infty$

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(e^{it}) \gamma_n(e^{it}) e^{-imt} \, dt = o\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (3.51)$$

Эта же оценка справедлива для

$$\int_{-\pi}^{\pi} \gamma_n(e^{it})\, e^{-imt}\, dt,$$

когда $m \to \infty$. Используя (3.31) и (3.33), получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(e^{it})\, \gamma_n^2(e^{it}) \frac{e^{-imt}}{1 - e^{it}}\, dt =$$

$$= O\left(\int_0^{\pi} \frac{t}{(1+nt)^2}\, dt\right) = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{3.52}$$

В силу (3.51) и (3.52)

$$I_2 = o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.53}$$

для $m \to \infty$.

Из (3.28) и (3.30) с помощью оценок (3.47) и (3.53) легко выводится утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. К решению одной биологической задачи „Изв. НИИ мат. и мех. Томского университета", 1938, т. 2, вып. 1.
2. Севастьянов Б. А. Теория ветвящихся случайных процессов, УМН, 1951. т. VI, вып. 6.
3. Яглом А. М. Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов, ДАН СССР, 1947, т. 56, № 8.
4. Чистяков В. П. Локальные предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов, „Теория вероятностей и ее применения", 1957, т. 2, вып. 3.
5. Золотарев В. М. Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов, „Теория вероятностей и ее применения", 1957, т. 2, вып. 2.
6. Нагаев А. В. Уточнение некоторых теорем теории ветвящихся случайных процессов, Труды Ташкентского госуниверситета, вып. 189, Ташкент, 1961.
7. Мухамедханова Р. Уточнение предельной теоремы из теории ветвящихся случайных процессов, Труды Института математики им В. И. Романовского, Ташкент, вып. 22, 1961.
8. Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения, М., 1952.
10. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей, М.—Л., 1952.
11. Фихтенгольц. Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, М.—Л., 1948.

С. В. НАГАЕВ, А. Б. МУХИН

(*Ташкент*)

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ СХОДИМОСТИ К РАВНОМЕРНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ НА ОТРЕЗКЕ

Пусть $\xi_j (j = 1, 2, \ldots)$ — независимые случайные величины,

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad S_n(a) = S_n - \left[\frac{S_n}{a}\right] a, \quad a > 0.$$

Распределение $F_n(a, x) = P(S_n(a) < x)$, очевидно, сосредоточено на отрезке $[0, a]$.

Для величин ξ_j, принимающих целые значения, в работах [1—3] исследуются условия, при которых $F_n(a, x)$ сходится к равновероятному распределению. Наиболее общий результат в этом направлении, полученный Дворецким и Вольфовицем, заключается в следующем. Пусть d — целое положительное число, ξ_j — независимые случайные величины, принимающие целые значения, $P_j(k) = P(\xi_j \equiv k (\mathrm{mod}\, d))$. Для того, чтобы $P(S_n(d) = k) \to \frac{1}{d} (k = 0, 1, \ldots, d-1)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\prod_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{d-1} P_j(k) \exp\left(\frac{2\pi i r k}{d}\right) = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, d-1.$$

Каутский [4] рассмотрел аналогичную задачу для случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова с конечным числом состояний.

В настоящей заметке исследуются условия сходимости $F_n(a, x)$ к равномерному распределению на отрезке.

Теорема. Пусть ξ_j — независимые случайные величины с характеристическими функциями $f_j(t)$, a — положительное действительное число.

Для того, чтобы $F_n(a, x) \to \frac{x}{a}$ на $[0, a]$, необходимо и