ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ В СЛУЧАЕ НУЛЕВОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

С. В. НАГАЕВ

Пусть ξ_i, $i = \overline{1, \infty}$,— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F_\lambda(x)$, зависящей от параметра λ, причем $M\xi_1^2 = 2\lambda^2$ и $M\xi_1 = 0$. Положим $c_{3\lambda} = M|\xi_1|^3$. Пусть n_x — наименьший среди индексов n таких, что $\zeta_n + x \in (a, b)$, где $\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, (a, b) — конечный интервал числовой прямой. Положим $P_\lambda(x) = P\{\zeta_{n_x} + x \geqslant b\}$, $x \in (a, b)$, и $P_\lambda(x) = 0$, $x \notin (a, b)$.

Как известно (см., например, [1], гл. III),

$$\lim_{\lambda\to 0} P_\lambda(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in (a, b),$$

если при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_\lambda(x) = 0.$$

В. С. Королюк [2] получил для $P_\lambda(x)$ асимптотическое разложение по степеням λ в предположении существования у $F_\lambda(x)$ конечного числа моментов, а также плотности. Целью настоящей работы является оценка скорости сходимости $P_\lambda(x)$ при условии, что существует лишь третий момент. Метод доказательства, по-видимому, является новым.

На протяжении всей работы символ O будет употребляться только в том случае, если соответствующая постоянная не зависит от распределения $F_\lambda(x)$.

Будем обозначать $S(p(x))$ оператор, переводящий абсолютно интегрируемую функцию $p(x)$ в ее преобразование Фурье — Лебега $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)dx$, а $S_1(F(x))$ — оператор, переводящий функцию ограниченной вариации в преобразование Фурье — Стильтьеса $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$. Символом S_1^{-1} будет обозначаться оператор, обратный к S_1.

Теорема. *Существует абсолютная постоянная L такая, что*

$$\sup_{a<x<b} \left| P_\lambda(x) - \frac{x-a}{b-a} \right| < L \frac{c_{3\lambda}}{\lambda^2(b-a)}.$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать функцию $F_\lambda(x)$ непрерывной, а также положить $a = 0$, $b = 1$. Пусть $\varphi_\lambda(t) = S(P_\lambda)$, $f_\lambda(t) = S_1(F_\lambda)$. Очевидно,

$$P_\lambda(x) = 1 - F_\lambda(1-x) + \int_0^1 P_\lambda(y)\, dF_\lambda(y-x). \tag{1}$$

В терминах преобразований Фурье это уравнение можно переписать в виде

$$\varphi_\lambda(t)(1 - f_\lambda(t)) = \int_0^1 (1 - F_\lambda(1-x)) e^{itx} dx + S(\Phi_\lambda), \tag{2}$$

где

$$\Phi_\lambda(x) = \begin{cases} -\int_0^1 P_\lambda(y)\, dF_\lambda(y-x), & x \notin (0, 1), \\ 0, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

$\bar{f}_\lambda(t)$ — функция, сопряженная с $f_\lambda(t)$. Положим $f_{2\lambda}(t) = [1 - f_\lambda(t)] / \lambda^2 t^2$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{\varphi_\lambda(t)(1-\bar{f}_\lambda(t))}{\lambda^2} = t^2 \varphi_\lambda(t) \bar{f}_{2\lambda}(t) = S\left(-\frac{d^2}{dx^2} P_\lambda * \bar{F}_{2\lambda}(x)\right), \tag{3}$$

где

$$\bar{F}_{2\lambda} = S_1^{-1}(\bar{f}_{2\lambda}), \qquad P_\lambda * \bar{F}_{2\lambda}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\lambda(x-y)\, d\bar{F}_{2\lambda}(y).$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\frac{d^2}{dx^2} P_\lambda * \bar{F}_{2\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda^2}(F_\lambda(1-x)-1), & x \in (0, 1), \\ -\dfrac{1}{\lambda^2}\Phi_\lambda(x), & x \notin (0, 1). \end{cases} \tag{4}$$

Далее

$$\int_{-\infty}^{u} (1 - F_\lambda(1-y))\, dy = F_{1\lambda}(\infty) - F_{1\lambda}(1-u), \qquad u \leqslant 1,$$

где $F_{1\lambda} = S_1^{-1}\left(\dfrac{f_\lambda(t)-1}{it}\right)$ и

$$\int_{-\infty}^{x} (F_{1\lambda}(\infty) - F_{1\lambda}(1-u))\, du = \lambda^2 (F_{2\lambda}(\infty) - F_{2\lambda}(1-x)) = \lambda^2 \bar{F}_{2\lambda}(x-1), \qquad x \leqslant 1 \tag{5}$$

(мы полагаем $\bar{F}_{2\lambda}(-\infty) = 0$).

Аналогично,

$$\int_{u}^{\infty} F_\lambda(1-y)\, dy = F_{1\lambda}(1-u), \qquad u \geqslant 1,$$

$$\int_{x}^{\infty} F_{1\lambda}(1-u)\, du = \lambda^2 F_{2\lambda}(1-x) = \lambda^2 (1 - \bar{F}_{2\lambda}(x-1)), \quad x \geqslant 1. \tag{6}$$

В силу (5) и (6),

$$\frac{d^2}{dx^2} \bar{F}_{2\lambda}(x-1) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda^2}(1 - F_\lambda(1-x)), & x < 1, \\ -\dfrac{1}{\lambda^2} F_\lambda(1-x), & x > 1. \end{cases} \tag{7}$$

Очевидно,

$$\bar{F}_{2\lambda}(x-1) = E * \bar{F}_{2\lambda}(x), \tag{8}$$

где $E(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$ Положим $P_\lambda^*(x) = P_\lambda(x) + E(x)$. Вследствие (4), (7) и (8), при $x \in (0, 1)$

$$\frac{d^2}{dx^2} P_\lambda^* * \bar{F}_{2\lambda}(x) = 0. \tag{9}$$

Если же $x > 1$, то

$$\frac{d^2}{dx^2} P_\lambda^* * \bar{F}_{2\lambda}(x) = -\frac{1}{\lambda^2}(F_\lambda(1-x) + \Phi_\lambda(x)).$$

В то же время

$$-\Phi_\lambda(x)=\int_0^1 P_\lambda(y)\,dF_\lambda(y-x)\leqslant F_\lambda(1-x).$$

Следовательно, при $x>1$

$$\frac{d^2}{dx^2}P_\lambda*\overline{F}_{2\lambda}(x)\leqslant 0. \tag{10}$$

В силу (9) и (10), существуют постоянные α и β такие, что

$$\begin{gathered} P_\lambda^* * \overline{F}_{2\lambda}(x)=\alpha x+\beta, \quad x\in(0,1),\\ P_\lambda^* * \overline{F}_{2\lambda}(x)\leqslant \alpha x+\beta, \quad x\geqslant 1. \end{gathered} \tag{11}$$

Очевидно, $P_\lambda^* * \overline{F}_{2\lambda}(x)$ не убывает. Следовательно, $\alpha\geqslant 0$. Далее $0\leqslant P_\lambda^* * \overline{F}_{2\lambda}(x)\leqslant$ $\leqslant 1$. Поэтому $0\leqslant\alpha+\beta\leqslant 1$ и $\beta\geqslant 0$. Отсюда

$$0\leqslant\alpha\leqslant 1. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь $x\leqslant 0$. Для этих значений x

$$\frac{d^2}{dx^2}P_\lambda*\overline{F}_\lambda(x)\geqslant 0.$$

Следовательно,

$$P_\lambda*\overline{F}_{2\lambda}(x)\geqslant(\alpha-\overline{F}'_{2\lambda}(-1))\,x+P_\lambda*\overline{F}_{2\lambda}(0), \tag{13}$$

поскольку

$$\frac{d}{dx}P_\lambda*\overline{F}_{2\lambda}(x)\Big|_{x=0}=\alpha-\frac{d}{dx}E*\overline{F}_{2\lambda}(x)\Big|_{x=0}=\alpha-\overline{F}'_{2\lambda}(-1).$$

Далее, в силу (7),

$$\overline{F}'_{2\lambda}(-1)=\frac{1}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{-1}(1-F_\lambda(1-x))\,dx=O\left(\frac{c_3}{\lambda^2}\right),\quad c_3=c_{2\lambda} \tag{14}$$

и

$$E*\overline{F}_{2\lambda}(0)=\overline{F}_{2\lambda}(-1)=O\left(\frac{c_3}{\lambda^2}\right). \tag{15}$$

Из (13) — (15) следует, что при $x<0$

$$P_\lambda^* * \overline{F}_{2\lambda}(x)\geqslant\alpha x+\beta+O\left(\frac{|x|+1}{\lambda^2}c_3\right). \tag{16}$$

Положим

$$G_{\alpha\beta}(x)=\begin{cases}\beta, & x\leqslant 0,\\ \alpha x+\beta, & 0<x<1,\\ \alpha+\beta, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

Нетрудно видеть, что

$$G_{\alpha\beta}*F_{2\lambda}(x)=G_{\alpha\beta}(x)+O\left(\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,dF_{2\lambda}(x)\right). \tag{17}$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,dF_{2\lambda}(x)=\frac{c_3}{6\lambda^2}. \tag{18}$$

Таким образом,

$$G_{\alpha\beta}(x)=G_{\alpha\beta}*\overline{F}_{2\lambda}(x)+O\left(\frac{c_3}{\lambda^2}\right). \tag{19}$$

Из (11), (16) и (19) следует, что

$$(P_\lambda^* - G_{\alpha\beta}) * \overline{F}_{2\lambda}(x) = O\left(\frac{c_3}{\lambda^2}\right), \tag{20}$$

если $-c_3/\lambda^2 \leqslant x \leqslant 1 + c_3/\lambda^2$. Пусть $\Delta = \sup | P_\lambda^*(x) - G_{\alpha\beta}(x) |$. Существует, очевидно, $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$ такое, что $\Delta = | P_\lambda^*(x_0) - G_{\alpha\beta}(x_0) |$.

Предположим, что

$$P_\lambda^*(x_0) - G_{\alpha\beta}(x_0) = \Delta. \tag{21}$$

Вследствие (12) при $x > x_0$

$$P_\lambda^*(x) - G_{\alpha\beta}'(x) > \Delta + x_0 - x. \tag{22}$$

Далее

$$(P_\lambda^* - G_{\alpha\beta}) * \overline{F}_{2\lambda}\left(x_0 + \frac{c_3}{\lambda^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (G_{\alpha\beta}(y) - P_\lambda^*(y))\, d\overline{F}_{2\lambda}\left(x_0 + \frac{c_3}{\lambda^2} - y\right). \tag{23}$$

В силу (22),

$$\int_{x_0}^{\infty} (G_{\alpha\beta}(y) - P_\lambda^*(y))\, d\overline{F}_{2\lambda}\left(x_0 + \frac{c_3}{\lambda^2} - y\right) \geqslant \Delta \overline{F}_{2\lambda}\left(\frac{c_3}{\lambda^2}\right) - \int_{x_0}^{\infty} (x_0 - y)\, d\overline{F}_{2\lambda}\left(x_0 + \frac{c_3}{\lambda^2} - y\right). \tag{24}$$

Вследствие (18),

$$1 - \overline{F}_{2\lambda}\left(\frac{c_3}{\lambda^2}\right) \leqslant \frac{1}{6}. \tag{25}$$

Очевидно,

$$\int_{x_0}^{\infty} (x_0 - y)\, d\overline{F}_{2\lambda}\left(x_0 + \frac{c_3}{\lambda^2} - y\right) = O\left(\frac{c_3}{\lambda^2}\right) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} | x |\, d\overline{F}_{2\lambda}(x)\right) = O\left(\frac{c_3}{\lambda^2}\right). \tag{26}$$

Из (24) — (26) следует

$$\int_{x_0}^{\infty} (G_{\alpha\beta}(y) - P_\lambda^*(y))\, d\overline{F}_{2\lambda}\left(x_0 + \frac{c_3}{\lambda^2} - y\right) \geqslant \frac{5}{6}\Delta + O\left(\frac{c_3}{\lambda^2}\right). \tag{27}$$

Наконец, в силу (25),

$$\left| \int_{-\infty}^{x_0} (P_\lambda^*(y) - G_{\alpha\beta}(y))\, d\overline{F}_{2\lambda}\left(x_0 + \frac{c_3}{\lambda^2} - y\right) \right| \leqslant \Delta \left(1 - \overline{F}_{2\lambda}\left(\frac{c_3}{\lambda^2}\right)\right) \leqslant \frac{\Delta}{6}. \tag{28}$$

Из (23), (27) и (28) выводим

$$(P_\lambda^* - G_{\alpha\beta}) * \overline{F}_{2\lambda}\left(x_0 + \frac{c_3}{\lambda^2}\right) \geqslant \frac{2}{3}\Delta + O\left(\frac{c_3}{\lambda^2}\right). \tag{29}$$

В свою очередь, (20) и (29) приводят к оценке

$$\Delta = O\left(\frac{c_3}{\lambda^2}\right).$$

Итак, теорема доказана в предположении, что имеет место (21). В случае $P_\lambda^*(x_0) - G_{\alpha\beta}(x_0) = -\Delta$ рассуждения совершенно аналогичны.

Поступила в редакцию
7.3.67

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Асимптотические законы теории вероятностей, М.—Л., ОНТИ, 1936.

[2] В. С. Королюк, Асимптотический анализ в граничных задачах случайных блужданий, Докторская диссертация, Киев, 1963.

[3] А. А. Боровков, В. С. Королюк, О результатах асимптотического анализа в задачах с границами, Теория вероят. и ее примен., X, 2 (1965), 255—266.

AN ESTIMATION OF A CONVERGENCE RATE FOR THE ABSORPTION PROBABILITY IN CASE OF A NULL EXPECTATION

S. V. NAGAEV (NOVOSIBIRSK)

(*Summary*)

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of mutually independent equally distributed random variables with a distribution function $F_\lambda(x)$ depending on a parameter λ. Let $\mathrm{M}\xi_1^2 = 2\lambda^2$ and $\mathrm{M}\xi_1 = 0$. Define n_x as the least integer for which $\zeta_n + x \notin (a, b)$, where $\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ and (a, b) is a finite interval of the real line. Put

$$P_\lambda(x) = \mathrm{P}\{\zeta_{n_x} + x \geqslant b\}, \quad x \in (a, b),$$

and

$$c_{3\lambda} = \mathrm{M}\,|\,\xi_1\,|^3.$$

The following assertion is proved: there exists an absolute constant L such that

$$\sup_{a<x<b} \left| P_\lambda(x) - \frac{x-a}{b-a} \right| < L \frac{c_{3\lambda}}{\lambda^2 (b-a)}.$$

О МНОГОМЕРНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

С. М. САДИКОВА

1. Настоящая работа посвящена оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме *. При этом рассматриваются два способа измерения «близости» распределений. При первом из них «расстояние» ρ_1 определяется по функциям распределения. При втором способе в качестве «расстояния» ρ_2 берется точная верхняя грань модуля разности $P(A) - Q(A)$ по всем выпуклым множествам A. Соответственно, работа состоит из двух частей. В первой из них улучшаются результаты Бергстрема и автора, относящиеся к расстоянию ρ_1 (в двумерном случае). Во второй части доказывается вариант центральной предельной теоремы со сходимостью в смысле расстояния ρ_2 (для любого числа измерений).

2. **Формулировки результатов.** Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных s-мерных векторов $\xi_n = (\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,s})$. Допустим, что их распределение P невырождено и

$$\mathrm{M}\xi_n = 0, \qquad \mathrm{M}\,|\,\xi_n\,|^3 = \mathrm{M}\left(\sum_1^s \xi_{n,j}^2\right)^{3/2} < \infty. \tag{2.1}$$

В двумерном случае ($s = 2$) примем дополнительно обозначения

$$\mu_{k,l} = \iint x_1^k x_2^l P(dx_1 dx_2), \qquad \beta_{k,l} = \iint |\,x_1^k x_2^l\,|\, P(dx_1 dx_2).$$

Обозначим ρ коэффициент корреляции между компонентами. Буквы $C_1, C_2, \ldots$ будут обозначать в дальнейшем абсолютные постоянные. Пусть P_n — распределение нормированной суммы

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}} \tag{2.2}$$

---

* *Примечание при корректуре.* После того как эта статья была сдана в печать, некоторые более общие результаты были получены В. В. Сазоновым (см. этот номер, стр. 191—193).