ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Том XIII *Основан в 1956 г.*
Выпуск 4 *Выходит 4 раза в год*
октябрь, ноябрь, декабрь *Москва*

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ТИПА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

С. В. НАГАЕВ

§ 1. Введение. Формулировка результатов

Пусть $F(x)$ — функция распределения и $F(0) = 0$. Положим

$$H(x, A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k F_k(x), \qquad A > 0,$$

где $F_k(x)$, $k \geqslant 1$, есть k-кратная свертка $F(x)$, $F_0(x)$ — несобственная функция распределения со скачком в 0. Пусть

$$M_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \, dF(x), \qquad \mu = M_1.$$

В дальнейшем мы всюду под интегралом $\int_a^b g(x)\,dF(x)$ будем подразумевать $\int_{a+}^{b+} g(x)\,dF(x)$.

Очевидно $H(x, A) < \infty$ при $A < 1$, $x < \infty$. Более того, в этом случае и $H(\infty, A) < \infty$. Пусть $g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} dF(x)$. Очевидно, при $g(\operatorname{Re} z) < 1/A$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}\, dH(x, A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k g^k(z) = \frac{1}{1 - Ag(z)}. \tag{1.1}$$

Если $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z = 0$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k g^k(z) < \infty$$

для $1 \leqslant A < 1/g(z)$.

С другой стороны, при $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z = 0$

$$H(x, A) \leqslant e^{-zx} \sum_{k=0}^{\infty} A^k g^k(z).$$

Таким образом,

$$H(x, A) < \infty$$

для $1 \leqslant A < 1/g(-\infty) = 1/F(0+)$. Заметим, что $H(\infty, A) = \infty$ для $A \geqslant 1$.

В теории восстановления изучают обычно асимптотическое поведение $H(x, 1)$ или $H(x+l, 1) - H(x, 1)$ при $x \to \infty$. Большой интерес представляет, однако, и случай $A \neq 1$. В частности, в теории ветвящихся процессов со случайным временем жизни частицы возникает потребность в асимптотическом представлении для $H(x+l, A) - H(x, A)$ при $x \to \infty$ с равномерной по A оценкой остаточного члена. Следует отметить, что при фиксированном $A < 1$ и конечном числе моментов M_s асимптотика $H(x+l, A) - H(x, A)$ зависит от индивидуальных свойств $F(x)$. Утверждения собирательного типа можно получить лишь при условии, что $A \uparrow 1$ достаточно быстро.

В настоящей работе изучается асимптотическое поведение $H(x+l, A) - H(x, A)$ в предположении, что $F(x)$ либо является решетчатой, либо имеет абсолютно непрерывную компоненту. Мы будем называть $F(x)$ Δ-решетчатой, если она возрастает только скачками, причем последние расположены в точках вида $k\Delta$, где k — целое неотрицательное, причем общий наибольший делитель тех k, для которых $F(k\Delta+) - F(k\Delta) > 0$, равен 1.

Для Δ-решетчатой $F(x)$ положим

$$f_k = F(k\Delta+) - F(k\Delta), \qquad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \qquad f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k z^k.$$

Пусть $\lambda(A)$ и $\lambda_n(A)$ — действительные неотрицательные корни соответственно уравнений $Af(z) = 1$ и $Af_n(z) = 1$.

Теорема 1. *Если $F(x)$ Δ-решетчатая и $M_s < \infty$, $s > 1$, то*

$$H(n\Delta+, A) - H(n\Delta, A) = \frac{\lambda_n^{-n-1}(A)}{Af_n'(\lambda_n(A))} + o\left(\frac{1}{n^{s-1}}\right) \tag{1.2}$$

равномерно относительно $A_n \leqslant A \leqslant 1$ таких, что

$$n^{1-s} \exp\{n\Delta(1 - A_n)/\mu\} = O(1) \tag{1.3}$$

и

$$H(n\Delta+, A) - H(n\Delta, A) = \frac{\lambda^{-n-1}(A)}{Af'(\lambda(A))} + o\left(\frac{1}{n^{s-1}}\right) \tag{1.4}$$

равномерно относительно $1 \leqslant A \leqslant \rho$, где $\rho < 1/f_0$ таково, что $\lambda(A)$ при $1 \leqslant A \leqslant \rho$ является единственным в круге $|z| \leqslant 1$ корнем уравнения $Af(z) = 1$.

Полагая в (1.4) $A = 1$, получаем

$$H(n\Delta+, 1) - H(n\Delta, 1) = \frac{\Delta}{\mu} + o\left(\frac{1}{n^{s-1}}\right). \tag{1.5}$$

Это несколько слабее, чем результат А. О. Гельфонда [1], который в наших обозначениях формулируется следующим образом:

$$H(n\Delta+, 1) - H(n\Delta, 1) = \frac{\Delta}{\mu} + \frac{\Delta^2}{\mu^2} \sum_{k \geqslant n+1} s_k + O\left(\frac{\ln n}{n^s}\right),$$

где $s_k = \sum_{j \geqslant k+1} f_j$, если $M_s < \infty$, $s \geqslant 1$.

В работе А. А. Боровкова [2] при $A = 1$ получена оценка вида (1.5), правда, в более общей ситуации, когда $F(0) > 0$. Функция $H(x)$ в [2] определяется как $M\eta_x$, где η_x — момент первого прохождения уровня x. Отметим, наконец, что из условия (1.3) следует, что $1 - A = O(\ln n / n)$.

Обратимся теперь к нерешетчатому случаю. Через $\bar{F}_1(x)$ мы будем обозначать абсолютно непрерывную компоненту $F(x)$. Положим

$$g_y(z) = \int_{-\infty}^{y-} e^{zx}\, dF(x).$$

Пусть $\Lambda_y(A)$ — действительный корень уравнения $Ag_y(z) = 1$ и $\Lambda(A) = \Lambda_\infty(A)$.

Теорема 2. *Если $\bar{F}_1(\infty) > 0$ и $M_s < \infty$, $s > 1$, то при любом $L > 0$*

$$H(y, A) - H(y - l, A) = \frac{e^{-\Lambda_y(A)(y-l)} - e^{-\Lambda_y(A)y}}{Ag'_y(\Lambda_y(A))\,\Lambda_y(A)} + o\left(\frac{1}{y^{s-1}}\right), \qquad y > 0, \quad (1.6)$$

равномерно относительно $0 \leqslant l \leqslant L$ и $A_y \leqslant A \leqslant 1$ таких, что

$$y^{1-s} \exp\{y(1 - A_y)\mu\} = O(1)$$

и

$$H(y, A) - H(y - l, A) = \frac{e^{-\Lambda(A)(y-l)} - e^{-\Lambda(A)y}}{Ag'(\Lambda(A))\,\Lambda(A)} + o\left(\frac{1}{y^{s-1}}\right), \qquad y > 0, \quad (1.7)$$

равномерно относительно $0 \leqslant l \leqslant L$ и $1 \leqslant A \leqslant R$, где $R < \min(F(0+)^{-1}, (1 - \bar{F}_1(\infty)/2)^{-1})$ таково, что $\Lambda(A)$ при $1 \leqslant A \leqslant R$ является единственным в полуплоскости $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ корнем уравнения $Ag(z) = 1$.

Следствие *. *Если $\bar{F}_1(\infty) > 0$ и $M_s < \infty$, $s > 1$, то*

$$H(y, 1) - H(y - l, 1) = \frac{l}{\mu} + o\left(\frac{1}{y^{s-1}}\right) \quad (1.8)$$

равномерно относительно l в любом конечном промежутке $0 \leqslant l \leqslant L$.

Для доказательства достаточно положить в (1.7) $A = 1$ и заметить, что $\Lambda(1) = 0$.

Отметим, что теорема 2 перестает, вообще говоря, быть верной даже в случае $A = 1$, если, предполагая $F(x)$ не Δ-решетчатой, опустить в то же время требование $\bar{F}_1(\infty) > 0$.

В самом деле, пусть $M_3 < \infty$. Предположим, что (1.8) справедливо. Тогда функция

$$\Delta_l(x) \equiv H(x + l, 1) - H(x, 1) - l/\mu = o(x^{-2})$$

и, следовательно, абсолютно интегрируема. Поэтому

$$\lim_{z \to it,\, \operatorname{Im} z < 0} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_l(x)\, e^{zx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Delta_l(x)\, dx,$$

причем

---

* Этот результат получен также в [7] при условиях $s \geqslant 2$, $\mu > 0$, но без ограничения $F(0) = 0$.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Delta_l(x)\, dx \right| < \infty \tag{1.9}$$

равномерно по t.

С другой стороны,

$$\lim_{z \to it,\, \mathrm{Im}\, z < 0} \int_{-\infty}^{\infty} (H(x+l, 1) - H(x, 1))\, e^{zx}\, dx = \frac{1 - e^{-itl}}{it(1 - g(it))},$$

и, следовательно,

$$\varphi_l(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Delta_l(x)\, dx = \frac{1 - e^{-itl}}{it(1 - g(it))} + \frac{l}{\mu it}.$$

Пусть теперь $g(z) = e^{z\alpha}\psi(z)$, где $\psi(z)$ — производящая функция Δ-решетчатого распределения с $\Delta = 1$, а $\alpha > 0$ — иррационально и таково, что существует последовательность целых k_j такая, что $\lim\limits_{\to\infty} k_j\{(2k_j + 1)\alpha\} = 0$.

Очевидно,

$$\lim_{j \to \infty} k_j (g(2\pi(2k_j + 1) i) - 1) = 0.$$

С другой стороны, $1 - \exp\{-2\pi(2k_j + 1)li\} = 2$ при $l = {}^1/_2$. Поэтому

$$\lim_{j \to \infty} |\varphi_{1/2}(2\pi(2k_j + 1))| = \infty,$$

а это противоречит (1.9).

Положим $g_i(z) = \int_{0-}^{\infty} e^{zx} d\bar{F}_i(x)$, $i = 1, 2$, где $\bar{F}_2(x) = F(x) - \bar{F}_1(x)$.

Теорема 3. *Пусть* $\bar{F}_1(\infty) > 0$, $\int_{0-}^{\infty} e^{hx} dF(x) < \infty$ *для* $0 \leqslant h < h_0$ *и* $\Lambda(A)$ *является единственным нулем функции* $Ag(z) - 1$ *в полуплоскости* $z \leqslant h_1 < h_0$, *где* $h_1 > 0$ *и* $g_2(h_1) < 1$, *при* $1/g(h_1) < A \leqslant 1$. *Тогда при любых* $\varepsilon > 0$ *и* $L > 0$

$$H(x, A) - H(x - l, A) = \frac{e^{-\Lambda(A)(x-l)} - e^{-\Lambda(A)x}}{Ag'(\Lambda(A))\Lambda(A)} + O(e^{-h_1 x}) \tag{1.10}$$

равномерно относительно $1/g(h_1) + \varepsilon \leqslant A \leqslant 1$ *и* $0 < l \leqslant L$.

Аналогичный результат приводится в [3] (стр. 246), причем предполагается, что $\bar{F}_2(x) \equiv 0$ и $F'(x)$ интегрируема в степени $p > 1$.

В основу доказательства всех трех сформулированных теорем положен один и тот же метод. Поэтому мы приводим подробное доказательство лишь теоремы 1, а при доказательстве теорем 2 и 3 сосредотачиваем внимание на том, что является новым по сравнению с решетчатым случаем, отсылая читателя при первой возможности к соответствующим местам доказательства теоремы 1.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Не нарушая общности, мы можем считать $\Delta = 1$. Условимся в дальнейшем обозначать через $C_n(f(z))$ коэффициент при z^n в ряде Тейлора функции $f(z)$, аналитической в некоторой окрестности 0. Положим $u_n =$

$= H(n+, A) - H(n, A)$. Очевидно,

$$u_n = C_n(1/(1 - Af(z))).$$

С другой стороны, при $k \leqslant n$

$$C_k(1/(1 - Af(z))) = C_k(1/(1 - Af_n(z))).$$

Таким образом,

$$u_k = C_k(1/(1 - Af_n(z))), \qquad k \leqslant n. \tag{2.1}$$

Положим $\mu_n(z) = f_n'(z)$ и $h_n = [(s-1)\ln n + c]/n$, где $c > 0$ — постоянная, которая будет выбрана позднее.

Пусть $h > 0$. Нетрудно показать, что для любой функции распределения

$$\int\limits_{1/h}^{y} e^{hx}\,dF(x) < e\left(1 - F\left(\frac{1}{h}\right)\right) + h\int\limits_{1/h}^{y}(1 - F(x))\,e^{hx}\,dx, \qquad y > \frac{1}{h}. \tag{2.2}$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_{1/h}^{y}(1 - F(x))\,e^{hx}\,dx < L_s\frac{e^{hy}}{hy^s}\int\limits_{1/h}^{\infty}x^s\,dF(x), \tag{2.3}$$

где $L_s = 1 + s(s+1)^{s+1}e^{-s}$ (см. [5], стр. 235). Далее

$$1 - F\left(\frac{1}{h}\right) < \left(\frac{s}{ey}\right)^s e^{hy}\int\limits_{1/h}^{\infty}x^s\,dF(x). \tag{2.4}$$

Из (2.2) — (2.4) следует

$$\int\limits_{1/h}^{y} e^{hx}\,dF(x) < \bar{L}_s\frac{e^{hy}}{y^s}\int\limits_{1/h}^{\infty}x^s\,dF(x), \qquad y > \frac{1}{h}, \tag{2.5}$$

где $\bar{L}_s$ — некоторая постоянная.

Покажем теперь, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in U_n(\varepsilon)}|\mu_n(z) - \mu| = 0, \tag{2.6}$$

где $U_n(\varepsilon) = \{z\colon 1 \leqslant |z| \leqslant e^{h_n},\ |\arg z| \leqslant \varepsilon\}$. Действительно,

$$|\mu_n(z) - \mu| \leqslant \int\limits_{0}^{1/h_n}|z^{x-1} - 1|\,x\,dF(x) + \int\limits_{1/h_n}^{n}|z|^{x-1}x\,dF(x) + \int\limits_{1/h_n}^{\infty}x\,dF(x). \tag{2.7}$$

Но $|z|^x < e^{h_n x}$ для $z \in U_n(\varepsilon)$. Поэтому в силу (2.5)

$$\sup_{z\in U_n(\varepsilon)}\int\limits_{1/h_n}^{n}|z|^x x\,dF(x) = O\left(\frac{e^{h_n n}}{n^{s-1}}\int\limits_{1/h_n}^{\infty}x^s\,dF(x)\right). \tag{2.8}$$

С другой стороны, при $|z| \geqslant 1$ и $x \geqslant 1$

$$|z^{x-1} - 1| \leqslant x|z - 1|\,|z|^x. \tag{2.9}$$

Далее,

$$|z - 1| < |z - \exp\{i\arg z\}| + |1 - \exp\{i\arg z\}|. \tag{2.10}$$

С помощью оценок (2.9) и (2.10) получаем

$$\int_0^M |z^{x-1} - 1| x dF(x) < e((e^{h_n} - 1) + \varepsilon) M^2, \quad z \in U_n(\varepsilon). \tag{2.11}$$

В то же время

$$\int_M^{1/h_n} | z^{x-1} - 1 | x\, dF(x) = O\Big(\int_M^\infty x\, dF(x)\Big).$$

Полагая $M = (h_n + \varepsilon)^{-1/3}$, получаем

$$\int_0^{1/h_n} | z^{x-1} - 1 | x\, dF(x) = O((h_n + \varepsilon)^{1/3}) + O\Big(\int_{(h_n+\varepsilon)^{-1/3}}^\infty x\, dF(x)\Big), \quad z \in U_n(\varepsilon). \tag{2.12}$$

Из (2.7), (2.8) и (2.12) легко следует (2.6).

Оценим разность $\lambda_n(A) - \lambda(A)$ при $A \geqslant 1$. Прежде всего,

$$\lambda_n(A) \geqslant \lambda(A), \tag{2.13}$$

поскольку $f(z) \geqslant f_n(z)$ для неотрицательных z.

Очевидно, $\lambda(A) \leqslant 1$ при $A \geqslant 1$ и

$$\int_{0-}^n (\lambda_n^x(A) - \lambda^x(A))\, dF(x) = \int_n^\infty \lambda^x(A)\, dF(x). \tag{2.14}$$

Заметим, что в данном случае $\lambda_n^x(A) - \lambda^x(A) \geqslant x(\lambda_n(A) - \lambda(A))\lambda^x(A)$. Поэтому

$$(\lambda_n(A) - \lambda(A)) \int_{0-}^n x\lambda^x(A)\, dF(x) \leqslant \int_n^\infty \lambda^x(A)\, dF(x). \tag{2.15}$$

Отсюда

$$\lambda_n(A) - \lambda(A) = o\Big(\frac{\lambda^n(A)}{n^s}\Big) \tag{2.16}$$

равномерно относительно $1 \leqslant A \leqslant \rho$.

Действительно, существует $\omega > 0$ такое, что $\int_{0-}^\omega x dF(x) > \mu/2$. Следовательно, при достаточно больших n и $A \leqslant \rho$

$$\int_{0-}^n x\lambda^x(A)\, dF(x) > \lambda^\omega(\rho) \int_{0-}^\omega x\, dF(x) > \mu\lambda^\omega(\rho)/2, \tag{2.17}$$

поскольку $\lambda(A)$ не возрастает при увеличении A. Из (2.15) и (2.17) вытекает (2.16).

Если $A < 1$, то $\lambda(A)$, вообще говоря, не определен. В этом случае мы оценим разность $\lambda_n(A) - 1$. Нетрудно видеть, что

$$\int_{0-}^n (\lambda_n^x(A) - 1)\, dF(x) = \int_n^\infty dF(x) + \frac{1-A}{A}.$$

Далее,

$$\lambda_n^x(A) - 1 \geqslant (\lambda_n(A) - 1)x.$$

Следовательно,

$$(\lambda_n(A)-1)\int\limits_{0-}^{n} x\,dF(x)\leqslant\int\limits_{n}^{\infty} dF(x)+\frac{1-A}{A}. \qquad (2.18)$$

Из условия (1.3) вытекает существование постоянной c_1 такой, что

$$\frac{n(1-A)}{\mu}-(s-1)\ln n<c_1,$$

т. е.

$$\frac{1-A}{\mu}<\frac{(s-1)\ln n+c_1}{n}. \qquad (2.19)$$

Далее в силу (2.19)

$$1/A=1+O(1-A)=1+O(n^{-1}\ln n). \qquad (2.20)$$

Из (2.18) — (2.20) выводим

$$(\lambda_n(A)-1)\left(\mu+o\left(\frac{1}{n^{s-1}}\right)\right)\leqslant\frac{\mu(s-1)}{n}\ln n+\frac{\mu c_1}{n}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^s}\right).$$

Таким образом,

$$\lambda_n(A)-1<\frac{(s-1)\ln n+c_1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (2.21)$$

и, следовательно, $\lambda_n(A)$ при достаточно больших n лежит внутри круга радиуса e^{h_n}, если положить $c=2c_1$.

Покажем теперь, что $\lambda_n(A)$ при достаточно больших n является единственным в круге $|z|\leqslant e^{h_n}$ корнем уравнения $Af_n(z)=1$ одновременно для всех $A\leqslant 1$, удовлетворяющих условию (1.3), и $1\leqslant A\leqslant\rho$.

Прежде всего, вследствие (2.6) и равностепенной непрерывности $f_n'(z)$ в единичном круге

$$Af_n(z)-1=A\mu_n(\lambda_n(A))(z-\lambda_n(A))+o(z-\lambda_n(A)) \qquad (2.22)$$

равномерно по n и допустимым значениям A. Поэтому существует ε_0 такое, что $Af_n(z)-1$ не имеет в круге $|z-\lambda_n(A)|<\varepsilon_0$ других нулей, кроме $\lambda_n(A)$, для всех $A\in\mathfrak{U}_n$, где $\mathfrak{U}_n$ — множество допустимых при данном n значений A.

Очевидно,

$$|\mu_n(z)|\leqslant\int\limits_{0}^{1/h_n} x|z|^{x-1}dF(x)+\int\limits_{1/h_n}^{n} x|z|^{x-1}dF(x).$$

Но $\int\limits_0^{1/h_n} x|z|^{x-1}dF(x)<e\mu$ для $|z|\leqslant e^{h_n}$. Воспользовавшись еще оценкой (2.8), мы заключаем, что

$$\sup_{n,|z|\leqslant e^{h_n}}|\mu_n(z)|<\infty. \qquad (2.23)$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{1\leqslant r\leqslant e^{h_n}\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}}|f_n(re^{i\varphi})-f_n(e^{i\varphi})|=0. \qquad (2.24)$$

С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi} |f_n(e^{i\varphi}) - f(e^{i\varphi})| = 0. \tag{2.25}$$

При любом $\varepsilon > 0$

$$m(\varepsilon) = \inf_{1\leqslant A\leqslant\rho} \inf_{\varepsilon\leqslant|\varphi|\leqslant\pi} |Af(e^{i\varphi}) - 1| > 0, \tag{2.26}$$

поскольку в противном случае существуют $1 \leqslant A_0 \leqslant \rho$ и $\varepsilon \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi$ такие, что $A_0 f(e^{i\varphi_0}) = 1$, а это противоречит условию теоремы.

Из (2.24) — (2.26) следует, что при достаточно больших n

$$\inf_{\varepsilon\leqslant|\varphi|\leqslant\pi} |Af_n(re^{i\varphi}) - 1| > m(\varepsilon)/2 \tag{2.27}$$

для всех $1 \leqslant r \leqslant e^{h_n}$ и $A \in \mathfrak{U}_n$.

На основании всего сказанного мы можем утверждать, что если $Af_n(z)$ имеет в круге $|z| \leqslant e^{h_n}$ нуль $\tilde{\lambda}_n(A)$, отличный от $\lambda_n(A)$, то $\tilde{\lambda}_n(A)$ при достаточно больших n лежит вне области $\{z\colon 1 \leqslant z \leqslant e^{h_n},\ |\arg z| \geqslant \varepsilon\}$.

Заметим, что

$$Af_n(z) - 1 \geqslant A\mu_n(\lambda_n(A))(z - \lambda_n(A))$$

для действительных $z > \lambda_n(A)$. Из этого неравенства и равностепенной непрерывности $f_n(z)$ в круге $|z| \leqslant e^{h_n}$, которую обеспечивает (2.23), следует существование $\varepsilon_1 > 0$ такого, что $|Af_n(z) - 1| > \varepsilon_1$, $A \in \mathfrak{U}_n$, если $z \in U_n(\varepsilon_1)$ и $\lambda_n(A) \leqslant 1 - \varepsilon_0/2$. Полагая в (2.27) $\varepsilon = \varepsilon_1$, мы приходим к выводу, что при достаточно больших n $\tilde{\lambda}_n(A)$ не может находиться в кольце $1 \leqslant |z| \leqslant e^{h_n}$, если $\lambda_n(A) \leqslant 1 - \varepsilon_0/2$.

Если же $\lambda_n(A) \geqslant 1 - \varepsilon_0/2$, то существует ε_2 такое, что $\lambda_n(A)$ не может лежать в области $1 - \varepsilon_0/2 \leqslant |z| \leqslant e^{h_n}$, $|\arg z| < \varepsilon_2$, и, следовательно, в кольце $1 \leqslant |z| \leqslant e^{h_n}$.

Заметим, что $|\lambda_n(A)| > |\lambda_n(A)|$. Поэтому $\tilde{\lambda}_n(A)$ при $A \leqslant 1$ не может находиться в круге $|z| \leqslant e^{h_n}$.

Рассмотрим теперь случай $A \geqslant 1$. Положим $m = \inf_{1\leqslant A\leqslant\rho} \inf_{z\in V(A)} |1 - Af(z)|$, где $V(A) = \{z : |z| \leqslant 1,\ |z - \lambda(A)| \geqslant \varepsilon_0/2\}$. Нетрудно видеть, что $m > 0$, поскольку в противном случае существует такое $1 \leqslant A_0 \leqslant \rho$, что $A_0 f(z_0) = 1$, где $z_0 \neq \lambda(A)$, $|z_0| \leqslant 1$. При достаточно больших n и $|z| \leqslant 1$ $|f_n(z) - f(z)| < m/2\rho$ и, следовательно, $|\tilde{\lambda}_n(A) - \lambda(A)| < \varepsilon_0/2$ одновременно для всех $1 \leqslant A \leqslant \rho$. В силу (2.16) $\lambda_n(A) - \lambda(A) < \varepsilon_0/2$ при достаточно больших n. С другой стороны, $\tilde{\lambda}_n(A) \notin \{z : |z - \lambda_n(A)| < \varepsilon_0\}$. Следовательно, $|\tilde{\lambda}_n(A) - \lambda(A)| > \varepsilon_0/2$. Таким образом, $\tilde{\lambda}_n(A) \notin \{z : |z| \leqslant e^{h_n}\}$ и при $1 \leqslant A \leqslant \rho$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что c, участвующее в определении h_n, выбрано так, что $\lambda_n(A)$ при достаточно больших n содержится в круге $|z| < e^{h_n - 1/n}$.

Пусть γ_n — окружность радиуса $r_n = e^{h_n}$. Нетрудно видеть, что при достаточно больших n

$$u_k = \frac{\lambda_n^{-k-1}(A)}{Af_n'(\lambda_n(A))} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{z^{-k-1}}{1 - Af_n(z)}\,dz, \quad k \leqslant n. \tag{2.28}$$

Очевидно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{z^{-k-1}\,dz}{1 - Af_n(z)} = \frac{1}{2\pi r_n^k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikt}\,dt}{1 - Af_n(r_n e^{it})}. \tag{2.29}$$

В силу (2.6)

$$f_n(r_n) - f_n(\lambda_n(A)) - \mu(r_n - \lambda_n(A)) = o(r_n - \lambda_n(A)) \tag{2.30}$$

равномерно по $A \in \mathfrak{U}_n$. Положим

$$f_{n1}(z) = \int\limits_{0-}^{1/h_n} z^x\,dF(x), \qquad f_{n2}(z) = \int\limits_{1/h_n}^{n} z^x\,dF(x),$$

$$\varphi_n(z) = A(f_{n1}(z) - f_{n1}(r_n) - f_{n1}'(r_n)(z - r_n)),$$

$$\psi_n(z) = 1 - Af_{n1}(r_n) - Af_{n1}'(r_n)(z - r_n).$$

Имеет место тождество

$$\frac{1}{1 - Af_n(z)} - \frac{1}{\psi_n(z)} = \frac{\varphi_n(z) + Af_{n2}(z)}{(1 - Af_n(z))\psi_n(z)}. \tag{2.31}$$

Пусть $\gamma_n(\varepsilon) = \gamma_n \cap U_n(\varepsilon)$, $\bar{\gamma}_n(\varepsilon)$ — дополнение $\gamma_n(\varepsilon)$ до γ_n. Вследствие (2.31)

$$\int\limits_{\gamma_n} \frac{z^{-k-1}dz}{1 - Af_n(z)} = \sum_{j=1}^{4} I_j(n, \varepsilon, k), \tag{2.32}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{\gamma_n} \psi_n^{-1}(z)\,z^{-k-1}\,dz, \quad I_2 = \int\limits_{\gamma_n(\varepsilon)} \frac{\varphi_n(z) + Af_{n2}(z)}{\psi_n(z)(1 - Af_n(z))\,z^{k+1}}\,dz,$$

$$I_3 = -\int\limits_{\bar{\gamma}_n(\varepsilon)} \psi_n^{-1}(z)\,z^{-k-1}\,dz, \qquad I_4 = \int\limits_{\bar{\gamma}_n(\varepsilon)} \frac{z^{-k-1}}{1 - Af_n(z)}\,dz.$$

Заметим, что при $|b| < c^2|a|$

$$\int\limits_{|z|=c^2} \frac{z^{-n}\,dz}{az + b} = 0, \qquad n > 0.$$

В силу (2.8) и (2.30) при достаточно больших n $1 - Af_{n1}(r_n) < 0$. С другой стороны, $1 - Af_{n1}(r_n) + Af_{n1}'(r_n)r_n \geqslant 1 - Af_0$. Учитывая все сказанное, нетрудно видеть, что $I_1 = 0$ при достаточно больших n.

Обратимся теперь к I_2. Оценим сначала вариацию $\varphi_n(z)/(1 - Af_n(z)) \cdot \psi_n(z)$ на $\gamma_n(\varepsilon)$, определив последнюю как сумму вариаций действительной и мнимой частей. Несложные рассуждения приводят к оценке

$$\operatorname*{Var}_{z \in \gamma_n(\varepsilon)} \frac{\varphi_n(z)}{(1 - Af_n(z))\psi_n(z)} \leqslant \sqrt{2}\int\limits_{\gamma_n(\varepsilon)} \left(\left| \frac{\psi_n'(z)\varphi_n(z)}{(1 - Af_n(z))\psi_n^2(z)} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{Af_n'(z)\varphi_n(z)}{(1 - Af_n(z))^2\psi_n(z)} \right| + \left| \frac{\varphi_n'(z)}{(1 - Af_n(z))\psi_n(z)} \right| \right) dl, \tag{2.33}$$

где dl — дифференциал дуги $\gamma_n(\varepsilon)$. В самом деле, положим $\omega_n(z) = \varphi_n(z)/(1-Af_n(z))\psi_n(z)$. Очевидно,

$$\left(\left|\frac{d}{dl}\operatorname{Re}\omega_n(z)\right|+\left|\frac{d}{dl}\operatorname{Im}\omega_n(z)\right|\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\left|\frac{d}{dl}\operatorname{Re}\omega_n(z)\right|^2+\left|\frac{d}{dl}\operatorname{Im}\omega_n(z)\right|^2\right)=2\left|\frac{d}{dz}\omega_n(z)\right|^2.$$

С другой стороны,

$$\operatorname*{Var}_{z\in\gamma_n(\varepsilon)}\omega_n(z)\leqslant\int_{\gamma_n(\varepsilon)}\left(\left|\frac{d}{dl}\operatorname{Re}\omega_n(z)\right|+\left|\frac{d}{dl}\operatorname{Im}\omega_n(z)\right|\right)dl.$$

Из этих двух неравенств легко следует (2.33).

Далее,

$$|1-Af_n(z)|^2=|1-Af_n(r_n)|^2+A^2|f_n(r_n)-f_n(z)|^2+$$
$$+2A(1-Af_n(r_n))\operatorname{Re}(f_n(r_n)-f_n(z)).$$

Вследствие (2.6) существуют ε_1 и n_1 такие, что при $n>n_1$

$$|f_n(z)-f_n(r_n)-\mu(z-r_n)|<\frac{\mu}{16}|z-r_n|$$

для $z\in U_n(\varepsilon_1)$. С другой стороны, при достаточно малых ε $|\operatorname{Re}(z-r_n)|<$ $<|z-r_n|^2$ для $z\in\gamma_n(\varepsilon)$. Поэтому существует ε_2 такое, что для $z\in\gamma_n(\varepsilon_2)$, $n>n_1$,

$$|1-Af_n(z)|^2>|1-Af_n(r_n)|^2+$$
$$+A^2|f_n(r_n)-f_n(z)|-\frac{A\mu}{4}|z-r_n||1-Af_n(r_n)|.$$

Но при достаточно малых ε

$$|f_n(z)-f_n(r_n)|^2>\frac{3\mu^2}{4}|z-r_n|^2,\qquad z\in\gamma_n(\varepsilon).$$

Следовательно, существуют n_0 и ε_0 такие, что при $z\in\gamma_n(\varepsilon_0)$, $n>n_0$,

$$|1-Af_n(z)|>\frac{1}{2}|1-Af_n(r_n)|+\frac{A\mu}{4}|z-r_n|. \tag{2.34}$$

В дальнейшем мы будем считать, что n_0 и ε_0 выбраны так, что при $z\in\gamma_n(\varepsilon_0)$, $n>n_0$, выполняется неравенство

$$|\psi_n(z)|>\frac{1}{2}|1-Af_{n1}(r_n)|+\frac{A\mu}{4}|z-r_n|, \tag{2.35}$$

которое доказывается аналогично неравенству (2.34).

Заметим, что вследствие (2.5)

$$f_{n2}(r_n)=o(n^{-1}). \tag{2.36}$$

При достаточно больших n

$$r_n-\lambda_n(A)>{}^3/_4n \tag{2.37}$$

и, следовательно, в силу (2.30)

$$Af_n(r_n) - 1 > A\mu / 2n. \tag{2.38}$$

Кроме того, из (2.30), (2.37) и (2.36) следует, что при достаточно больших n

$$Af_{n1}(r_n) - 1 > A\mu / 2n. \tag{2.39}$$

Далее,

$$|f''_{n1}(z)| < eM_2, \quad s \geqslant 2, \qquad |f''_{n1}(z)| < eM_s n^{2-s}, \quad 1 < s < 2. \tag{2.40}$$

Поэтому

$$\varphi_n(z) = O(|z - r_n|^2 n^{\max(0,\, 2-s)}), \tag{2.41}$$

$$\varphi_n'(z) = O(|z - r_n| n^{\max(0,\, 2-s)}). \tag{2.42}$$

Из (2.34) — (2.36), (2.38) и (2.39) выводим, что

$$\int\limits_{|t|<\varepsilon_0} \frac{|f_{n2}(r_n e^{it})|\,dt}{\psi_n(r_n e^{it})(1 - Af_n(r_n e^{it}))} = o\left(\frac{1}{n}\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{(n^{-1}+t)^2}\right) = o(1) \tag{2.43}$$

равномерно относительно $A = \mathfrak{U}_n$. Аналогично, на этот раз с учетом (2.41) и (2.42), получаем, полагая $\nu(s) = \max(-1, 1-s)$,

$$n^{-1}\int\limits_{\gamma_n(\varepsilon_0)} \left|\frac{\psi_n'(z)\varphi_n(z)}{(1 - Af_n(z))\psi_n^2(z)}\right| dl = O\left(n^{\nu(s)}\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{t^2\,dt}{(n^{-1}+t)^3}\right) = O(n^{\nu(s)}\ln n),$$

$$n^{-1}\int\limits_{\gamma_n(\varepsilon_0)} \frac{|f_n'(z)\varphi_n(z)|\,dl}{|\psi_n^2(z)(1 - Af_n(z))|} = O\left(n^{\nu(s)}\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{t^2\,dt}{(n^{-1}+t)^3}\right) = O(n^{\nu(s)}\ln n), \tag{2.44}$$

$$n^{-1}\int\limits_{\gamma_n(\varepsilon_0)} \frac{|\varphi_n'(z)|\,dl}{|(1 - Af_n(z))\psi_n(z)|} = O\left(n^{\nu(s)}\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{t\,dt}{(n^{-1}+t)^2}\right) = O(n^{\nu(s)}\ln n).$$

Из (2.33) и (2.44), используя известную оценку для коэффициентов Фурье, выводим

$$\int\limits_{|t|<\varepsilon_0} \frac{\varphi_n(r_n e^{it})e^{-int}\,dt}{(1 - Af_n(r_n e^{it}))\psi_n(r_n e^{it})} = O(n^{\nu(s)}\ln n) = o(1). \tag{2.45}$$

Аналогичным образом получаются оценки

$$\begin{gathered} \int\limits_{\varepsilon_0\leqslant|t|\leqslant\pi} \frac{e^{-int}\,dt}{1 - Af_n(r_n e^{it})} = O\left(\frac{1}{n}\right), \\ \int\limits_{\varepsilon_0\leqslant|t|\leqslant\pi} \frac{e^{-int}\,dt}{\psi_n(r_n e^{it})} = O\left(\frac{1}{n}\right). \end{gathered} \tag{2.46}$$

Из (2.28), (2.29), (2.32), (2.43), (2.45), (2.46) и равенства $I_1 = 0$ следует, что (1.2) справедливо равномерно по $A \in \mathfrak{U}_n$. Для доказательства второй части теоремы воспользуемся неравенством

$$|f_n'(\lambda_n(A)) - f'(\lambda(A))| < \int\limits_0^n |\lambda_n^x(A) - \lambda^x(A)|\,x\,dF(x) +$$

$$+\int_n^\infty x\lambda^x(A)\,dF(x) < (\lambda_n^{n-1}(A)+1)(\lambda_n(A)-\lambda(A))\int_0^n x^2\,dF(x) +$$
$$+\lambda^n(A)\int_n^\infty x\,dF(x). \tag{2.47}$$

В силу (2.16) при $1 \leqslant A \leqslant \rho$

$$\lambda_n^n(A) = O(1). \tag{2.48}$$

Далее,

$$\int_0^n x^2\,dF(x) = o(n). \tag{2.49}$$

Из (2.47) — (2.49), используя опять (2.16), выводим

$$f_n'(\lambda_n(A)) - f'(\lambda(A)) = o(\lambda^n(A)\,/\,n^{s-1}). \tag{2.50}$$

С другой стороны, вследствие (2.16)

$$\lambda_n^{-n}(A) - \lambda^{-n}(A) = o(1\,/\,n^{s-1}). \tag{2.51}$$

Из (1.2) и оценок (2.50) и (2.51) легко следует (1.4).

Теорема 1 теперь полностью доказана.

§ 3. Доказательство теорем 2 и 3

Положим $F^{(y)}(x) = F(x)$ при $x \leqslant y$, $F^{(y)}(x) = F(y)$ при $x > y$ и

$$H_y(x, A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k F_k^{(y)}(x),$$

где $F_k^{(y)}(x)$ обозначает k-кратную свертку функции $F^{(y)}(x)$. При $x \leqslant y$, $l > 0$

$$H(x,A) - H(x-l,A) = H_y(x,A) - H_y(x-l,A). \tag{3.1}$$

Положим

$$F_{1y}(x) = \int_{A_x \cap(-\infty,\, y)} d\bar{F}_1(u),$$

где $A_x = \{u\colon \bar{F}_1'(u) < \bar{L} < \infty,\ u \leqslant \min(x, M)\}$, $M < \infty$ и $\bar{L}$ выбираются таким образом, чтобы $F_{1M}(\infty) > {}^1/_2\bar{F}_1(\infty)$. Пусть, далее, $F_{2y}(x) = F^{(y)}(x) - F_{1y}(x)$ и $g_{iy}(z) = \int_{0-}^{\infty} e^{zx}dF_{iy}(x)$, $i = 1, 2$. Легко проверить следующее тождество:

$$\frac{1}{1-Ag_y(z)} = \frac{Ag_{1y}(z)}{(1-Ag_y(z))(1-Ag_{2y}(z))} + \frac{1}{1-Ag_{2y}(z)}. \tag{3.2}$$

Если y и $y-l$ являются точками непрерывности $H_y(u, A)$, то при $\sigma = \operatorname{Re} z < \Lambda_y(A)$

$$H_y(y, A) - H_y(y-l, A) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{e^{-z(y-l)}-e^{-zy}}{z(1-Ag_y(z))}\,dz. \tag{3.3}$$

Действительно, нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{0-}^{\infty} (H_y(x, A) - H_y(x-l, A))\, e^{zx}\, dx = e^{zl} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (H_y(x+l, A) -$$

$$- H_y(x, A))\, e^{zx}\, dx = \frac{e^{zl}-1}{z(1 - Ag_y(z))}, \quad \operatorname{Re} z < \Lambda_y(A).$$

Для того чтобы получить (3.3), остается применить формулу обращения для интеграла Лапласа (см., например, [6], теорема 7.6а).

Нетрудно видеть, что точка непрерывности $H(x, A)$ является в то же время точкой непрерывности $H_y(x, A)$, если $x \leqslant y$. Поэтому (3.3) справедливо, если $y - l$ и y являются точками непрерывности $H(u, A)$.

При достаточно больших y $\Lambda_y(A) < [(s-1)\ln y + c_1] / y$, где $c_1 > > 0$ — некоторая постоянная. Доказывается это точно так же, как соответствующее утверждение для $\lambda_n(A)$ в решетчатом случае (см. доказательство теоремы 1).

Кроме того, при достаточно больших y $\Lambda_y(A)$ является единственным корнем уравнения $Ag_y(z) = 1$ в полосе $\operatorname{Re} z \leqslant [(s-1)\ln y + c] / y$ одновременно для всех допустимых значений A, где $c > c_1$ — некоторая постоянная.

При доказательстве этого утверждения нужно учесть, что при любом $\varepsilon > 0$ и $t \to \infty$

$$g_{1y}(\sigma + it) = \int\limits_{0-}^{M} e^{(\sigma+it)x}\, dF_{1M}(x) \to 0, \qquad y > M,$$

равномерно относительно $\sigma \leqslant \varepsilon$. Поскольку $g_y(z) = g_{1y}(z) + g_{2y}(z)$ и, кроме того,

$$|g_{2y}(z)| \leqslant \left|\int\limits_{0}^{\infty} e^{zx} dF_{2\infty}(x)\right| < \gamma = 1 - {}^1\!/_2\bar{F}_1(\infty) \tag{3.4}$$

для $\operatorname{Re} z \leqslant 0$, то найдутся δ_0, Y_0 и K_0 такие, что

$$\inf_{\substack{\operatorname{Re} z \leqslant \sigma(y) \\ |\operatorname{Im} z| > K_0}} |1 - Ag_y(z)| > \delta_0, \qquad \sigma(y) = [(s-1)\ln y + c] / y,$$

одновременно для всех $y > Y_0$ и $A \leqslant \gamma^{-1}$. При переходе от $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ к $\operatorname{Re} z \leqslant \sigma(y)$ нужно воспользоваться (2.5).

С другой стороны, существует $K_1 < 0$ такое, что

$$\inf_{y} \inf_{A < \gamma^{-1}} \inf_{\operatorname{Re} z < K_1} |1 - Ag_y(z)| > 0.$$

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы установить единственность $\Lambda_y(A)$ в прямоугольнике $K_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant [(s-1)\ln y + c] / y$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant K_0$. Этот факт доказывается точно так же, как единственность $\lambda_n(A)$ в круге $|z| \leqslant e^{h_n}$. Редукция к прямоугольнику нужна потому, что при выводе единственности используется компактность.

Заметим, что вследствие (3.4) и (2.5) $|1 - Ag_{2y}(z)| > \delta_0 > 0$ при $A \leqslant \gamma^{-1}$ и $\operatorname{Re} z \leqslant [(s-1)\ln y + c] / y$, если y достаточно велико. Отсюда, в частности, вытекает, что $1 - Ag_{2y}(z)$ не имеет в этой области значений A и z нулей.

Применяя теорему о вычетах и тождество (3.2), получаем из (3.3)

$$H_y(y, A) - H_y(y-l, A) = e^{-\Lambda_y(A)y} \frac{e^{\Lambda_y(A)l} - 1}{Ag'(\Lambda_y(A))\Lambda_y(A)} +$$

$$+ \frac{A}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_y} \frac{(e^{-z(y-l)} - e^{-zy}) g_{1y}(z)}{(1 - Ag_y(z))(1 - Ag_{2y}(z))z} dz + \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} \frac{e^{-it(y-l)} - e^{-ity}}{(1 - Ag_{2y}(it))\, it} dt, \tag{3.5}$$

где Γ_y — прямая $\operatorname{Re} z = [(s-1)\ln y + c]/y$.

Пусть $\Gamma_y(\varepsilon) = \{z\colon z \in \Gamma_y, |\operatorname{Im} z| < \varepsilon\}$, $\overline{\Gamma}_y(\varepsilon) = \Gamma_y - \Gamma_y(\varepsilon)$. Очевидно,

$$\int\limits_{|t|\geqslant\varepsilon} \left|\frac{g_{1y}(\sigma + it)}{t}\right|^2 dt \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{|t|\geqslant\varepsilon} |g_{1y}(\sigma + it)|^2 dt + \frac{1}{\varepsilon}. \tag{3.6}$$

Далее,

$$\int\limits_{|t|\geqslant\varepsilon} |g_{1y}(\sigma + it)|^2 dt \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{1y}'^2(x) e^{2\sigma x} dx \leqslant \overline{L} e^{2\sigma M}. \tag{3.7}$$

Используя (3.6) и (3.7), а также аналогичные оценки для $g_{1y}'(z)$, нетрудно показать, что

$$\left| \int\limits_{\overline{\Gamma}_y(\varepsilon)} \frac{(e^{-zy} - e^{-z(y-l)}) g_{1y}(z)}{(1 - Ag_y(z))(1 - Ag_{2y}(z))z} dz \right| <$$

$$< \frac{K}{y^s} \left| \int\limits_{\overline{\Gamma}_y(\varepsilon)} \left| \frac{d}{dz} \frac{g_{1y}(z)(e^{zl} - 1)}{(1 - Ag_y(z))(1 - Ag_{2y}(z))z} \right| dz \right| < \frac{C(\varepsilon, L)}{y^s} \tag{3.8}$$

равномерно относительно $0 \leqslant l \leqslant L$. Здесь K — абсолютная постоянная. При выводе (3.8) нужно также учесть, что $g_y'(\sigma) < Q < \infty$ для $\sigma \leqslant [(s-1)\ln y + c]/y$ (ср. (2.23)). С другой стороны, рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при выводе (2.45), показывают, что при достаточно малых ε

$$\int\limits_{\Gamma_y(\varepsilon)} \frac{(e^{-z(y-l)} - e^{-zy}) g_{1y}(z)\, dz}{(1 - Ag_y(z))(1 - Ag_{2y}(z))z} = o\left(\frac{1}{y^{s-1}}\right) \tag{3.9}$$

равномерно относительно l в любом конечном промежутке $0 \leqslant l \leqslant L$.

Остается оценить

$$I = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} \frac{e^{-it(y-l)} - e^{-ity}}{(1 - Ag_{2y}(it))\, it} dt.$$

Нетрудно видеть, что при $y - l > 0$

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} A^k (F_{2,k}^{(y)}(y) - F_{2,k}^{(y)}(y-l)), \tag{3.10}$$

где $F_{2,k}^{(y)}(x)$ обозначает k-кратную свертку $F_{2y}(x)$. Очевидно,

$$F_{2,k}^{(y)}(y)-F_{2,k}^{(y)}(y-l)\leqslant(y-l)^{-s}\int_{-\infty}^{\infty}u^s dF_{2,k}(u). \tag{3.11}$$

Положим $\overline{F}_2^{(y)}(x)=F_{2y}(x)\,/\,F_{2y}(\infty)$. Пусть $\overline{F}_{2,k}^{(y)}(x)$ обозначает k-кратную свертку $\overline{F}_2^{(y)}(x)$. Пользуясь этими обозначениями, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^s dF_{2,k}^{(y)}(x)=F_{2y}^k(\infty)\int_{-\infty}^{\infty}x^s d\overline{F}_{2,k}^{(y)}(x)<$$

$$<k^sF_{2y}^k(\infty)\int_{-\infty}^{\infty}x^s d\overline{F}_2^{(y)}(x)<k^sM_sF_{2y}^{k-1}(\infty). \tag{3.12}$$

Из (3.10) — (3.12) следует оценка

$$I\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^sM_s}{(y-l)^s}A^k\delta^{k-1}, \tag{3.13}$$

где $\delta=F_{2\infty}(\infty)$.

Асимптотическое представление (1.6) в случае, когда y и $y-l$ являются точками непрерывности $H(u,A)$, теперь легко получить из (3.1) и (3.5), если воспользоваться оценками (3.8), (3.9) и (3.13). Если хотя бы одна из точек y и $y-l$ не является точкой непрерывности $H(u,A)$, то выберем последовательность $y_n\uparrow y$ так, что каждая из точек y_n и y_n-l является точкой непрерывности $H(u,A)$. Нетрудно видеть, что

$$\lim_{y_n\uparrow y}g_{y_n}(z)=g_y(z),\qquad \lim_{y_n\uparrow y}g'_{y_n}(z)=g'_y(z).$$

Следовательно,

$$\lim_{y_n\uparrow y}\Lambda_{y_n}(A)=\Lambda_y(A)\ \text{ и }\ \lim_{y_n\uparrow y}g'_{y_n}(\Lambda_{y_n}(A))=g'_y(\Lambda_y(A)).$$

С другой стороны,

$$\lim_{y_n\uparrow y}(H(y_n,A)-H(y_n-l,A))=H(y,A)-H(y-l,A).$$

Из всего сказанного мы заключаем, что для пары y, $y-l$ справедливо асимптотическое представление (1.6). Переход от (1.6) к (1.7) осуществляется так же, как переход от (1.2) к (1.4) в доказательстве теоремы 1.

Приступим теперь к доказательству теоремы 3. Прежде всего,

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}}\,|g(\sigma+it)|\leqslant g_2(\sigma),$$

причём для любых h и $\varepsilon>0$ существует $K>0$ такое, что $|g(\sigma+it)|<g_2(\sigma)+\varepsilon$ для всех $0\leqslant\sigma\leqslant h$ и $|t|>K$.

Следовательно, найдется K_0 такое, что

$$\inf_{|t|>K_0}|Ag(\sigma+it)-1|>\delta>0 \tag{3.14}$$

одновременно для всех $0\leqslant\sigma\leqslant h_1$ и $A\leqslant1$, где δ зависит от K_0.

С другой стороны,

$$\inf_{|t|<K_0} |Ag(h_1+it)-1| > \delta_1 > 0 \tag{3.15}$$

одновременно для всех $g^{-1}(h_1)+\varepsilon \leqslant A \leqslant 1$, поскольку в противном случае найдутся $g^{-1}(h_1)+\varepsilon \leqslant A_0 \leqslant 1$ и $t_0 \neq 0$ такие, что $A_0 g(h_1+it_0)=1$, а это противоречит условию теоремы.

Выберем теперь M и $\bar{L}$, участвующие в определении $F_{1y}(x)$ так, чтобы $g_{2M}(h_1)<1$. Тогда при $A \leqslant 1$

$$\inf_{\operatorname{Re} z \leqslant h_1} |Ag_{2M}(z)-1| > \delta_2 > 0. \tag{3.16}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $Ag_{2M}(z)-1$ не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leqslant h_1$.

Нетрудно видеть, что

$$H(x, A)-H(x-l, A)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{e^{-z(x-l)}-e^{-zx}}{z(1-Ag(z))}dz, \quad A\leqslant 1,$$

если $\sigma<0$ и $x-l$ и x являются точками непрерывности $H(u, A)$.

Применяя теорему о вычетах и тождество (3.2), имеем

$$\begin{aligned} H(x, A)-H(x-l, A) &= \frac{e^{-\Lambda(A)x}(e^{\Lambda(A)l}-1)}{Ag'(\Lambda(A))\Lambda(A)}+ \\ &+\frac{A}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} z=h_1}\frac{(e^{-z(x-l)}-e^{-zx})g_{1M}(z)\,dz}{(1-Ag_M(z))(1-Ag_{2M}(z))z}+ \\ &+\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-it(x-l)}-e^{-itx}}{(1-Ag_{2M}(it))\,it}dt. \end{aligned} \tag{3.17}$$

В силу (3.6), (3.7) и (3.14) — (3.16)

$$\int_{\operatorname{Re} z=h_1}\frac{(e^{-z(x-l)}-e^{-zx})g_{1M}(z)\,dz}{(1-Ag_M(z))(1-Ag_{2M}(z))z}=O(e^{-h_1x}) \tag{3.18}$$

равномерно относительно $g^{-1}(h_1)+\varepsilon \leqslant A \leqslant 1$.

Далее (ср. (3.10)),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-it(x-l)}-e^{-itx}}{it(1-Ag_{2M}(it))}dt= \\ &=\sum_{k=1}^{\infty}A^k(F_{2,k}^{(M)}(x)-F_{2,k}^{(M)}(x-l))\leqslant e^{h_1(l-x)}\times \\ &\times\sum_{k=1}^{\infty}A^k\int_{-\infty}^{\infty}e^{h_1y}\,dF_{2,k}^{(M)}(y)=e^{h_1(l-x)}\sum_{k=1}^{\infty}A^k g_{2M}^k(h_1), \quad x-l>0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Из (3.17) — (3.19) следует утверждение теоремы 3 в случае, когда x и $x-l$ обе являются точками непрерывности $H(u, A)$. Переход к произвольным x и $x-l$ осуществляется так же, как при доказательстве теоремы 2.

Поступила в редакцию
7.3.67

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. О. Гельфонд, Оценка остаточного члена в предельной теореме для рекуррентных событий, Теория вероят. и ее примен., IX, 2 (1964), 327—331.
[2] А. А. Боровков, Замечания к теоремам Винера и Блекуэлла, Теория вероят. и ее примен., IX, 2 (1964), 331—343.
[3] Т. Е. Харрис, Теория ветвящихся случайных процессов, М., Изд-во «Мир», 1966.
[4] В. П. Чистяков, Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам, Теория вероят. и ее примен., IX, 4 (1964), 710—718.
[5] С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероят. и ее примен., X, 2 (1965), 231—254.
[6] D. V. Widder, The Laplace transform, Princeton, 1946.
[7] C. Stone, On characteristic functions and renewal theory, Trans. Amer. Math. Soc., 120, 2 (1965), 327—342.

SOME RENEWAL THEOREMS

S. V. NAGAEV (TASHKENT)

(Summary)

Let $F(x)$ be a distribution function with $F(0)=0$ and

$$H(x,A)=\sum_{k=0}^{\infty} A^k F_k(x), \quad A>0,$$

where $F_k(x)$, $k \geqslant 1$, is the k-th convolution of $F(x)$ and $F_0(x)$ is the degenerate distribution function with the unit jump at $x=0$.

In the paper the asymptotic behaviour of $H(x, A)-H(x-l, A)$ is studied. The dominant term and an estimate for the remainder are obtained, $F(x)$ being assumed 1) to be of the lattice type or to have a non-zero absolutely continuous component and 2) to have a finite number of moments or to satisty well-known Cramér's condition.
