ЎзССР ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИНИНГ АХБОРОТИ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК УзССР

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Отдельный оттиск

3

1957

С. В. НАГАЕВ

О ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СВЯЗАННЫХ В ПРОСТУЮ ОДНОРОДНУЮ ЦЕПЬ МАРКОВА СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Пусть $\{\xi_k\}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ — последовательность случайных величин, связанных в простую однородную цепь Маркова со счетным множеством возможных состояний, образующих один существенный класс, состоящий из одного подкласса, причем ξ_k принимает значения вида

$$a + k_j h = x_j,$$

где k_j — целое число, $j=\overline{1,\infty}$.

Введем обозначения

$$P\left(\xi_k = x_j \,/\, \xi_{k-1} = x_i\right) = p_{ij},$$

$$P(\xi_0 = x_j) = p_j.$$

Пусть далее

$p_{j1} > \lambda > 0$ для всех j. Тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} E\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}(\xi_k - E\xi^k)\right]^2\right\} = \sigma^2, \tag{1}$$

при условии, что p_j являются финальными вероятностями для однородной цепи с вероятностями перехода p_{ij} [2].

Если $\sigma^2 > 0$ и $E|\xi_0|^{2+\delta} < \infty$ (математическое ожидание вычисляется относительно финальных вероятностей, а $\delta > 0$), то при любом начальном распределении π [2]

$$\lim_{n\to\infty} P_\pi\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}(\xi_k - E\xi_k) \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du. \tag{2}$$

Обозначим через $P_n(k)$ вероятность равенства

$$S_n = (n+1)a + kh,$$

где

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\xi_k.$$

Пусть

$$z_{nk}=\frac{an+kh-A_n}{\sigma\sqrt{n}},$$

где A_n — математическое ожидание S_n.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если выполнено условие (1), то, для того чтобы равномерно относительно k $(-\infty<k<\infty)$ при $n\to\infty$ выполнялось соотношение*

$$\frac{B_n}{h}P_n(k)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_{nk}^2}{2}}\to 0, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы общий наибольший делитель разностей $\frac{x_i-x_j}{h}$ был равен 1.

Необходимость условия теоремы доказывается так же, как в случае независимых случайных величин [1].

Доказательство. При доказательстве достаточности условия теоремы для независимых одинаково распределенных случайных величин, помимо справедливости интегральной предельной теоремы, существенным образом используются следующие два неравенства.

Во-первых, каково бы ни было малое положительное число ε, найдется такая постоянная $c>0$, что

$$|f_n(\Theta)|<e^{-cn},$$

если (4)

$$\varepsilon\leqslant|\Theta|\leqslant\frac{2\pi}{h}-\varepsilon,$$

где $f_n(\Theta)$ — характеристическая функция суммы $S_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ независимых решетчатых одинаково распределенных случайных величин, h — максимальный шаг распределения ξ_i.

Во-вторых,

$$\left|f_n\left(\frac{\Theta}{\sqrt{B_n}}\right)\right|<e^{-\frac{\Theta^2}{4}} \tag{5}$$

при достаточно малых по абсолютной величине Θ.

Мы покажем, что в условиях нашей теоремы имеют место соотношения, аналогичные (4) и (5).

Пусть

$$P(\Theta)=\begin{pmatrix} p_{11}e^{i\Theta x_1} & \ldots & p_{1n}e^{i\Theta x_n}\\ p_{21}e^{i\Theta x_1} & \ldots & p_{2n}e^{i\Theta x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{n1}e^{i\Theta x_1} & \ldots & p_{nn}e^{i\Theta x_n}\end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $P^m(\Theta)$ обозначим через

$$p_{ij}^{(m)}(\Theta).$$

Очевидно

$$p_{ij}^{(2)}(\Theta) = \sum_{\kappa} p_{i\kappa} p_{\kappa j} e^{i\Theta(x_\kappa + x_j)} \tag{6}$$

и

$$p_{ij}^{(2)}(0) = p_{ij}^{(2)},$$

где $p_{ij}^{(2)}$ — вероятность $p\left(\xi_n = x_j \,/\, \xi_{n-2} = x_i\right)$.

Пусть далее

$$\varphi_i(\Theta) = \sum_j p_{ij} e^{i\Theta x_j},$$

$$\varphi_{ij}^{(2)}(\Theta) = \frac{1}{p_{ij}^{(2)}} \sum_{\kappa} p_{i\kappa} p_{\kappa j} e^{i\Theta x_\kappa} = \frac{p_{ij}^{(2)}(\Theta)}{p_{ij}^{(2)}} e^{-i\Theta x_j}, \tag{7}$$

если

$$p_{ij}^{(2)} > 0. \tag{8}$$

Случайные величины, соответствующие $\varphi_i(\Theta)$ и $\varphi_{ij}^{(2)}(\Theta)$, обозначим через

$$\eta_i \quad \text{и} \quad \eta_{ij}.$$

η_i, очевидно, принимает значения x_j с вероятностями соответственно p_{ij} (разумеется, часть p_{ij} может обращаться в 0).

Аналогично η_{ij} может принимать значения x_κ с вероятностями соответственно

$$\frac{p_{i\kappa}\, p_{\kappa j}}{p_{ij}^{(2)}}.$$

Фиксируем какой-либо индекс

$$k = k_0.$$

Тогда

$$\left|p_{i1}^{(q+2)}(\Theta)\right| = \left|\sum_{k} p_{i\kappa}^{(q)}(\Theta)\, p_{\kappa 1}^{(2)}(\Theta)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\kappa \neq k_0} p_{i\kappa}^{(q)} p_{\kappa 1}^{(2)} + p_{i\kappa_0}^{(q)} \left|p_{k_0 1}^{(2)}(\Theta)\right|, \tag{9}$$

$$\sum_{\mu} \left| p_{i\mu}^{(q+2)}(\Theta) \right| \leqslant \sum_{\mu \neq 1} p_{i\mu}^{(q+2)} + \left| p_{i1}^{(q+2)}(\Theta) \right| \leqslant \sum_{\mu \neq 1} p_{i\mu}^{(q+2)} +$$

$$+ \sum_{\kappa \neq k_0} p_{i\kappa}^{(q)} p_{\kappa 1}^{(2)} + p_{i\kappa_0}^{(q)} \left| p_{\kappa_0 1}^{(2)}(\Theta) \right| = 1 - p_{i\kappa_0}^{(q)} \left(p_{\kappa_0 1}^{(2)} - \left| p_{\kappa_0 1}^{(2)}(\Theta) \right| \right). \tag{10}$$

Пусть максимальный шаг распределения η_i равен h_i. Очевидно, $h_i = d_i\, h$, где d_i — целое число. Общий наибольший делитель d_i ($i =$

$=\overline{1,\infty})$ равен 1, так как он одновременно является делителем всех разностей

$$\frac{x_i - x_j}{h},$$

Из (7) следует, что максимальный шаг h_{i1} распределения η_{i1} равен h_i, поскольку, по условию (1), $p_{\kappa 1} > \lambda$ для всех k.

Следовательно, для любого i, при ε_i достаточно малом, найдется такая постоянная $c_{i\varepsilon}$, что

$$\left|\varphi_{i1}^{(2)}(\Theta)\right| < e^{-c_{i\varepsilon}}, \tag{11}$$

если

$$\frac{2\pi k}{h_i} + \varepsilon \leqslant |\Theta| \leqslant \frac{2\pi(k+1)}{h_i} - \varepsilon.$$

Пусть d_{i_0} — наименьший из d_i. Очевидно,

$$\varphi_{i_0 1}^{(2)}(\Theta_\kappa) = 1,$$

где

$$|\Theta_\kappa| = \frac{2\pi k}{h d_{i_0}}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, d_{i_0}. \tag{12}$$

Фиксируем $k < d_{i_0}$.

Равенство (12) не может выполняться для всех i. В самом деле, если бы это было так, то для всех i имело бы место равенство

$$\frac{k_i}{d_{i_0}} = \frac{p}{q}, \tag{12'}$$

где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь.

Из (12') следует, что

$$d_i = c_i\, q$$

для всех i (c_i и $q > 1$ — целые числа), а это противоречит тому, что общий наибольший делитель d_i равен 1.

Таким образом, для любого Θ_κ можно указать такое i_κ, что

$$\frac{2\pi\mu_k}{h_{i_\kappa}} < |\Theta_\kappa| < \frac{2\pi(\mu_{\kappa+1}+1)}{h_{i_\kappa}},$$

и, следовательно, при достаточно малом ε_1

$$\frac{2\pi\mu_\kappa}{h_{i_\kappa}} + \varepsilon_1 \leqslant \Theta_\kappa \leqslant \frac{2\pi(\mu_\kappa + 1)}{h_{i_\kappa}} - \varepsilon_1. \tag{13}$$

Из (11) и (13) выводим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная $c_\varepsilon > 0$, что

$$\min_{i_0, i_\kappa} \left|\varphi_{i1}^{(2)}(\Theta)\right| < e^{-c_\varepsilon}, \tag{14}$$

если

$$\varepsilon \leqslant |\Theta| \leqslant \frac{2\pi}{h} - \varepsilon. \tag{14'}$$

Фиксируем Θ, удовлетворяющее (14′). Согласно (14), найдется i_Θ такое, что

$$\left|\varphi_{i_\Theta 1}(\Theta)\right| < 1 - \lambda_{1\varepsilon},\ \lambda_{1\varepsilon} > 0$$

или

$$\left|p^{(2)}_{i_\Theta 1}(\Theta)\right| < p^{(2)}_{i_\Theta 1} - \lambda_{1\varepsilon} p^{(2)}_{i_\Theta 1}, \tag{15}$$

откуда, в силу условия (1),

$$p^{(2)}_{i_\Theta 1} - \left|p^{(2)}_{i_\Theta 1}(\Theta)\right| > \lambda_\varepsilon, \tag{15'}$$

где $\lambda_\varepsilon = \lambda\lambda_{1\varepsilon}$.

Положим теперь в (10) $k_0 = i_\Theta$. Из условия (1) следует, что финальные вероятности $p_i > 0$ и $\left|p_i - p^{(m)}_{\kappa i}\right| < 2\lambda^m$ для всех i и k. Поэтому найдется такое q, что

$$p^{(q)}_{j i_\Theta} > \gamma \tag{16}$$

для всех j и i_Θ (i_Θ может принимать конечное множество значений $i_0, i_1, \ldots, i_{d_0-1}$)

Из (10), (15) и (16) получаем

$$\sum_\mu \left|p^{(q+2)}_{i\mu}(\Theta)\right| < 1 - \gamma\lambda_\varepsilon = 1 - \delta_\varepsilon. \tag{17}$$

При $\varepsilon > 0$ достаточно малом

$$\left|p^{(2)}_{\kappa_0 1}(\Theta)\right| < p^{(2)}_{\kappa_0 1} - c^2\Theta^2, \tag{18}$$

если $|\Theta| < \varepsilon$,

где c^2 — некоторая постоянная.

Действительно, если обозначить $p^{(2)}_{\kappa_0 1}(\Theta)e^{i\Theta a_{\kappa_0 1}}$ через $p^{(2)*}_{\kappa_0 1}(\Theta)$, то

$$p^{(2)*}_{\kappa_0 1}(\Theta) = p^{(2)}_{\kappa_0 1}(\Theta)\, e^{i\Theta a_{\kappa_0 1}} = p^{(2)}_{\kappa_0 1} - c_1^2\,\Theta^2 + 0(\Theta^2),$$

где

$$a_{\kappa_0 1} = i\,\frac{p'^{(2)}_{\kappa_0 1}(0)}{p^{(2)}_{\kappa_0 1}(0)}$$

и

$$c_1^2 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\Theta^2}\, p^{(2)*}_{\kappa_0 1}(\Theta)\Big|_{\Theta=0}.$$

Нетрудно заметить, что $a_{\kappa_0 1}$ — действительное число. Поэтому при достаточно малых по абсолютной величине Θ

$$\left|p^{(2)}_{\kappa_0 1}(\Theta)\right| = \left|p^{(2)*}_{\kappa_0 1}(\Theta)\right| < p^{(2)}_{\kappa_0 1} - \frac{c_1^2}{2}\Theta^2. \tag{19}$$

Полагая $c^2 = \frac{c_1}{2}$, получаем (18).

Далее

$$P^n(\theta) = \left[P^{(q+2)}(\theta)\right]^{\left[\frac{n}{q+2}\right]} P^m(\theta) \tag{20}$$

$$(1 \leqslant m < q+2).$$

Воспользуемся теперь следующим, почти очевидным, неравенством.

Если $A = A^{[1]}A^{[2]} \ldots A^{[n]}$ — произведение матриц с неотрицательными элементами, то

$$\sum_{\kappa} a_{i\kappa} \leqslant \prod_{j} \left(\max_{i} \sum_{\kappa} a_{i\kappa}^{[j]} \right), \tag{21}$$

где $a_{i\kappa}$ — элементы A, $a_{i\kappa}^{[j]}$ — элементы $A^{[j]}$.

Обозначим через $f_i^{(n)}(\theta)$ характеристическую функцию суммы S_n при условии, что $\xi_0 = x_i$.

Из (19), (20) и (21) выводим

$$\left| f_i^{(n)}(\theta) \right| \leqslant \sum_{\kappa} \left| p_{i\kappa}^{(n)}(\theta) \right| \leqslant e^{-b^2 n \theta^2}, \tag{22}$$

где b^2 — некоторая постоянная, $|\theta| \leqslant \varepsilon$.

Из (17), (20) и (21) следует

$$\left| f_i^{(n)}(\theta) \right| < e^{-c_{1\varepsilon} n}, \tag{23}$$

где $\varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant 2\pi - \varepsilon$, а $c_{1\varepsilon} > 0$ — постоянная, зависящая от ε.

Из (22) получаем

$$\left| f_i^{(n)}\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right| < e^{-\frac{b^2}{\sigma^2}\theta^2}, \qquad |\theta| < \varepsilon. \tag{24}$$

Поскольку

$$\left| f^{(n)}(\theta) \right| \leqslant \max_{i} \left| f_i^{(n)}(\theta) \right|,$$

то получаем окончательно

$$\left| f^{(n)}(\theta) \right| < e^{-c_{1\varepsilon} n}, \quad \text{если} \quad \varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant 2\pi - \varepsilon, \tag{25}$$

и

$$\left| f^{(n)}\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right| < e^{-\frac{b^2}{\sigma^2}\theta^2}, \quad \text{если} \quad |\theta| < \varepsilon. \tag{26}$$

Неравенства (25) и (26), очевидно, вполне аналогичны (4) и (5).

Оставшуюся часть доказательства мы опускаем, поскольку она проводится так же, как в случае независимых случайных величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М., 1949.
2. Doob, I. L. Stochastic Processes New York, 1953.

С. В. НАГАЕВ

МАРҚОВНИНГ БИР ХИЛДАГИ ЗАНЖИРИ БИЛАН ЭҲТИМОЛ ҲОЛАТЛАРНИНГ ҲИСОБЛАЙДИГАН СОНЛАРИ ОРҚАЛИ БОҒЛАНГАН ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР ИЗЧИЛЛИГИНИНГ МАҲАЛЛИЙ (ЛОКАЛЬНЫЙ) ОХИРГИ ТЕОРЕМАСИ ҲАҚИДА

Мақола сарловҳасида кўргазилган ҳолатларда Марковнинг бир хилдаги занжирларини маҳаллий охирги теоремасининг далиллари келтирилган.

Бу теоремани исботлаш учун мустаҳкам тасодифий миқдорнинг изчиллиги ҳолатида тегишли бўлган маҳаллий теоремани исботлашда фойдаланиладиганга ўхшаш бўлган марказий охирги теорема ва характеристик функция учун олинган икки тенгсизликдан фойдаланилади.