УДК 519.21

Асимптотический анализ распределений случайных процессов.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— 196 с.
ISBN 5—02—028625—7.

Сборник посвящен актуальным проблемам современной теории вероятностей и математической статистики. Основное внимание в книге уделено предельным теоремам для функционалов от случайных блужданий, включены также работы по уравнениям в частных производных со случайными коэффициентами.

Издание будет полезно научным работникам, студентам и аспирантам, специализирующимся в области теории вероятностей и ее приложений.

Рецензенты

доктора физико-математических наук
Б. А. Рогозин, А. И. Хисамутдинов

Ответственный за выпуск
кандидат физико-математических наук С. А. Утев

Утверждено к печати Институтом математики СО АН СССР

А $\frac{1602090000-816}{055(02)-89}$ 46—89, **кн. 2**

ISBN 5—02—028625—7

18. **Саханенко А. И.** Оценки скорости сходимости в принципе инвариантности // Докл. АН СССР.— 1974.— Т. 219, № 5.— С. 1076—1078.
19. **Боровков А. А.** Граничные задачи, принцип инвариантности, большие уклонения // Успехи мат. наук, 1983.— Т. 83, № 4.— С. 227—254.
20. **Алешкявичене А. К.** Некоторые предельные теоремы для максимума модуля сумм независимых случайных величин. I // Литовск. мат. сб.— 1981.— Т. 21, № 2.— С. 9—36.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ТИПА БЕРГСТРЕМА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. В. НАГАЕВ, В. И. ЧЕБОТАРЕВ

В настоящей работе исследуется асимптотическое разложение для распределения нормы суммы независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве. В этом разложении вместо традиционных полиномов Чебышева — Эджворта участвуют свертки распределения слагаемых с гауссовским. Соответственно остаточный член зависит только от третьего и четвертого моментов. Это существенно повышает точность аппроксимации, если старшие моменты велики. В конечномерном случае разложение такого типа рассматривалось Бергстремом [1]. Отметим, что полученная нами оценка остаточного члена является новой даже в одномерном случае. Практическое значение разложения типа Бергстрема должным образом еще не оценено.

Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство с нормой $|\cdot|$ и скалярным произведением $(\cdot\,,\,\cdot)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в H, $\mathbf{E}X_1 = 0$, T — ковариационный оператор $X_1, F_n(r) = \mathbf{P}\left(\left|n^{-1/2}\sum_1^n X_j\right|^2 < r\right)$, Y_1 — гауссовская случайная величина со значениями в H и тем же самым ковариационным оператором, $\mathbf{E}Y_1 = 0$, $G(r) = \mathbf{P}(|Y_1|^2 < r)$, F и Φ — распределения X_1 и Y_1 соответственно, $\beta_\mu = \mathbf{E}|X_1|^\mu$, $m_n = [n/4] + 1$, $\bar\beta_\mu = \mathbf{E}(|X_1|^\mu;\ |X_1| \leqslant \sigma\sqrt{m_n})$.

В нашем случае предложенное Бергстремом разложение выглядит следующим образом:

$$F^{*n} = \sum_{\nu=0}^{k-1} C_n^\nu \Phi^{*(n-\nu)} * (F-\Phi)^{*\nu} + r_n^{(k)}, \qquad (1)$$

где $r_n^{(k)} = (F-\Phi)^{*k} * \sum_{\nu=0}^{n-k} C_{\nu+k-1}^{k-1}\Phi^{*\nu} * F^{*(n-k-\nu)}$. Для $r_n^{(k)}$ в [1] получена оценка $O(n^{-k/2})$ при условии, что распределение F не сингулярно и $\beta_3 < \infty$. Более того, Г. Бергстрем показал, что в одномерном случае из (1) следует разложение Эджворта, причем остаточный член имеет вид $o(n^{-(k-1)/2})$.

В настоящей работе мы получаем аналог разложения Бергстрема в бесконечномерном случае, однако для более узкого класса множеств, а именно, для шаров с центром в нуле.

Введем обозначения: σ^2 — собственные числа оператора T, $\sigma_j^2 \geqslant \sigma_{j+}^2$, $j = 1, 2, \ldots, \{e_j\}_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора T,

$$\Lambda_l = \prod_{j=1}^{l} \sigma_j^2, \quad \sigma^2 = \mathbf{E}\,|X_1|^2, \quad \Gamma_{\mu,l} = \beta_\mu \sigma^\mu \Lambda_l^{-\mu/l},$$

$$\mu \geqslant 2, \quad x(l) = \sum_{j=1}^{l} (x, l_j)\, l_j, \quad v_l = \sup\{|\mathbf{E}\exp\{i(x, X_1)\}|: \ |x(l)| \geqslant \varepsilon_l\},$$

где $\varepsilon_l = (\sigma_1 \Gamma_{4,l}^{1/2})^{-1}$, $g(t) = \mathbf{E}\exp\{it|Y_1|^2\}$, $g(t, \nu) = g(t(1-\nu/n))$, $\overline{X}_j$, $j = 1 \div n$,— независимые случайные величины, распределения которых определяются равенствами $\mathbf{P}(\overline{X}_j \in A) = \mathbf{P}(X_j \in A / |X_j| \leqslant \sigma\sqrt{m_n})$ для каждого борелевского множества $A \subset H$, $\overline{g}_n(t) = \mathbf{E}\exp\left\{it\left|n^{-1/2}\sum_1^n \overline{X}_j\right|^2\right\}$, $\overline{F}$ — распределение $\overline{X}_1$,

$$\overline{Q}_{\nu,n}(r) = C_n^\nu \int\limits_{|x|^2 < nr} \Phi^{*(n-\nu)} * (\overline{F} - \Phi)^{*\nu}(dx),$$

где $*$ — свертка распределений. Символы $c(\cdot)$ и c с индексами или без них будут означать константы, зависящие только от аргументов, указанных в скобках, и соответственно абсолютные константы. Например, $c(\{\mu_j\})$ означает постоянную, зависящую только от последовательности $\{\mu_j\}$. Если над знаком равенства расположена буква Δ, то это равенство понимается как определение.

Теорема. *Пусть k и l целые числа, $k \geqslant 2$, $l > 6k$, $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\overline{\Delta}_{k,n} \stackrel{\Delta}{=} \sup_r \left| F_n(r) - G(r) - \sum_{\nu=1}^{k-1} \overline{Q}_{\nu,n}(r) \right| \leqslant c(k, l, \varepsilon)[(\Gamma_{3,l}^2/n)^{k/2} +$$
$$+ (\Gamma_{4,l}/n)^{l/12-\varepsilon} + n\mathbf{P}(|X_1| > \sigma\sqrt{m_n}) + v_l^{n/4} \ln(n\Gamma_{4,l}^{-1} + 1)].$$

Заметим, что v_l выполняет ту же функцию, что величина $\sup\{|\mathbf{E}\exp\{itX_1\}|: |t| > \sigma^2/12\beta_3\}$ в известной одномерной оценке Л. В. Осипова [2] (см. также [3, с. 197]).

Как и в [1], из сформулированной теоремы можно получить разложение типа Эджворта в гильбертовом пространстве. Это будет сделано в другой нашей работе.

В. Ю. Бенткус [4, теоремы 1.7 и 1.8]) также получил оценку остаточного члена в разложении типа Бергстрема в гильбертовом пространстве. Эта оценка менее точна, чем наша: она формулируется в терминах момента $\overline{\beta}_{k+2}$ и не указана явная зависимость от оператора T. Зато в [4] рассматривается более широкий класс множеств, включающий в себя, в частности, все эллипсоиды. Различие, кроме того, состоит в том, что вместо v_l в [4] используется другая характеристика.

Что касается методов доказательств в [4] и данной статье, то они сильно отличаются, хотя и тот и другой основаны на применении аппарата характеристических функций. Метод работы [4] опирается на асимптотическое разложение математических ожиданий гладких функционалов, которое восходит к Ф. Гетце [5]. В настоящей работе существенно используется дополнительное усреднение по вспомогательному гауссовскому распределению (см. лемму 1.4). Общим для обоих методов является использование подхода Ф. Гетце к оценке характеристических функций (см. [6, лемма 3.37]).

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $g_i(t) = (1 - 2it\sigma_j^2)^{-1/2}$, $(x, e_j) = x^{(j)}$, A_t — оператор, определяемый равенством $A_t e_j = g_j(t) e_j$, $j = 1, 2, \ldots$, для любой измеримой функции $f(\cdot, \cdot)$ и любых случайных величин X и Y $\mathbf{E}_X f(X, Y) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{E}\{f(X, Y)/Y\}$, $I(A, x) \stackrel{\Delta}{=} I(A)$ — индикатор множества A как функция аргумента x. Комлексный множитель под знак скалярного произведения будем вносить по правилу внесения вещественного множителя: если $x \in H$, $y \in H$, λ — комплексное число, то $\lambda \cdot (x, y) = \sum_1^\infty x^{(j)} y^{(j)} \lambda = (\lambda x, \quad y) = (x, \lambda y)$. Обозначим $\|\lambda x\|^2 = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 |x|^2$, $D_s^m f(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{d^m}{ds^m} f(s)$, $H_m(t) = e^{t^2/2} (-1)^m \times$ $\times D_t^m e^{t^2/2}$ — полиномы Чебышева — Эрмита степени m, $H^\nu = \underbrace{H \times \ldots \times H}_{\nu}$, $\int \stackrel{\Delta}{=} \int_H$, $X^s = X - X'$, где X' — независимая копия X. В формулировках лемм 1.7 и 1.9 символы $[(k+1)/2]$ и $[(\nu+1)/2]$ будут обозначать целую часть соответствующего числа. Не ограничивая общности рассуждений, мы будем предполагать, что $\Gamma_{4,l}/n < 1$, $\Gamma_{3,l}^2/n < 1$. Далее мы это не будем оговаривать специально.

Как известно, если $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ — независимые одномерные стандартные нормальные случайные величины, то для любого $x \in H$ величина $\sum_1^\infty \varkappa_j x^{(j)}$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $|x|^2$ (см., например, [7, с. 52, 53]). Обозначим $(\varkappa, x) = \sum_1^\infty \varkappa_j x^{(j)}$. Величину $\varkappa$ назовем *обобщенной стандартной нормальной случайной величиной в H*.

Далее, мы будем обозначать

$$\mathbf{E} f\left(\sum_{q=1}^{\nu} \overline{W}_q\right) = \int f(x) (\overline{F} - \Phi)^{*\nu} (dx)$$

для любой борелевской функции $f(\cdot)$, а $\overline{W}_q$, $q = 1 \div \nu$, называть *независимыми обобщенными случайными величинами* с одним и тем же распределением $\overline{F} - \Phi$.

В настоящей работе существенно используются результаты статьи [8].

§ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1.1. *Пусть $Z = X + Y$, X и Y — независимы, φ — измеримое отображение из H^ν в H. Тогда для любых $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \in H^\nu$, натуральных $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ и действительных $p > 1$, $q > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, справедлива оценка*

$$\left| \mathbf{E} \left[\prod_{j=1}^{\nu} (Z, x_j)^{\mu_j} \right] \exp\{it [(Z, \varphi(x_1, \ldots, x_\nu)) + |Z|^2]\} \right| \leqslant c(\{\mu_j\}) \times$$
$$\times \left(\prod_{j=1}^{\nu} |x_j|^{\mu_j} \right) \mathbf{E}^{1/2p} |f_{X^s}(2t)|^p \sum_{m=0}^{M} \mathbf{E}^{1/2} |Y|^{2(M-m)} \mathbf{E}^{1/q} |X|^{mq},$$

где $M = \sum_{j=1}^{\nu} \mu_j$, $f_x(t) = \mathbf{E} \exp\{it(Y, x)\}$.

Доказательство. Обозначим $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_\nu)$, $e(\varphi, Z, t) = \exp\{it[(Z, \varphi) + |Z|^2]\}$. Нетрудно видеть, что

$$\prod_{j=1}^{\nu} (Z, x_j)^{\mu_j} = \sum_{\substack{0 \leqslant t_j \leqslant \mu_j, \\ j = 1 \div \nu}} \prod_{j=1}^{\nu} C_{\mu_j}^{t_j} (X, x_j)^{t_j} (Y, x_j)^{\mu_j - t_j}. \tag{1.1}$$

Используя неравенство Коши — Буняковского и свойства условных математических ожиданий, получаем, что

$$\left| \mathbf{E} e(\varphi, Z, t) \prod_{j=1}^{\nu} (X, x_j)^{t_j} (Y, x_j)^{\mu_j - t_j} \right| =$$

$$= \left| \mathbf{E} e(\varphi, Y, t) \left(\prod_{j=1}^{\nu} (Y, x_j)^{\mu_j - t_j} \right) \mathbf{E}_X e(\varphi + 2Y, X, t) \prod_{j=1}^{\nu} (X, x_j)^{t_j} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\mathbf{E}^{1/2} \prod_{j=1}^{\nu} |(Y, x_j)|^{2(\mu_j - t_j)} \right) \mathbf{E}^{1/2} \left| \mathbf{E}_X e(\varphi + 2Y, X, t) \prod_{j=1}^{\nu} (X, x_j)^{t_j} \right|^2. \quad (1.2)$$

Далее,

$$\mathbf{E}^{1/2} \mathbf{E}_{X, X'} e(\varphi + 2Y, X, t)\, e(\varphi + 2Y, X', -t) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{\nu} (X, x_j)^{t_j} (X', x_j)^{t_j} = \mathbf{E}^{1/2} e(\varphi, X, t) \times$$

$$\times e(\varphi, X', -t) f_{X^s}(2t) \prod_{j=1}^{\nu} (X, x_j)^{t_j} (X', x_j)^{t_j}.$$

Оценивая последнее выражение с помощью неравенства Гельдера, из (1.1) и (1.2) получаем утверждение леммы.

Лемма 1.2. *Для любых $x \in H$, комплексного s справедливо равенство*

$$\mathbf{E} \exp \{ \sqrt{2s} (\varkappa, x) \} = \exp \{ s |x|^2 \}.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из равенства

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ \sqrt{2s}\, y\lambda - y^2/2 \}\, dy = \exp \{ s\lambda^2 \}.$$

Лемма 1.3. *Для любых комплексных a и b*

$$D_s^M \exp \{ s^2 a + sb \} |_{s=0} = \sum_{m=0}^{M} C_M^m H_m(0) (-2a)^{\frac{m}{2}} b^{M-m}$$

(индексы m можно считать четными).

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из формулы Лейбница и равенства

$$D_s^m \exp \{ s^2 a \} = (-1)^m H_m (s \sqrt{-2a}) \exp \{ s^2 a \} (-2a)^{\frac{m}{2}}.$$

Лемма 1.4. *Пусть z, y_q — элементы из H, s — комплексное число, $0 \leqslant \lambda_q \leqslant 1$, μ_q — натуральное, $q = 1 \div \nu$. Тогда*

$$A(\{\mu_q\}) \triangleq \mathbf{E} \exp \left\{ s \sum_{q=1}^{\nu} \lambda_q (y_q, \varkappa + sz) \right\} \prod_{q=1}^{\nu} (sy_q, \varkappa + sz)^{\mu_q} =$$

$$= \sum{}' a_1 s^{2M-m} \exp \left\{ \frac{s^2}{2} \left(\sum_{q=1}^{\nu} \lambda_q y_q, \sum_{q=1}^{\nu} \lambda_q y_q + 2z \right) \right\} \prod_{q=1}^{\nu} (y_q, z)^{t_q} \lambda_q^{s_q} \prod_{p=1}^{\nu} (y_p, y_q)^{\mu_{pq} + s_{pq}},$$

где $a_1 = c(\{\mu_{pq}\}, \{t_q\}, \{s_{pq}\})$, $s_q \triangleq \sum_{p=1}^{\nu} s_{pq}$, $\sum'$ означает суммирование по всем параметрам, удовлетворяющим следующим условиям: $0 \leqslant m \leqslant M = \sum_{q=1}^{\nu} \mu_q$, m — четны, $\sum_{p=1}^{\nu} \sum_{q=1}^{\nu} \mu_{pq} = m/2$, $\sum_{q=1}^{\nu} t_q = l_1$, $\sum_{p=1}^{\nu} \sum_{q=1}^{\nu} s_{pq} = M - m - l_1$, $0 \leqslant l_1 \leqslant M - m$, $\sum_{p=1}^{\nu} (\mu_{pq} + \mu_{qp} + s_{qp}) + t_q = \mu_q$, $q = 1 \div \nu$; причем $s_q = 0$, если $\lambda_q = 0$, а $t_q = 0$ $(q = 1 \div \nu)$, если $z = 0$.

Доказательство. Обозначим $\xi_q=(y_q,\quad \varkappa+sz)$, $\xi=\sum_{q=1}^{\nu}\lambda_q\xi_q$, $\eta=\sum_{q=1}^{\nu}d_q\xi_q$, $u=\sum_{q=1}^{\nu}\lambda_q y_q$, $u_1=\sum_{q=1}^{\nu}d_q y_q$, где d_q — фиктивные переменные. Имеем

$$A(\{\mu_q\})=\mathbf{E}e^{s\xi}\prod_{q=1}^{\nu}(s\xi_q)^{\mu_q}.$$

Величина $A(\{\mu_q\})$ равна коэффициенту при $\mathbf{P}_M(\{\mu_q\})\prod_{q=1}^{\nu}d_q^{\mu_q}$ в $A_1=s^M\mathbf{E}\eta^M e^{s\xi}$, $\mathbf{P}_M(\{\mu_q\})=M!\Big/\prod_{q=1}^{\nu}\mu_q!$. Обозначим $\varphi(s_1)=\mathbf{E}\exp\{s\xi+s_1\eta\}$. Так как интеграл $\mathbf{E}D_{s_1}^{M}\exp\{s\xi+s_1\eta\}$ сходится равномерно по $s_1\in[-1,\ 1]$, то в нем можно переставить $\mathbf{E}$ и $D_{s_1}^M$. Следовательно, $A_1=s^M D_{s_1}^M\varphi(0)$. Применяя лемму 1.2, убеждаемся, что

$$\varphi(s_1)=\exp\left\{s(su+s_1u_1,\ z)+\frac{1}{2}\left(s^2|u|^2+2ss_1(u,u_1)+s_1^2|u_1|^2\right)\right\}=$$
$$=\exp\left\{\frac{s_1^2}{2}|u_1|^2+s_1s(u_1,u+z)+\frac{s^2}{2}(u,u+2z)\right\}.$$

Далее, в силу леммы 1.3

$$D_{s_1}^M\varphi(0)=\exp\left\{\frac{s^2}{2}(u,u+2z)\right\}\sum_{m=0}^{M}C_M^mH_m(0)\,i^m|u_1|^m s^{M-m}(u_1,u+z)^{M-m}.$$

Имеем

$$|u_1|^m=\sum_{\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}\mu_{pq}=m/2}P_{m/2}(\{\mu_{pq}\})\prod_{p=1}^{\nu}\prod_{q=1}^{\nu}[d_pd_q(y_p,y_q)]^{\mu_{pq}},$$

$$(u_1,u+z)^{M-m}=\sum_{l_1=0}^{M-m}C_{M-m}^{l_1}\left(\sum_{p=1}^{\nu}d_p(y_p,z)\right)^{l_1}\left(\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}d_p\lambda_q(y_p,y_q)\right)^{M-m-l_1}=$$
$$=\sum_{l_1=0}^{M-m}C_{M-m}^{l_1}\left(\sum_{\sum_{q=1}^{\nu}t_q=l_1}\mathbf{P}_{l_1}(\{t_q\})\prod_{q=1}^{\nu}[d_q(y_q,z)]^{t_q}\right)\times$$
$$\times\sum_{\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}s_{pq}=M-m-l_1}\mathbf{P}_{M-m-l_1}(\{s_{pq}\})\prod_{p=1}^{\nu}\prod_{q=1}^{\nu}[d_p\lambda_q(y_p,y_q)]^{s_{pq}}.$$

Из предыдущих выкладок вытекает, что

$$A_1=\exp\left\{\frac{s^2}{2}(u,u+2z)\right\}\sum_{m=0}^{M}C_M^mH_m(0)\,i^ms^{2M-m}\times$$
$$\times\left(\sum_{\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}\mu_{pq}=m/2}\mathbf{P}_{m/2}(\{\mu_{pq}\})\left(\prod_{p=1}^{\nu}\prod_{q=1}^{\nu}[d_pd_q(y_p,y_q)]^{\mu_{pq}}\right)\times\right.$$
$$\times\sum_{l_1=0}^{M-m}C_{M-m}^{l_1}\left(\sum_{\sum_{q=1}^{\nu}t_q=l_1}\mathbf{P}_{l_1}(\{t_q\})\prod_{q=1}^{\nu}[d_q(y_q,z)]^{t_q}\right)\times$$
$$\times\sum_{\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}s_{pq}=M-m-l_1}\mathbf{P}_{M-m-l_1}(\{s_{pq}\})\prod_{p=1}^{\nu}\prod_{q=1}^{\nu}[d_p\lambda_q(y_p,y_q)]^{s_{pq}}.$$

Лемма доказана.

Обозначим $Z_\nu = n^{-1/2}\left(\sum_1^\nu Y_j + \sum_{\nu+1}^{n-k} \bar{X}_j\right)$, Y_j, $j = \div n$,— независимые копии Y_1, $Y = n^{-1/2} \sum_1^{n-2m_n} Y_j$ при $\nu \geqslant n-2m_n$, $Y = n^{-1/2} \sum_{2m_n-1}^{n-k} \bar{X}_j$ при $\nu < n - 2m_n$, $X = Z_\nu - Y$.

Лемма 1.5 (см. [8, лемма 1.6]). *Для любых* $t > 0$ *справедливы оценки* $\mathbf{E}|X|^t \leqslant c(t)\sigma^t$ *и* $\mathbf{E}|Y|^t \leqslant c(t)\sigma^t$.

Лемма 1.6 (см. [8, лемма 1.8]). *Пусть* l *— натуральное число,* $0 < \gamma < l/2$. *Тогда при любом* $p > 1$

$$\mathbf{E}^{1/2p}\,|f_{X^s}(t)|^p \leqslant c(l)\,[(\Lambda_l^{1/2}|t|^{1/2p}+1)^{-1} + (\Gamma_{4,l}/n)^{l/4p}] + \\ + c(l,\gamma)(\Lambda_l^{1/l}|t|\,\Gamma_{4,l}^{1/2}/n^{1/2})^{\gamma/p} + c(3/5)^{n/4}.$$

Обозначим $R_{k,n}(t) = \sum_{\nu=0}^{n-k} C_{\nu+k-1}^{k-1}\mathbf{E}\exp\{it\,|Z_\nu + \bar{V}n^{-1/2}|^2\}$, где $\bar{V} = \sum_{q=1}^{k} \overline{W}_q$, $N_p(t) = \max\limits_{0\leqslant\nu\leqslant n-k} \mathbf{E}^{1/2p}\,|f_{X^s}(2t)|^p$.

Лемма 1.7. *Пусть* k *и* l *— целые числа,* $0 < \gamma < l/2$, $p > 1$, $k \geqslant 3$. *Тогда*

$$|R_{k,n}(t)| \leqslant c(k,l,p,\gamma)\,(\beta_3/\sigma^3 n^{1/2})^k\,[(|t|\,\sigma^2)^{3k} + (|t|\,\sigma^2)^{[(k+1)/2]}] \times \\ \times [\Lambda_l^{1/2p}|t|^{l/2p}+1)^{-1} + (\Gamma_{4,l}/n)^{l/4p} + (\Lambda_l^{1/l}|t|\,\Gamma_{4,l}^{1/2}/n^{1/2})^{\gamma/p} + (3/5)^{n/4}].$$

Доказательство. Имеем

$$A \triangleq \mathbf{E}\exp\{it\,|Z + \bar{V}n^{-1/2}|^2\} = \mathbf{E}\exp\{it\,|Z|^2\} \times \\ \times \mathbf{E}_{\bar{V}}\exp\left\{i\bar{t}\left(\left|n^{-1/2}\sum_{q=1}^{k}\overline{W}_q\right|^2 + \left(2Z,\, n^{-1/2}\sum_{q=1}^{k}\overline{W}_q\right)\right)\right\}, \tag{1.3}$$

где $Z = Z_\nu$. Из леммы 1.2 вытекает, что

$$A = \mathbf{E}\exp\{it\,|Z|^2\}\,\mathbf{E}_{\bar{V}}\mathbf{E}_\varkappa \exp\left\{sn^{-1/2}\sum_{q=1}^{k}\xi_q\right\}, \tag{1.4}$$

где $\xi_q = (\overline{W}_q, \varkappa + sZ)$, $s = \sqrt{2it}$.

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\mathbf{E}_{\bar{V}}\mathbf{E}_\varkappa \exp\left\{sn^{-1/2}\sum_1^k \xi_k\right\} = \mathbf{E}_\varkappa\left(\mathbf{E}_{\overline{W}_1}\exp\{sn^{-1/2}\xi_1\}\right)^k. \tag{1.5}$$

По формуле Тейлора

$$\mathbf{E}_{\overline{W}_1}\exp\{sn^{-1/2}\xi_1\} = \sum_1^2 \frac{(sn^{-1/2})^j}{j!}\,\mathbf{E}_{\overline{W}_1}\xi_1^j + \\ + (sn^{-1/2})^3 \int_0^1 \frac{(1-\lambda)^2}{2}\,\mathbf{E}_{\overline{W}_1}\exp\{sn^{-1/2}\xi_1\lambda\}\,\xi_1^3\,d\lambda.$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E}_{\overline{W}_1}\xi^j = \int (y, \varkappa + sZ)^j\, Q_1(dy)/b_n,$$

где $Q_1 = (\bar{F} - \Phi)\,b_n$, $b_n = \mathbf{P}(|X_1| \leqslant \sigma\sqrt{m_n})$.

Вследствие равенства характеристик первого и второго порядка для X_1 и Y_1

$$\int (y, \varkappa + sZ)^j\, Q_1(dy) = \int (y, \varkappa + sZ)^j\, Q(j, dy),$$

где

$$Q(j, dy) = \begin{cases} ((1-b_n)\Phi - I(y\colon |y| > \sigma\sqrt{m_n})F)(dy), & j=1, 2;\\ Q_1(dy), & j \geqslant 3.\end{cases}$$

В результате мы получаем, что

$$\left(\mathbf{E}_{\overline{W}_1}\exp\{sn^{-1/2}\xi_1\}\right)^k = b_n^{-k}\sum{}''\left(\prod_{j=1}^{k} c(\mu_j)\right)\underbrace{\int_0^1\ldots\int_0^1}_{k} f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\times$$

$$\times\underbrace{\int\ldots\int}_{k}\prod_{j=1}^{k}(sn^{-1/2}y_j, \varkappa+sZ)^{\mu_j}\exp\{sn^{-1/2}\lambda_j(y_j, \varkappa+sZ)\}\times$$

$$\times Q(\mu_j, dy_j)\, q(\mu_j, d\lambda_j).$$

Здесь Σ'' означает суммирование по всем последовательностям целых чисел $\{\mu_q\}$ таким, что $1 \leqslant \mu_q \leqslant 3$, $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \prod_1^k (1-\lambda_j)^2$, $c(\mu) = 1/\mu!$, $\mu = 1, 2$, $c(3) = 1/2$, $q(3, d\lambda) = d\lambda$, $q(\mu, \cdot)$ сосредоточена в 0 при $\mu = 1, 2$.

Снова меняя порядок интегрирования и используя лемму 1.4, мы заключаем, что

$$\mathbf{E}_\varkappa\left(\mathbf{E}_{\overline{W}_1}\exp\{sn^{-1/2}\xi_1\}\right)^k = \sum{}''\sum{}' A_1(Z), \tag{1.6}$$

где

$$A_1(Z) = b_n^{-k}a_1\left(\prod_{j=1}^{k} c(\mu_j)\right)s^{2M-m}\left(n^{-1/2}\right)^{2M-m-l_1}\times$$

$$\times\underbrace{\int_0^1\ldots\int_0^1}_{k} f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\left(\prod_{q=1}^{k}\lambda_q^{s_q}\right)\underbrace{\int\ldots\int}_{k}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{s^2}{2}\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j n^{-1/2}y_j, \sum_{j=1}^{k}\lambda_i n^{-1/2}y_j + 2Z\right)\right\}\prod_{q=1}^{k}(y_q, Z)^{t_q}\times$$

$$\times\left[\prod_{p=1}^{k}(y_p, y_q)^{\mu_{pq}+s_{pq}}\right]Q(\mu_q, dy_q)\, q(\mu_q, d\lambda_q). \tag{1.7}$$

В силу леммы 1.1

$$\left|\mathbf{E}_Z\exp\left\{it\left(|Z|^2 + \left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j n^{-1/2}y_j, Z\right)\right)\right\}\prod_{q=1}^{k}(y_q, Z)^{t_q}\right| \leqslant c(\{t_q\})\left(\prod_{q=1}^{k}|y_q|^{t_q}\right)\times$$

$$\times\mathbf{E}^{1/2p}|f_{X^s}(2t)|^p\sum_{\mu=0}^{l_1}\mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2(l_1-\mu)}\mathbf{E}^{1/p'}|X|^{\mu p'}, \quad 1/p+1/p' = 1. \tag{1.8}$$

Используя лемму 1.5, нетрудно показать, что

$$\sum_{\mu=0}^{l_1}\mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2(l_1-\mu)}\mathbf{E}^{1/p'}|X|^{\mu p'} \leqslant c(k, p)\,\sigma^{l_1}. \tag{1.9}$$

Далее,

$$I \triangleq \underbrace{\int\ldots\int}_{k}\prod_{q=1}^{k}\left[\prod_{p=1}^{k}|(y_p, y_q)|^{\mu_{pq}+s_{pq}}\right]|y_q|^{t_q}|Q(\mu_q, dy_q)| \leqslant$$

$$\leqslant\prod_{q=1}^{k}\int|y_q|^{\sum\limits_{p=1}^{k}(\mu_{pq}+\mu_{qp}+s_{pq}+s_{qp})+t_q}|Q(\mu_q, dy_q)|.$$

Нетрудно видеть, что

$$\int |y|^\lambda |Q(\mu, dy)| \leqslant c(\lambda, \mu)\beta_3(\sigma\sqrt{n})^{\lambda-3}$$

при $\lambda=\mu$ или при $\lambda \geqslant \mu \geqslant 3$. С другой стороны,

$$2\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k}(\mu_{pq}+s_{pq})+\sum_{q=1}^{k}t_q = 2M-m-l_1$$

и $\sum\limits_{p=1}^{k}(\mu_{pq}+\mu_{qp}+s_{pq}+s_{qp})+t_q=\mu_q$, если $\mu_q=1$ или 2 (см. лемму 1.4). Следовательно,

$$I \leqslant c(k)\beta_3^k(\sigma\sqrt{n})^{2M-m-l_1-3k}. \tag{1.10}$$

Комбинируя (1.7) — (1.10), мы заключаем, что

$$|\mathbf{E}\exp\{it|Z|^2\}A_1(Z)| \leqslant c(k, p)(\beta_3/\sigma^3 n^{3/2})^k(|t|\sigma^2)^{(2M-m)/2}N_p(t).$$

Заметим, что $k \leqslant M \leqslant 3k$, $0 \leqslant m \leqslant M$. Возвращаясь теперь к (1.4) — (1.6), имеем

$$|A| \leqslant c(k, p)N_p(t)[(|t|\sigma^2)^{3k}+(|t|\sigma^2)^{[(k+1)/2]}](\beta_3\sigma^{-3}n^{-3/2})^k. \tag{1.11}$$

Из (1.3) и (1.11), оценивая $N_p(t)$ с помощью леммы 1.6 и используя соотношение $\sum\limits_{\nu=0}^{n-k} C_{\nu+k-1}^{k-1} = C_n^k < n^k$, мы получаем утверждение леммы.

Лемма 1.8. *Справедливо тождество*

$$\mathbf{E}\exp\{it|Y_1+x|^2\} = g(t)\exp\{it\|A_t x\|^2\}.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из формулы (2.10) работы [8].

Обозначим $\overline{P}_{\nu,n}(t)=\int\limits_0^\infty e^{itr}d\overline{Q}_{\nu,n}(r)$.

Лемма 1.9. *Справедлива оценка*

$$|\overline{P}_{\nu,n}(t)| \leqslant c(\nu)|g(t,\nu)|(\beta_3\sigma^{-3}n^{-1/2})^\nu\left[(|t|\sigma^2)^{3\nu}+(|t|\sigma^2)^{\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}\right].$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\overline{P}_{\nu,n}(t)=\mathbf{E}\exp\{it|Z+\overline{V}n^{-1/2}|^2\}C_n^\nu,$$

где $Z=n^{-1/2}\sum\limits_{j=1}^{n-\nu}Y_j$, $\overline{V}=\sum\limits_{1}^{\nu}\overline{W}_q$. В силу лемм 1.8, 1.2

$$\overline{P}_{\nu,n}(t)=C_n^\nu g(t,\nu)\mathbf{E}\exp\{it\|n^{-1/2}A_t\overline{V}\|^2\} =$$
$$= C_n^\nu g(t,\nu)\mathbf{E}_{\overline{V}}\mathbf{E}_\varkappa\exp\{\sqrt{2it}\,n^{-1/2}(\varkappa, A_t\overline{V})\}.$$

Теперь обозначая $\xi_q=(\overline{W}_q, \varkappa)$ и рассуждая, как в лемме 1.7 (см. (1.5) — (1.7) и (1.10) с $l_1=0$), получим оценку

$$|\overline{P}_{\nu,n}(t)| \leqslant C_n^\nu{\sum}''{\sum}'|a_1|(|t|\sigma^2)^{(2M-m)/2}|g(t,\nu)|(\beta_3\sigma^{-3}n^{-3/2})^\nu,$$

$$M=\sum_{q=1}^{\nu}\mu_q,\quad 1 \leqslant \mu_q \leqslant 3.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 1.10. *При $k \geqslant 1$, $l > 6k-4$ справедлива оценка*

$$\left|\frac{d}{dr}\left[G(r)+\sum_{\nu=1}^{k-1}\overline{Q}_{\nu,n}(r)\right]\right| \leqslant c(k,l)\Lambda_l^{-1/l}.$$

Доказательство. По формуле обращения

$$\left|\frac{d}{dr}\overline{Q}_{\nu,n}(r)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\overline{P}_{\nu,n}(t)|\,dt.$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|t|^m|g(t)|\,dt \leqslant c(m,l)\,\Lambda_l^{-(m+1)/l},$$

если $m+1-l/2<0$. В силу леммы 1.9

$$\left|\frac{d}{dr}\overline{Q}_{\nu,n}(r)\right| \leqslant c(l,\nu)(\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^{\nu}\Lambda_l^{-1/l}$$

при $3\nu+1-l/2<0$, $\nu=1\div k-1$. Поскольку $\left|\frac{d}{dr}G(r)\right| \leqslant C(l)\,\Lambda_l^{-1/l}$ при $l\geqslant 3$, то лемма доказана.

Лемма 1.11 (см. [8, лемма 1.9]). *Пусть l — натуральное число, $0<\gamma<l/2$, m — целое, $m\leqslant m_n$, $\alpha^2=m/n$. Тогда*

$$|\overline{g}_n(t)| \leqslant [(\Lambda_l^{1/2}|t|^{l/2}\alpha^{l/2}+1)^{-1}+\alpha^{-l/2}(\Gamma_{4,l}/n)^{l/4}]\,c(l)+ \\ +(\alpha|t|\Gamma_{4,l}^{1/2}/n^{1/2})^{\gamma}\Lambda_l^{\gamma/l}c(l,\gamma)+\exp\{-m/2\}.$$

Лемма 1.12 (см. [8, лемма 1.10]). *Пусть l натуральное, $\varepsilon_0>0$. Тогда*

$$|\overline{g}_n(t)| \leqslant c(l)\,[\Lambda_l^{-1/2}(\max(1,\sigma_1\varepsilon_0 n^{1/2})/|t|)^{l/2}+(\Gamma_{4,l}/n)^{l/4}]+ \\ +\Big(\sup_{|x(l)|\geqslant\varepsilon_0}|\mathbf{E}\exp\{i(x,X_1)\}|\Big)^{n/4}+\mathrm{e}^{-m_n/2}.$$

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Легко видеть, что

$$\overline{\Delta}_{k,n} \leqslant \widetilde{\Delta}_{k,n}+c\cdot n\mathbf{P}(|X_1|>\sigma\sqrt{m_n}), \tag{2.1}$$

где

$$\widetilde{\Delta}_{k,n}=\sup_r\left|\mathbf{P}\left(\left|n^{-1/2}\sum_1^n\overline{X}_j\right|^2<r\right)-G(r)-\sum_{\nu=1}^{k-1}\overline{Q}_{\nu,n}(r)\right|.$$

По неравенству Эссеена и лемме 1.10

$$\widetilde{\Delta}_{k,n} \leqslant c(k,l)\left[\int_{|t|\leqslant\tau}|t^{-1}R_{k,n}(t)|\,dt+\tau^{-1}\Lambda_l^{-1/l}\right] \tag{2.2}$$

для любых $\tau>0$, целых $k\geqslant 2$, $l>6k-4$, где

$$R_{k,n}(t)=\overline{g}_n(t)-g(t)-\sum_{\nu=1}^{k-1}\overline{P}_{\nu,n}(t). \tag{2.3}$$

Заметим, что в силу формулы (1) $R_{k,n}(t)$ совпадает с функцией, для которой получена оценка в лемме 1.7.

Для оценки интеграла $J\triangleq\int_{|t|\leqslant\tau}|R_{k,n}(t)/t|\,dt$ у нас заготовлены леммы 1.7, 1.9, 1.11 и 1.12.

Разделим интервал $|t|\leqslant\tau$ на части $\tau_j\leqslant|t|\leqslant\tau_{j+1}$, $j=0\div 3$, $\tau_0=0$, $\tau_4=\tau=\Lambda_l^{-1/l}(n/\Gamma_{4,l})^l$ (остальные τ_j, $j=1\div 3$, будут определены ниже).

Очевидно, что $J \leqslant \sum_1^6 J_\mu$, где

$$J_1 = \int\limits_{|t| \leqslant \tau_1} |t^{-1} R_{k,n}(t)| dt,$$

$$J_\mu = \int\limits_{\tau_{\mu-1} < |t| \leqslant \tau_\mu} |t^{-1} \bar{g}_n(t)| \, dt, \quad \mu = 2 \div 4,$$

$$J_5 = \int\limits_{|t| \geqslant \tau_1} |t^{-1} g(t)| \, dt, \quad J_6 = \int\limits_{|t| \geqslant \tau_1} \left| t^{-1} \sum_{\nu=1}^{k-1} \bar{P}_{\nu,n}(t) \right| dt.$$

Положим

$$\Omega(t, p) = (\Lambda_l^{1/2p} |t|^{l/2p} + 1)^{-1} + (\Gamma_{4,l}/n)^{l/4p} + (\Lambda_l^{1/l} |t| \Gamma_{4,l}^{1/2}/n^{1/2})^{\gamma/p} + (3/5)^{n/4},$$

$$\omega_1(\alpha, t) = \Lambda_l^{-1/2} (\alpha |t|)^{-l/2}, \quad \omega_2(\alpha, t) = (\alpha |t| \Gamma_{4,l}^{1/2} n^{-1/2})^{l/2} \Lambda_l^{1/2},$$

$$\omega_3(\alpha) = \alpha^{-l/2} (\Gamma_{4,l}/n)^{l/4}, \quad \omega_4(t) = \Lambda_l^{-1/2} (\Gamma_{4,l}^{1/2} |t|/n^{1/2})^{-l/2}.$$

Определим τ_1 как решение уравнения $\omega_1(1, t) = \omega_2(1, t)$. Нетрудно видеть, что

$$\tau_1 = \Lambda_l^{-1/l} (n/\Gamma_{4,l})^{1/4}.$$

Заметим, что при $|t| < \tau_1$

$$\omega_1(1, t) > \omega_2(1, t), \tag{2.4}$$

$$\omega_1(1, t) > \omega_3(1). \tag{2.5}$$

Для $|t| \leqslant \tau_1$ мы будем пользоваться леммой 1.7. Очевидно,

$$J_1 \leqslant \int\limits_{|t| \leqslant \Lambda_l^{-1/l}} + \int\limits_{\Lambda_l^{-1/l} < |t| \leqslant \tau_1}.$$

При $|t| \leqslant \Lambda_l^{-1/l}$ $\Omega(t, p) \leqslant c$. Поэтому

$$\int\limits_{|t| \leqslant \Lambda_l^{-1/l}} \leqslant c (\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^k.$$

Вследствие (2.4) при $|t| < \tau_1$

$$\Lambda_l^{\gamma/l} (|t| \Gamma_{4,l}^{1/2} n^{-1/2})^\gamma < [\omega_1(1, t)]^{2\gamma/l}. \tag{2.6}$$

Кроме того,

$$(3/5)^{n/4} < c(l) (\Gamma_{4,l}/n)^{l/8} = c(l) \omega_1(1, \tau_1). \tag{2.7}$$

В силу (2.5)—(2.7) при $|t| \leqslant \tau_1$

$$\Omega(t, p) \leqslant c(l) ([\omega_1(1, t)]^{1/p} + [\omega_1(1, t)]^{2\gamma/lp}).$$

Отсюда при $l > 6pk$, $\gamma > 3pk$

$$\int\limits_{\Lambda_l^{-1/l} < |t| \leqslant \tau_1} \leqslant c(k, l, p, \gamma) (\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^k.$$

Таким образом,

$$J_1 \leqslant c(k, l, p, \gamma) (\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^k, \quad l > 6pk, \quad \gamma > 3pk. \tag{2.8}$$

Перейдем к оценке J_2. Заметим, что

$$\omega_1(\alpha, t) = \omega_3(\alpha) |t|^{-l/2} (n/\Gamma_{4,l})^{l/4} \Lambda_l^{-1/2}. \tag{2.9}$$

Поэтому

$$\omega_1(\alpha, t) > \omega_3(\alpha), \tag{2.10}$$

если $|t|^{l/2} < (n/\Gamma_{4,l})^{l/4} \Lambda_l^{-1/2}$, т. е.

$$|t| < \tau_2 \triangleq (n/\Gamma_{4,l})^{1/2} \Lambda_l^{-1/l}.$$

При оценке J_2 мы будем пользоваться леммой 1.11. Пусть $\alpha = \alpha(t)$ удовлетворяет уравнению $\omega_1(\alpha, t) = \omega_2(\alpha, t)$. Это означает, что

$$(\alpha|t|)^{l/2} = \Lambda_l^{-1/2} (n/\Gamma_{4,l})^{l/8}. \tag{2.11}$$

Отсюда

$$\alpha(t) = \Lambda_l^{-1/l} (n/\Gamma_{4,l})^{1/4} |t|^{-1}.$$

Выберем натуральное $m = m(t)$ так, чтобы

$$|m(t)/n - \alpha^2(t)| = \min_m |m/n - \alpha^2(t)| \tag{2.12}$$

и положим в лемме 1.11 $\alpha^2 = m(t)/n$.

Очевидно, $\alpha(\tau_2) = (\Gamma_{4,l}/n)^{1/4}$. Поэтому

$$n\alpha^2(t) > n\alpha^2(\tau_2) = (n\Gamma_{4,l})^{1/2} > n^{1/2}, \quad \tau_1 \leqslant |t| \leqslant \tau_2.$$

Отсюда при $n \geqslant 4$

$$m(t)/n \geqslant \alpha^2(t) - 1/n \geqslant \alpha^2(t)(1 - 1/n\alpha^2(\tau_2)) \geqslant \alpha^2(t)/2, \quad m(t) > n^{1/2}/2. \tag{2.13}$$

Учитывая (2.10), (2.11) и (2.13), получаем

$$J_2 \leqslant \int\limits_{\tau_1 < |t| \leqslant \tau_2} \left(c(l)\,\omega_1(\alpha(t), t) + c(\gamma, l)\,[\omega_1(\alpha(t), t)]^{2\gamma/l} + e^{-\sqrt{n}/4}\right)|t|^{-1}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant c_1(\gamma, l)\left((\Gamma_{4,l}/n)^{\gamma/4} + e^{-\sqrt{n}/4}\right)\ln\left(n\Gamma_{4,l}^{-1}\right) \leqslant c(\gamma, l, \varepsilon)(\Gamma_{4,l}/n)^{l/8-\varepsilon}. \tag{2.14}$$

Мы пользовались здесь равенством $\tau_2/\tau_1 = (n/\Gamma_{4,l})^{1/4}$.

Если $|t| > \tau_2$, то вследствие (2.9)

$$\omega_1(\alpha, t) < \omega_3(\alpha). \tag{2.15}$$

Поэтому разумно определить $\alpha = \alpha(t)$ как решение уравнения $\omega_2(t, \alpha) = \omega_3(\alpha)$. Отсюда

$$\alpha(t) = \left(|t|\,\Lambda_l^{1/l}\right)^{-1/2}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\omega_2(\alpha(t), t) = \omega_3(\alpha(t)) = (\Gamma_{4,l}|t|/n)^{l/4} \Lambda_l^{1/4}. \tag{2.16}$$

Сравним теперь $\omega_3(\alpha(t))$ и $\omega_4(t)$. Пусть τ_3 — решение уравнения $\omega_3(\alpha(t)) = \omega_4(t)$. Очевидные вычисления дают

$$\tau_3 = (n/\Gamma_{4,l})^{2/3} \Lambda_l^{-1/l}. \tag{2.17}$$

Пусть $m(t)$ удовлетворяет соотношению (2.12). Тогда

$$n\alpha^2(\tau_3) = n^{1/3}\Gamma_{4,l}^{2/3} > n^{1/3}.$$

Отсюда при $\tau_2 < |t| \leqslant \tau_3$, $n \geqslant 8$ имеем

$$m(t)/n \geqslant \alpha^2(t)/2, \quad m(t) \geqslant n^{1/3}/2 \tag{2.18}$$

(ср. (2.13)). Далее,

$$\tau_3/\tau_2 = (\Gamma_{4,l}/n)^{-1/6}. \tag{2.19}$$

Полагая в лемме 1.11 $\alpha^2 = m(t)/n$ и учитывая (2.15)—(2.19), мы находим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$J_3 \leqslant c(\gamma, l)\left((\Gamma_{4,l}\tau_3/n)^{\gamma/2} \Lambda_l^{\gamma/2l} + e^{-m(\tau_3)/2}\right)\ln(\tau_3/\tau_2) \leqslant$$
$$\leqslant c_1(\gamma, l)(\Gamma_{4,l}/n)^{\gamma/6}\ln\left(n\Gamma_{4,l}^{-1}\right) \leqslant c(\varepsilon, \gamma, l)(\Gamma_{4,l}/n)^{l/12-\varepsilon}, \tag{2.20}$$

если γ достаточно близко к $l/2$.

Перейдем к оценке J_4. Если $\tau_3 < |t| \leqslant \tau$, то $\omega_4(t) < \omega_3(\alpha(t))$, где $\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению (2.16). Поэтому в данном случае разумнее использовать лемму 1.12. В результате, полагая $\varepsilon_0 = (\sigma\Gamma_{4,l}^{1/2})^{-1}$, мы получаем оценку

$$J_4 \leqslant c(l)\left[(n/\Gamma_{4,l}\tau_3^2)^{l/4}\Lambda_l^{-1/2} + \left((\Gamma_{4,l}/n)^{l/4} + v_l^{n/4} + e^{-n/8}\right)\ln(\tau/\tau_3)\right].$$

Нетрудно проверить, что

$$\Lambda_l^{-1/2}(n/\Gamma_{4,l}\tau_3^2)^{l/4} = (\Gamma_{4,l}/n)^{l/12}, \quad \tau/\tau_3 = (n/\Gamma_{4,l})^{l-\frac{2}{3}}.$$

Поэтому

$$J_4 \leqslant c(l)\left((n/\Gamma_{4,l})^{l/12} + v_l^{n/4}\ln(n/\Gamma_{4,l})\right). \tag{2.21}$$

Нам остается оценить J_5 и J_6. Используя неравенство

$$|g(t)| \leqslant \Lambda_l^{-1/2}|t|^{-l/2},$$

имеем

$$J_5 \leqslant 2\int_{\tau_1}^{\infty}\Lambda_l^{-1/2}t^{-l/2-1}\,dt = c(l)(\Gamma_{4,l/n})^{l/8}. \tag{2.22}$$

В силу леммы 1.9

$$J_{6,1} \triangleq \int_{|t|>\tau_1}|\bar{P}_{\nu,n}(t)/t|\,dt \leqslant c(\nu)(\beta_3\sigma^{-3}n^{-1/2})^{\nu}\Lambda_l^{-1/2} \times$$
$$\times \int_{|t|>\tau_1} t^{3\nu-l/2-1}\,dt = c(\nu, l)(\Gamma_{4,l}/n)^{l/8-3\nu/4}(\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^{\nu}.$$

Возможны два случая: $\Gamma_{3,l}/\sqrt{n} \leqslant (\Gamma_{4,l}/n)^{3/4}$, $\Gamma_{3,l}/\sqrt{n} \geqslant (\Gamma_{4,l}/n)^{3/4}$. В первом случае

$$J_{6,1} \leqslant c(\nu, l)(\Gamma_{4,l}/n)^{l/8},$$

во втором —

$$J_{6,1} \leqslant c(\nu, l)(\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^{l/6} < c(\nu, l)(\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^{k}.$$

Таким образом

$$J_6 \leqslant c(\nu, l)\left((\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^{k} + (\Gamma_{4,l}/n)^{l/8}\right). \tag{2.23}$$

Из (2.1)—(2.3), (2.8), (2.14) и (2.21)—(2.23) следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bergstrem H.** On asymptotic expansions of probability functions // Skandinaw. aktuarietidskrift.— 1951.— H. 1—2.— P. 1—34.
2. **Осипов Л. В.** Об асимптотических разложениях функции распределения суммы случайных величин с неравномерными оценками остаточного члена // Вестн. Ленинградск. ун-та.— 1972.— № 1.— С. 51—59.
3. **Петров В. В.** Суммы независимых случайных величин.— М.: Наука, 1972.— 414 с.
4. **Бенткус В. Ю.** Асимптотические разложения для сумм независимых случайных элементов пространства Гильберта // Литовск. матем. сб.— 1984.— Т. 24, № 4.— С. 29—48.
5. **Götze F.** On Edgewort expansions in Banach spaces // Ann. Probab.— 1981.— V. 9, № 5.— P. 852—859.
6. **Götze F.** Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals // Z. Wahr. verw. Gebiet.— 1979.— Bd 50, H. 3.— S. 333—355.
7. **Го Х.-С.** Гауссовские меры в банаховых пространствах.— М.: Мир, 1979.— 176 с.
8. **Нагаев С. В., Чеботарев В. И.** Уточнение оценки погрешности нормальной аппроксимации в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн.— 1986.— Т. 27, № 3.— С. 154—173.