

Предельные теоремы для случайных процессов и их применения. — Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1993. — 308 с. — (Тр. Ин-та математики СО РАН; Т. 20). — ISSN 0208—0060.
ISBN 5—86134—001—3.

Сборник посвящен актуальным асимптотическим проблемам теории случайных процессов. Изучены и классифицированы переходные явления для вещественнозначных цепей Маркова; исследованы условия существования, эргодичности, устойчивости так называемых рекурсивных последовательностей и рекурсивных цепей, являющихся обобщением цепей Маркова и широко распространенных в приложениях. Найдено распределение числа пересечений полосы траекториями случайных процессов с независимыми приращениями; получен ряд результатов, относящихся к предельным теоремам для сумм случайных элементов в бесконечномерных пространствах, к асимптотике решений уравнений в частных производных со случайными коэффициентами, к поведению точки минимума случайных полей и др. Результаты многих работ носят законченный характер.

Для специалистов в области теории вероятностей и ее приложений.

Редакционная коллегия

академики А. А. Боровков (главный редактор), Ю. Л. Ершов, Ю. Г. Решетняк, члены-корреспонденты РАН С. К. Годунов, В. Г. Романов, доктора физико-математических наук С. С. Кутателадзе, В. В. Юринский (ответственный секретарь)

Ответственный за выпуск

кандидат физико-математических наук *Д. А. Коршунов*

Рецензенты

член-корреспондент РАН *Г. А. Михайлов*
доктор физико-математических наук *Б. А. Rogozin*

Утверждено к печати Институтом математики СО РАН

1602090000-001

П — «Наука» 237—92, I полугодие
Я 82(03)—93

© Институт математики СО РАН, 1993

ISBN 5—86134—001—3

О РАЗЛОЖЕНИИ ЭДЖВОРТА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. В. Нагаев, В. И. Чеботарёв

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена асимптотическим разложениям по степеням $n^{-1/2}$ распределения нормы суммы n независимых одинаково распределенных случайных величин. Эти разложения являются обобщением классического разложения Чебышева — Эджворта. Как и в одномерном случае, в этой проблеме можно выделить два аспекта.

Первый: поиски алгоритмов вычисления коэффициентов при $n^{-\nu/2}$. Новым по сравнению с конечномерным случаем является то, что различные алгоритмы приводят к разным представлениям коэффициентов (см., например, работы Гёце [1] и Бенткуса [2, 3]). В данной статье предлагается новый алгоритм вычисления коэффициентов в разложении Чебышева — Эджворта, основанный на дополнительном усреднении по вспомогательному гауссовскому распределению. Предлагаемый алгоритм приводит соответственно к новому представлению коэффициентов. Так как разложение Эджворта единственно, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n , мы получаем функциональные тождества, которые априори не очевидны. В связи с этим возникает проблема прямого доказательства полученных тождеств, которая также решается в настоящей работе.

Второй: оценка остаточного члена. Предшествующие исследования были, в основном, направлены на получение оценки остатка при минимальных предположениях относительно моментов исходного распределения. Однако в бесконечномерном случае очень важна форма зависимости остатка от ковариационного оператора слагаемых случайных величин. Наша цель заключается в том, чтобы найти явный вид этой зависимости, сводя при этом к минимуму число собственных значений ковариационного оператора, участвующих в оценке. Как и в одномерном случае, для получения приемлемой оценки остатка, кроме моментных ограничений, приходится накладывать дополнительное ограничение на характеристический функционал. Используемое нами условие является обобщением известного условия Крамера. Оно близко к условию (1.1) в [3].

§ 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

1.1. Введем обозначения и определения, используемые на протяжении всей статьи:

H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство с нормой $|\cdot|$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$;

$Y, X, X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины со значениями в H , причем $X, X_1, X_2, \dots$ одинаково распределены с некоторым распределением F , Y — гауссовская величина с распределением Φ , а X и Y имеют нулевое среднее и общий ковариационный оператор T ;

$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots$ — собственные числа оператора T , $\sigma_j^2 \geq \sigma_{j+1}^2$, $j = 1, 2, \dots$;

$\{e_j\}_1^\infty$ — последовательность соответствующих собственных векторов, составляющих ортонормированный базис в H ;

$E_{u_{j_1}, \dots, u_{j_m}} \psi(u_1, \dots, u_\nu)$ — условное математическое ожидание при условии, что все величины, кроме $u_{j_1}, \dots, u_{j_m}$, фиксированы; здесь ψ — измеримая функция ν переменных, $\{j_1, \dots, j_m\} \subset \{1, \dots, \nu\}$ и $u_1, \dots, u_\nu$ — случайные величины;

$D_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}^{j_1, \dots, j_m} \equiv \partial^M / \partial \lambda_1^{j_1} \dots \partial \lambda_m^{j_m}$ — частные производные функции переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_m$;

ξ — обозначение случайной величины X , когда последняя вещественна;

η — вещественная нормальная случайная величина;

$I_A(x)$ — индикаторная функция множества A ;

I — тождественный оператор;

$[m/n]$ — целая часть дроби m/n ;

$c(\cdot, \cdot)$ — величина, зависящая только от параметров, указанных в скобках;

$\{m_q\}_i^\nu = \{m_q\}_{q=i}^\nu$, $\{\mu_q\}_i^\nu$, $\{t_q\}_i^\nu$, $\{l_q\}_i^\nu$ — наборы неотрицательных целых чисел, например $\{m_q\}_i^\nu = \{m_i, m_{i+1}, \dots, m_\nu\}$;

$\{\mu_{pq}\}$, $\{\mu_{pq}\}$, $\{s_{pq}\}$, $\{t_{pq}\}$ ($p, q = 1, \dots, \nu$) — матрицы, элементы которых суть целые неотрицательные числа;

$\sum_{\{q \mu_q\}_1^\nu}$ — суммирование по $\mu_1, \dots, \mu_\nu$ таким, что $\sum_{q=1}^\nu q \mu_q = \nu$;

$\sum_{\{j_q\}}^{\{u_q\}}$ — суммирование по $\{\mu_{pq}\}$ ($p, q = 1, \dots, m$) таким, что

$$\sum_{p=1}^m (\mu_{pq} + \mu_{qp}) = j_q, \quad q = 1, \dots, m;$$

$\sum_{\{m_q\}_1^\nu}^p$ — суммирование по $\{m_q\}_1^\nu$ таким, что $\sum_{q=1}^\nu m_q = p$;

$\sum_{a \leq p \leq b}$ — суммирование по всем целым $p \in [a, b]$;

$$\sum_{(\nu, p, \mu)}^{2m} = \sum_{\nu=1}^{2m} \sum_{\nu/2 \leq p \leq m} \sum_{\mu_\nu, 2p \leq \mu \leq \nu}, \quad \text{где } \mu_\nu, 2p = \max \{1, (3\nu - 2p)/2\};$$

$\sum_{\substack{j \\ \{m_q \geq 3\}_i^v}}^j$ — суммирование по всем таким $\{m_q\}_i^v$, что $\sum_{q=i}^v m_q = j$ и $m_q \geq 3, q = i, \dots, v$;

$\sum_{\{m_{pq}\}}^m$ — суммирование по всем таким $\{m_{pq}\}$, что $\sum_{p,q=1}^v m_{pq} = m$;

$S_m(\{\mu_q\}) \equiv m! \prod_q 1/\mu_q!$ — полиномиальные коэффициенты, где $m = \sum_q \mu_q$.

Приняты также следующие обозначения:

$$g(t) = E \exp \{it | Y|^2\}, \quad S_n = n^{-1/2} \sum_1^n X_j.$$

1.2. Для функционала $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ формальным разложением Эджворта $E f(S_n)$ назовем формальное разложение в ряд по степеням $n^{-1/2}$:

$$E f(S_n) = E f(Y) + \sum_{\nu=1}^{\infty} n^{-\nu/2} Q_{\nu}(f; X). \quad (1.1)$$

В работе исследуются способы определения $Q_{\nu}(f; X)$ и оценка остаточного члена в разложении (1.1) при $f(x) = \exp \{it |x|^2\}$ и $f(x) = I_{\{|x|^2 < r\}}(x)$. Известно, что если $H = \mathbb{R}$, $f(x) = \exp \{sx\}$ ($s \in \mathbb{C}$), то

$$Q_{\nu}(f; \xi) = \exp \{s^2 \sigma^2 / 2\} p_{\nu}(s; \xi), \quad (1.2)$$

где $\sigma^2 = E \xi^2$,

$$p_{\nu}(s; \xi) = \sum_{\{q \mu_q\}_1^{\nu}} \prod_{q=1}^{\nu} \left[s^{q+2} \kappa_{q+2}(\xi) / (q+2)! \right]^{\mu_q} / \mu_q! \quad (1.3)$$

(см. например, [4, с. 168, 173]), здесь через $\kappa_{q+2}(\xi)$ обозначен семиинвариант ξ порядка $q+2$.

1.3. Опишем алгоритм, введенный Гёце [1] для вычисления $Q_{\nu}(f; X)$ в случае гладких функционалов f (см. [5]). С этой целью выразим семиинварианты $\kappa_{q+2}(\xi)$ через моменты ξ и представим $p_{\nu}(s; \xi)$ в виде суммы

$$p_{\nu}(s; \xi) = \sum^{\#} a_{\nu}(j_1, \dots, j_m) s^M \prod_{q=1}^m E \xi_q^{j_q}, \quad (1.4)$$

где $M = \sum_{q=1}^m j_q$, и $\sum^{\#}$ означает суммирование по всем целым неотрицательным $j_1, \dots, j_m$ таким, что $M \leq \nu + 2m$, $m \leq \nu$, $2 \leq j_q \leq \nu + 2$ (см. также [2, с. 29, 30]). В [5] вводится следующий алгоритм вычисления:

$$Q_\nu(f; X) = p_\nu(D) E f \left(Y + \sum_{q=1}^{\nu} \lambda_q X_q \right) \Big|_{\lambda_1 = \dots = \lambda_\nu = 0}. \quad (1.5)$$

При этом предполагается, что f имеет достаточно высокого порядка ограниченную производную Фреше.

Бенткус дает [2] близкое к (1.5) представление

$$Q_\nu(f; X) = E p_\nu(d_{X_1}, \dots, d_{X_\nu}) f(Y), \quad (1.6)$$

где $p_\nu(d_{X_1}, \dots, d_{X_\nu})$ — дифференциальный оператор, полученный заменой мономов в (1.4) при $s = 1$ смешанными производными Фреше $\prod_{q=1}^m d_{X_q}^{j_q}$.

Здесь $d_{X_q}^{j_q} f(Y)$ обозначает q -кратную производную функции f в точке Y по направлению x .

Для $f(x) = I_A(x)$, где A принадлежит некоторому классу множеств (содержащему, в частности, все эллипсоиды), Бенткус приводит [3, 6] алгоритм вычисления $Q_\nu(f; X)$ следующего вида:

$$Q_\nu(f; X) = E p_\nu(d_{X_1}, \dots, d_{X_\nu}) \Phi(A). \quad (1.6')$$

Здесь оператор $p_\nu(d_{X_1}, \dots, d_{X_\nu})$ определяется по аналогии с (1.6) путем замены в (1.4) мономов на производные распределения Φ на множестве A по направлению x :

$$d\Phi(A) = \lim_{t \rightarrow 0} [\Phi(A - tx) - \Phi(A)]/t.$$

1.4. В этом пункте мы опишем наш алгоритм вычисления $Q_\nu(f; x)$ для $f(x) = \exp\{it|x|^2\}$. Предварительно введем некоторые понятия и обозначения. Обозначим через H_C комплексное расширение пространства H , понимаемое как комплексное векторное пространство, которое состоит из элементов вида $x = x_1 + ix_2$ ($x_1, x_2 \in H$) (см., например, [7, с. 18]). Умножение x на комплексное число $\delta = \delta_1 + i\delta_2$ ($\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$) определяется равенством $\delta x = \delta_1 x_1 - \delta_2 x_2 + i(\delta_1 x_2 + \delta_2 x_1)$. Введем в H_C скалярное произведение

$$(x, y)_1 \equiv (x_1 + ix_2, y_1 + iy_2)_1 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) + i[(x_2, y_1) - (x_1, y_2)].$$

Очевидно, если $(x, y) \in H$, то $(x, y)_1 = (x, y)$. Легко также видеть, что

$$(x, y)_1 = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j)_1 \overline{(y, e_j)_1}, \quad x, y \in H_C.$$

Определим билинейный функционал на H_C , сохраняя для него обозначения скалярного произведения в H :

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j)_1 (y, e_j)_1 \quad x, y \in H_C.$$

Мы будем использовать обозначение $\|x\|^2 = (x, x)$, $x \in H_C$. Ясно, что при $x \in H$ имеем $\|x\|^2 = |x|^2$. Определим оператор $A_t: H_C \rightarrow H_C$ по формуле

$$A_t x = \sum_1^{\infty} (1 - 2it\sigma_j^2)^{-1/2} (x, e_j) e_j \quad \forall x \in H_C.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ — последовательность независимых вещественных нормальных стандартных случайных величин. Для $x \in H_C$ обозначим $(x, \alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (x, e_j)$. В дальнейшем α называем обобщенной гауссовской стандартной величиной. По существу, все наши последующие рассуждения базируются на формуле перехода

$$E \exp \{(2s)^{1/2} (x, \alpha)\} = \exp \{s \|x\|^2\} \quad x \in H_C, \quad s \in C. \quad (1.7)$$

Эта формула вытекает из равенства

$$(2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{(2s)^{1/2} y \lambda - y^2/2\} dy = \exp \{s \lambda^2\}.$$

Заметим, что формула перехода (1.7) существенно используется в работе авторов [8] (см. также [9]).

Теперь перейдем к описанию нашего алгоритма вычисления $Q_\nu(f; X)$ для $f(x) = \exp \{it |x|^2\}$. Прежде всего заметим, что вследствие (1.7)

$$E \exp \{it |S_n|^2\} = E_{S_n} E_\alpha \exp \{(2it)^{1/2} (S_n, \alpha)\}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что случайные величины X_j ограничены. Это позволяет поменять местами E_{S_n} и E_α в правой части последнего равенства:

$$E \exp \{it |S_n|^2\} = E_\alpha E_{S_n} \exp \{(2it)^{1/2} (S_n, \alpha)\}.$$

Используя (1.2) с $s = (2it)^{1/2}$, напомним формальное разложение

$$E_{S_n} \exp \{(2it)^{1/2} (S_n, \alpha)\} = \exp \{it (T\alpha, \alpha)\} \sum_{\nu=0}^{\infty} n^{-\nu/2} p_\nu((2it)^{1/2}; (X, \alpha)),$$

где $(T\alpha, \alpha) = \sum_1^{\infty} \sigma_j^2 \alpha_j^2 \equiv E_Y(Y, \alpha)^2$ и обобщенная гауссовская стандартная величина α фиксирована. В силу (1.3) и (1.4) коэффициенты полинома $p_\nu(s; (X, \alpha))$ представимы в виде линейных комбинаций произведений типа

$$\prod_{q=1}^m E_{X_q}(X_q, \alpha)^{j_q}.$$

Рассматривая математическое ожидание

$$E(j_1, \dots, j_m) \equiv E_\alpha \exp \{it (T\alpha, \alpha)\} \prod_{q=1}^m E_{X_q}(X_q, \alpha)^{j_q} \quad (1.8)$$

как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2\pi)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \sum_{j=1}^N y_j^2 (it\sigma_j^2 - 1/2) \right\} \left[\prod_{q=1}^m E_{X_q} \left(\sum_{k=1}^N y_k(X_q, e_k) \right)^{j_q} \right] \prod_{j=1}^N dy_j$$

$\leftarrow N \rightarrow$

и используя замену переменной $y_j(1-2it\sigma_j^2)^{1/2} = u_j$, заключаем, что

$$E(j_1, \dots, j_m) = g(t) E_\alpha \prod_{q=1}^m E_{X_q}(A_t X_q, \alpha)^{j_q}. \quad (1.9)$$

В результате приходим к формальному разложению Эджворта

$$E \exp \{it |S_n|^2\} = g(t) \sum_{\nu=0}^{\infty} n^{-\nu/2} E p_\nu((2it)^{1/2}; (A_t X, \alpha)). \quad (1.10)$$

Таким образом, для $Q_\nu(f; X)$ мы получили новое представление в случае $f(x) = \exp \{it |x|^2\}$, именно:

$$Q_\nu(f; X) = g(t) E p_\nu((2it)^{1/2}; (A_t X, \alpha)) \equiv g(t) P_\nu(t). \quad (1.11)$$

Осуществляя усреднение по α в (1.9), с помощью леммы 3.6 (см. ниже) мы получим для математического ожидания (1.8) следующее представление:

$$\begin{aligned} E(j_1, \dots, j_m) &= g(t) E \eta^M (M!)^{-1} \left(\prod_{q=1}^m j_q! \right) \sum_{\{\mu_{pq}\}}^{\{j_q\}} (M/2)! E \prod_{p,q=1}^m \frac{(A_t X_p, A_t X_q)^{\mu_{pq}}}{\mu_{pq}!} = \\ &= \left| \cos\left(\frac{\pi M}{2}\right) \right| g(t) \left(\prod_{q=1}^m j_q! \right) 2^{-M/2} \sum_{\{\mu_{pq}\}}^{\{j_q\}} E \prod_{p,q=1}^m \frac{(A_t X_p, A_t X_q)^{\mu_{pq}}}{\mu_{pq}!}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Формула (1.12) ведет к алгоритму, предложенному авторами в [10, 11]: для того, чтобы найти $Q_\nu(f; X)$ ($f(x) = \exp \{it |x|^2\}$), нужно в (1.4) с $s = it$ произвести замену

$$(it)^M \prod_{q=1}^m E \xi_q^{j_q} \text{ на } \left(\prod_{q=1}^m j_q! \right) (it)^{M/2} \sum_{\{\mu_{pq}\}}^{\{j_q\}} E \prod_{p,q=1}^m \frac{(A_t X_p, A_t X_q)^{\mu_{pq}}}{\mu_{pq}!},$$

а полученное выражение умножить на $g(t)$. Отметим, что (1.12) влечет равенство нулю всех коэффициентов $Q_\nu(f; X)$ с нечетными номерами ν .

Под обобщенным χ^2 -распределением мы понимаем распределение случайной величины $\sum_1^\infty b_j^2 \alpha_j^2$, где $\sum_1^\infty b_j^2 < \infty$. Используя равенство

$$(A_t X_p, A_t X_q) = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - 2it\sigma_j^2)^{-1} (X_p, e_j) (X_q, e_j)$$

и записывая в координатной форме правую часть соотношения (1.12), мы придем к следующему выводу: функции $g(t) P_\nu(t)$ можно понимать как полиномы относительно it с коэффициентами, являющимися характеристическими функциями смесей обобщенных χ^2 -квадрат распределений.

1.5. Заметим, что представление (1.11) нетрудно распространить на функционалы более общего вида, например $f(x) = \exp \{it (B(x+a), x+a)\}$, где $a \in H$, а B — положительно определенный самосопряженный оператор в H .

1.6. Математическое ожидание (1.8) можно вычислить различными способами, например, так:

$$\begin{aligned} E_{\alpha} \exp \{it(T\alpha, \alpha)\} \prod_{q=1}^m (X_q, \alpha)^{j_q} = \\ = \frac{1}{s^M} D_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}^{j_1, \dots, j_m} E_{\alpha} \exp \left\{ it(T\alpha, \alpha) + s \sum_{q=1}^m \lambda_q (X_q, \alpha) \right\} \Big|_{\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0}. \end{aligned}$$

Напомним, что $M = \sum_{q=1}^m j_q$. Поэтому при $s = (2it)^{1/2}$

$$\begin{aligned} E \exp \{it(T\alpha, \alpha)\} p_{\nu}(s; (X, \alpha)) = \\ = p_{\nu}(D) E \exp \left\{ s \left[(Y, \alpha) + \sum_{q=1}^m \lambda_q (X_q, \alpha) \right] \right\} \Big|_{\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0}. \end{aligned}$$

Замечая, что в силу (1.7) верно равенство

$$E E_{\alpha} \exp \left\{ s \left[(Y, \alpha) + \sum_{q=1}^m \lambda_q (X_q, \alpha) \right] \right\} = E \exp \left\{ it \left| Y + \sum_{q=1}^m \lambda_q X_q \right|^2 \right\},$$

мы получаем представление (1.5) для $f(x) = \exp \{it|x|^2\}$. Таким образом, различные способы вычисления $E(j_1, \dots, j_m)$ приводят к различным выражениям для $Q_{\nu}(f; X)$.

1.7. В работе Гёце [1] предлагается процедура вычисления членов разложения Эджворта для характеристической функции двумерного функционала Мизеса. Применительно к разложению $E \exp \{it|S_n|^2\}$ эта процедура выглядит следующим образом: нужно каждый моном $\prod_{q=1}^m E \xi_q^{j_q}$ в (1.4) при $s = 1$ заменить на выражение

$$\gamma_{j_1, \dots, j_m} = \left(\prod_{q=1}^m j_q! \right) \sum_{\{\mu_{pq}\}} \prod_{p,q=1}^{\nu} \frac{[R(t; X_p, X_q)/2]^{\mu_{pq}}}{\mu_{pq}!},$$

где $R(t; x, y) = 2it \{(x, y) + 2it E(x, X)((I - 2it T)^{-1} X, y)\}$, а затем полученное выражение умножить на $g(t)$. Из равенств

$$E(x, X)((I - 2it T)^{-1} X, y) = (T(I - 2it T)^{-1} x, y),$$

$$I + 2it T(I - 2it T)^{-1} = (I - 2it T)^{-1} \equiv A_t^2$$

вытекает, что $R(t; X_p, X_q) = 2it(A_t X_p, A_t X_q)$. Таким образом, в рассматриваемом частном случае алгоритмы, предложенные в [10, 11] и в [1], по существу совпадают. Используя любое из приведенных выше представлений, можно показать, что

$$Q_2(f; X) = g(t) \left[((it)^2/2) [E \|A_t X_1\|^4 - (E \|A_t X_1\|^2)^2 - 2 E (A_t X_1, A_t X_2)^2] + \right.$$

$$+ ((it)^3/3) [2 (A_t X_1, A_t X_2)^3 + 3 E \|A_t X_1\|^2 \|A_t X_2\|^2 (A_t X_1, A_t X_2)] \}$$

(см. также [10, 11]).

1.8. Прежде чем сформулировать основные результаты, введем следующие обозначения:

$$\beta_\mu = E |X|^\mu, \quad L = \sigma (l n/4 + 1)^{1/2}, \quad \bar{\beta}_\mu = E (|X|^\mu; |X| \leq L),$$

$$\beta_\mu(n) = \beta_\mu - \bar{\beta}_\mu, \quad \Lambda_l = \prod_{j=1}^l \sigma_j^2, \quad \Gamma_{\mu, l} = \beta_\mu \sigma^\mu \Lambda_l^{-\mu/l}, \quad \mu \geq 2,$$

$$\Gamma_{k+1}(n) = (\bar{\beta}_{k+1} + \beta_k(n) \sigma n^{1/2}) / \sigma^{k+1}.$$

Обозначим через $\bar{X}_j$, $j = 1, 2, \dots$, независимые случайные величины с одним и тем же распределением $\bar{F}$, определяемым равенством $\bar{F}(A) \equiv \mathbf{P}(\bar{X}_j \in A) = \mathbf{P}(X_j \in A \mid |X_j| \leq L)$ для каждого борелевского множества $A \in \mathcal{H}$. Пусть

$$\bar{g}_n(t) = E \exp \left\{ \frac{it}{n} \left| \sum_{j=1}^n \bar{X}_j \right|^2 \right\}.$$

Теорема 1.1. Пусть $P_\nu(t)$ — функции, определенные в (1.11), k и l — целые числа, $0 < \gamma < l/2$, $p > 1$, $k \geq 4$, $\beta_k < \infty$. Тогда

$$\bar{g}_n(t) = g(t) \left[1 + \sum_{1 \leq m \leq (k-2)/2} n^{-m} P_{2m}(t) \right] + R,$$

где

$$\begin{aligned} |R| &\leq n^{-(k-1)/2} \Gamma_{k+1}(n) c(k) |g(t/2)| [(|t| \sigma^2)^{3k-5} + |t| \sigma^2] + \\ &+ c(k, l, \gamma, p) (\beta_3 \sigma^{-3} n^{1/2})^{k-1} N(t; k, l, \gamma, p), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} N(t; k, l, \gamma, p) &= \{ (\Lambda_l^{1/2p} |t|^{l/2p} + 1)^{-1} + (\Gamma_{4,l}/n)^{l/4p} + \\ &+ (\Lambda_l^{1/l} |t| \Gamma_{4,l}^{1/2} / n^{1/2})^{\gamma/p} + (3/5)^{n/4} \} [(|t| \sigma^2)^{3(k-1)} + (|t| \sigma^2)^{[k/2]}]. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что $g(t) P_\nu(t)$ из (1.11) является преобразованием Фурье некоторого обобщенного распределения. С этой целью запишем одномерный полином $p_\nu(s; \xi)$ в виде (ср. (1.4))

$$p_\nu(s; \xi) = E p_\nu(s; \xi_1, \dots, \xi_\nu) \equiv E \sum^* a_\nu(j_1, \dots, j_m) s^M \xi_1^{j_1} \dots \xi_m^{j_m}, \quad (1.14)$$

где знак $\sum^*$ означает то же, что в (1.4). Отметим, что $p_\nu(s; \xi_1, \dots, \xi_\nu)$ совпадает с полиномом от формальных переменных, рассмотренным, например, в [2, 5]. Заметим, что $(A_t X, \alpha)$ при фиксированных X и α есть преобразование Фурье некоторого обобщенного распределения, которое обозначим $B(X, \alpha, \cdot)$. Нетрудно видеть, что

$$B(X, \alpha, r) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j(r) \alpha_j(X, e_j),$$

где $G_f(r) = P((Y, e_j)^2 < r)$. В соответствии с (1.11), чтобы найти прообраз Фурье $g(t) P_\nu(t)$, нужно в (1.14) ξ_q заменить на $B(X_q, \alpha, \cdot)$, а операцию умножения — сверткой. Учитывая, что умножению характеристической функции на $-it$ соответствует дифференцирование функции распределения, получаем

$$\begin{aligned} Q_\nu(f; X) &= E_\alpha E_{X_1, \dots, X_\nu} p_\nu((-2D_r)^{1/2}; B(X_1, \alpha, r), \dots, B(X_\nu, \alpha, r)) * G(r) \equiv \\ &\equiv E_\alpha E_{X_1, \dots, X_\nu} \sum^* a_\nu(j_1, \dots, j_m) (-2D_r)^{M/2} \left[G(r) * \underset{q=1}{*}^m (B(X_q, \alpha, r))^{*j_q} \right]; \end{aligned} \quad (1.15)$$

здесь $\sum^*$ означает суммирование по $j_1, \dots, j_m$ таким, что сумма $M = \sum_{q=1}^m j_q$ четная; $f(x) = I_{\{|x|^2 < r\}}(x)$, $G(r) = P(|Y|^2 < r)$. Обозначим

$$\nu_l = \sup \left\{ |\nu(x)| : \sum_{j=1}^l (x, e_j)^2 \geq \varepsilon_l \right\},$$

где $\nu(x) = E \exp \{it(x, x)\}$, $\varepsilon_l = (\sigma_1^2 \Gamma_{4,l})^{-1}$.

Теорема 1.2. Пусть $Q_\nu(r) = Q_\nu(f; X)$ — функции из (1.15), $\beta_k < \infty$ для некоторого целого $k \geq 4$. Тогда для любого целого l , $l > 6(k-1)$,

$$\begin{aligned} \Delta_{k,n} &\equiv \sup_r \left| P(|S_n|^2 < r) - G(r) - \sum_{1 \leq m \leq (k-2)/2} n^{-m} Q_{2m}(r) \right| \leq \\ &\leq c(k, l) n^{-(k-1)/2} \{ \Gamma_{k+1}(n) \sigma^{6k-10} \Lambda_l^{-(3k-5)/l} + \\ &+ \Gamma_{3,l}^{k-1} + n^{(k-1)/2} \nu_l^{n/4} \ln(n \Gamma_{4,l}^{-1} + 1) \} \equiv R_0. \end{aligned}$$

Следствие 1.1. В условиях теоремы 1.2 имеет место неравенство

$$\Delta_{k,n} \leq c(k, l) n^{-(k-1)/2} \{ \Gamma_{k+1}(n) \sigma^{6(k-1)} \Lambda_l^{-3(k-1)/l} + n^{(k-1)/2} \nu_l^{n/4} \ln(n \Gamma_{4,l}^{-1} + 1) \}.$$

Доказательство теорем 1.1 и 1.2 вытекает непосредственно из теорем 2.2 и 2.3 (см. § 2, ниже). Действительно, так как разложение $E f(S_n)$ (см. (1.1)) по степеням $n^{1/2}$ единственно, а остаточные члены в теоремах 2.2 и 2.3 имеют вид $o(n^{-(k-2)/2})$, получаем, что при $\nu = 2m$ функция $P_\nu(t)$ из (2.3) совпадает с $P_\nu(t)$ из (1.11), а выражение (2.4) совпадает с (1.15).

1.9. Сравнивая полученное представление (1.15) с представлением Бенткуса (1.6'), отметим, что различие состоит в том, что в нашем алгоритме используется только одномерное дифференцирование (от которого, впрочем, можно избавиться с помощью формулы (2.5)) и свертки распределений вместо многомерного дифференцирования в (1.6'), а также дополнительное усреднение по α .

Оценка остаточного члена, приведенная в следствии 1.1, была анонсирована в [11], а несколько более грубая — в [10]. Сформулированные выше теоремы и следствие дают наиболее точную (среди известных нам результатов) зависимость остаточного члена от оператора T . Так, наи-

меньшее число собственных значений T , участвующих в неравенствах теоремы 1.2 и следствия 1.1 равно $l_k = 6k - 5$. Для сравнения укажем, что $l_k = 7k - 6$ в оценке, анонсированной в [12].

Отметим, что разложение Эджворта в бесконечномерных пространствах изучалось также в работах [13—18]. За исключением [17], подход к представлению членов разложения в [13—18] такой же, как в [2, 3, 5]. Зависимость остаточного члена от ковариационного оператора не исследуется. В то же время, в [13—18] рассматриваются функционалы более общего вида, чем в данной статье, а также изучается случай неодинаково распределенных слагаемых.

Характеристика ν_l , которая фигурирует в теореме 1.2, была введена в [19] (см. также [20]). Оценка теоремы 1.2 нетривиальна только при условии $\nu_l < 1$, которое является обобщением условия Крамера в конечномерных пространствах: $\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{|x| \geq r} |\nu(x)| < 1$. Аналогичное условие ввел

Бенткус [3, формула (1.1)]: существуют неотрицательный оператор $K: H \rightarrow H$ и число $r_0 > 0$ такие, что

$$\rho \equiv \sup \{ |\nu(x)| : (Kx, x) \geq r_0^2 (E |X|^q; |X| \leq \sqrt{n})^{2/(q-2)} \} < 1,$$

где $q > 2$ — некоторое фиксированное число. Заметим, что у Бенткуса в оценке остатка участвует не сама величина ρ , а другая связанная с ней характеристика.

К сожалению, нам не удалось оценить величину ν_l для ω^2 -статистики Мизеса, что дало бы возможность применить к этой статистике теорему 1.2. Однако для этой статистики справедлива оценка (см. [21])

$$|E \exp \{it \omega_n^2\}| < c(A)/(1+|t|^4),$$

которая позволяет получить асимптотическое разложение.

Всюду ниже будем предполагать, что

$$n \geq 2(k-2), \quad (1.16)$$

$$\beta_3(n) \sigma^{-3} n^{1/2} \leq 1/4, \quad (1.17)$$

$$\beta_k(n) \sigma^{-k} n^{-(k-2)/2} \leq 1. \quad (1.18)$$

§ 2. ПЕРЕХОД ОТ РАЗЛОЖЕНИЯ БЕРГСТРЕМА К РАЗЛОЖЕНИЮ ЭДЖВОРТА

2.1. При выводе разложения Эджворта мы будем опираться на асимптотические разложения типа Бергстрема, полученные в [8]. Для удобства чтения приведем эти разложения. Обозначим

$$\bar{Q}_{\nu, n}(r) = \binom{n}{\nu} \int_{|x|^2 < nr} \Phi^{*(n-\nu)} * (\bar{F} - \Phi)^{* \nu} (dx), \quad \bar{P}(\nu, n, t) = \int_0^\infty e^{itr} d\bar{Q}_{\nu, n}(r).$$

Теорема А [7, лемма 1.7]. Пусть k и l — целые числа, $0 < \gamma < l/2$, $p > 1$, $k \geq 3$. Тогда

$$\left| \bar{g}_n(t) - g(t) - \sum_{\nu=1}^{k-2} \bar{P}(\nu, n, t) \right| \leq c(k, l, \gamma, p) (\beta_3 \sigma^{-3} n^{1/2})^{k-1} N(t; k, l, \gamma, p)$$

(обозначение $N(t; k, l, \gamma, p)$ см. в (1.13)).

Теорема В [7, Теорема]. Пусть k и l — целые числа, $k \geq 3$, $l > 6(k-1)$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{k,n} = \sup_r \left| P(|S_n|^2 < r) - G(r) - \sum_{\nu=1}^{k-2} \bar{Q}_{\nu,n}(r) \right| \leq \\ \leq c(k, l, \varepsilon) \left[\left(\frac{\Gamma_{3,l}^2}{n} \right)^{\frac{k-1}{2}} + \left(\frac{\Gamma_{4,l}}{n} \right)^{\frac{l}{12} - \varepsilon} + n P(|X| > \sigma \sqrt{m_n}) + n^{1/4} \ln(n \Gamma_{4,l}^{-1} + 1) \right], \end{aligned}$$

где $m_n = [n/4] + 1$.

2.2. Наша задача состоит в выводе разложения по степеням n^{-1} обобщенных распределений $\bar{Q}_{\nu,n}(r)$, $\nu = 1, \dots, k-2$. Оценка остаточного члена в асимптотических разложениях такого типа значительно облегчается за счет гладкости распределения $\bar{Q}_{\nu,n}(r)$.

Рассмотрим независимые обобщенные случайные величины $W_1, \dots, W_\nu$ с одним и тем же обобщенным распределением $F - \Phi$; для любой борелевской функции ψ определим математическое ожидание

$$E \psi(W_1, \dots, W_\nu) = \int \dots \int \psi(x_1, \dots, x_\nu) \prod_{q=1}^{\nu} (F - \Phi)(dx_q);$$

здесь и далее $\int \equiv \int_H$. Заменяя F на $\bar{F}$, получим обобщенные случайные величины $\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_\nu$. Обозначив $\bar{V}_\nu = \sum_{q=1}^{\nu} \bar{W}_q$, можем записать

$$\bar{P}(\nu, n, t) = \binom{n}{\nu} E \exp \{ it \mid ((n-\nu)/n)^{1/2} Y + n^{1/2} \bar{V}_\nu \mid^2 \}.$$

Пусть $1 \leq \nu \leq k-2$, $\bar{d}_\nu(\alpha) = (\bar{d}_{\nu,0}(\alpha); \bar{d}_{\nu,1}(\alpha); \dots)$ — последовательность, элементы которой определяются следующим образом: $\bar{d}_{\nu,j}(\alpha) = E(\bar{W}_1, \alpha)^j / j!$ при $j = 3, \dots, k+1-\nu$, $\bar{d}_{\nu,j}(\alpha) = 0$ при $j = 0, 1, 2$ и $j \geq k+2-\nu$. Обозначим через $(\bar{d}_\nu^{*\nu}(\alpha))_p$ p -й элемент ν -кратной свертки последовательности $\bar{d}_\nu(\alpha)$, т. е.

$$(\bar{d}_\nu^{*\nu}(\alpha))_p = \sum_{\{m_q\}_1^\nu}^p \prod_{q=1}^{\nu} \bar{d}_{\nu,m_q}(\alpha). \quad (2.1)$$

Заменяя $\bar{W}_1$ на W_1 , получим $d_\nu(\alpha)$ и $(d_\nu^{*\nu}(\alpha))_p$.

Будем обозначать через $\bar{d}_\nu(A_t, \alpha)$ последовательность, полученную из $\bar{d}_\nu(\alpha)$ заменой $(\bar{w}_1, \alpha)$ на $(A_t \bar{w}_1, \alpha)$. Аналогично определяется $d_\nu(A_t, \alpha)$. Обозначим $\tau = (1-\nu/n)t$. Центральную роль при переходе от разложения Бергстрема к разложению Эджворта играет

Лемма 2.1. Для любых целых k, l ($k \geq 3, 1 \leq \nu \leq k-2$)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp \left\{ it \left| ((n-\nu)/n)^{1/2} Y + n^{-1/2} \bar{V}_\nu \right|^2 \right\} = \\ & = g(\tau) \sum_{j=0}^{k-2-\nu} \mathbb{E} \left(\bar{d}_\nu^{*\nu} (A_\tau \alpha) \right)_{j+3\nu} (2it/n)^{(j+3\nu)/2} + R(\nu), \end{aligned}$$

где суммирование ведется по таким j , что $j+3\nu$ четно, и

$$\begin{aligned} |R(\nu)| \leq c(k, \nu) |g(\tau)| n^{-\nu} [n^{-(k-1)/2} \bar{\beta}_{k+1}/\sigma^{k+1} + \beta_2(n)/\sigma^2] \{ (|t| \sigma^2)^{k-1+2\nu} + \\ + (|t| \sigma^2)^{k\nu/2} \}, \quad k_\nu = \max \{2, \nu\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Теорема 2.1. В условиях теоремы А справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \bar{g}_n(t) - g(t) - \sum_{\nu=1}^{k-2} \binom{n}{\nu} g(\tau) \sum_{j=0}^{k-2-\nu} (2it/n)^{(j+3\nu)/2} \mathbb{E} \left(\bar{d}_\nu^{*\nu} (A_\tau \alpha) \right)_{j+3\nu} \right| \leq \\ & \leq c(k) |g(t/2)| \{ n^{-(k-1)/2} \bar{\beta}_{k+1}/\sigma^{k+1} + \beta_2(n)/\sigma^2 \} [(|t| \sigma^2)^{3k-5} + |t| \sigma^2] + \\ & + c(k, l, \gamma, p) (\beta_3 \sigma^{-3} n^{1/2})^{k+1} N(t; k, l, \gamma, p). \end{aligned}$$

Заметим, что в [2, теорема 1.7] получено разложение, близкое по форме к разложению, остаточный член которого оценивается в теореме 2.1. Эти разложения можно рассматривать как промежуточные между разложениями Бергстрема и Эджворта.

2.3. Обозначим

$$P_{2m}(t) = \sum_{(\nu, p, \mu)}^{i, \nu} (2it)^{m+\mu} \mathbb{E} \left[\|A_t T^{1/2} \alpha\|^{2(m-p)} (\bar{d}_\nu^{*\nu} (A_t \alpha))_{2\mu+2p} \right] c_0(\nu, m-p, \mu), \quad (2.3)$$

где

$$\|A_t T^{1/2} \alpha\|^2 = \sum_1^\infty (1 - 2it \sigma_j^2)^{-1} \sigma_j^2 \alpha_j^2, \quad c_0(\nu, q, \mu) = (-\nu/2)^q s(\nu, \mu) (q! \nu!)^{-1}.$$

Теорема 2.2. Пусть $P_{2m}(t)$ — функции, определенные в (2.3), k и l — целые числа, $0 < \gamma < l/2$, $p > 1$, $k \geq 4$, $\beta_k < \infty$. Тогда

$$\bar{g}_n(t) = g(t) \left[1 + \sum_{1 \leq m \leq (k-2)/2} n^{-m} P_{2m}(t) \right] + R,$$

где $|R|$ удовлетворяет неравенству (1.13).

Случай $k=3$, который не охватывается теоремой 2.2, рассмотрен в [19, лемма 2.5] (см. также [20]), где была получена оценка

$$\begin{aligned} & |\bar{g}_n(t) - g(t)| \leq \\ & \leq n^{-1} \{ c |g(t/2)| [(t \sigma^2)^2 + |t| \sigma^2] \beta_4 \sigma^{-4} + c(l, \gamma, p) \beta_3^2 \sigma^{-6} N(t; 3, l, \gamma, p) \}. \end{aligned}$$

2.4. Найдем теперь прообраз Фурье $Q_{2m}(r)$ для $g(t) P_{2m}(t)$. Достаточно найти прообраз Фурье выражения

$$K \equiv (it)^a \|A_t T^{1/2} \alpha\|^{2b} \prod_{q=1}^{\nu} (A_t W_q, \alpha)^{m_q}$$

при фиксированных α и W_q , $q = 1, \dots, \nu$, где $a, b \in \mathbb{N}$. Нетрудно видеть, что $\|A_t T^{1/2} \alpha\|^2$ является преобразованием Фурье обобщенного распределения $B_1(\alpha, r) \equiv \sum_1^{\infty} G_j^{*2}(r) \sigma_j^2 \alpha_j^2$. Рассуждения, аналогичные проведенным перед формулой (1.15), показывают, что прообразом K является обобщенное распределение

$$(-D_r)^a (B_1(\alpha, r))^{*b} * \dots * (B(W_q, \alpha, r))^{*m_q}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Q_{2m}(r) &= \sum_{(\nu, p, \mu)}^{2m} E_{\alpha} E_{W_1, \dots, W_{2m}} (-2D_r)^{m+\mu} \times \\ &\times \left[G(r) * (B_1(\alpha, r))^{*(m-p)} * \sum_{\{m_q\}_1^{\nu}}^{2\mu+2p} \left[* (B(W_q, \alpha, r))^{*m_q} \right] \prod_{q=1}^{\nu} \frac{1}{m_q!} \right] c_0(\nu, m-p, \mu). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теорема 2.3. Пусть $Q_{2m}(r)$ — функции, определяемые равенством (2.4), $\beta_k < \infty$ для некоторого целого $k \geq 4$. Тогда для любого целого l ($l > 6(k-1)$)

$$\Delta'_{k,n} \equiv \sup_r \left| P(|S_n|^2 < r) - G(r) - \sum_{1 \leq m \leq (k-2)/2} n^{-m} Q_{2m}(r) \right| \leq R_0$$

(обозначение R_0 см. в формулировке теоремы 1.2).

2.5. Замечание. В [19] (см. также [20]) показано, что

$$\Delta'_{3,n} = \sup_r |P(|S_n|^2 < r) - G(r)| \leq$$

$$\leq c(l, \delta) [\Gamma_{3,l}^2/n + (\Gamma_{4,l}/n)^{l/(16+\delta)}] + c(l) [\Gamma_{4,l}/n + v_l^{n/4} \ln(n \Gamma_{4,l}^{-1} + 1)]$$

для любых вещественного $\delta > 0$ и целого $l \geq 13$. Там же получена оценка $\Delta'_{3,n}$, при выводе которой не используется условие $v_l < 1$. Именно, для любых вещественного $\delta > 0$ и целого $l \geq 7$

$$\Delta'_{3,n} \leq c(l, \delta) [(\Gamma_{4,l}/n)^{l/(l+4+\delta)} + (\Gamma_{3,l}^2/n)^{l/13}], \quad 7 \leq l \leq 12,$$

$$\Delta'_{3,n} \leq c(l, \delta) [(\Gamma_{4,l}/n)^{l/(l+4+\delta)} + \Gamma_{3,l}^2/n], \quad l \geq 13.$$

В [22, 23] получен следующий результат: если $\sigma = 1$, $Ta = 0$, $l \geq 13$ и $\delta > 0$, то

$$\begin{aligned} |P(|S_n - a| < r) - P(|Y - a| < r)| &\leq c(l, \delta) (1 + ||a| - r|)^{-4} \times \\ &\times [\Lambda_{13}^{-6/13} \beta_4 n^{-1} + (\Lambda_l^{-2/(l+2)} + \Lambda_5^{-2/5}) (\beta_3^2 \sigma_l^{-4} n^{-1})^{l/(l+2+\delta)}]. \end{aligned}$$

Преимущество этой оценки перед нашей состоит в найденной зависимости от $1 + |a| - r$. Кроме того, здесь несколько точнее указана зависимость от n . Однако это улучшение сопровождается ухудшением зависимости от ковариационного оператора: нетрудно показать, что

$$\Lambda_l^{-2/(l+2)} \sigma_l^{-4l/(l+2+\delta)} \geq \Lambda_l^{-4/(l+4+\delta)}$$

при $\sigma = 1$. Другие варианты коротких разложений приведены в [3, 6, 18].

2.6. Рассмотрим теперь случай $H = \mathbb{R}$. Сформулируем теорему о разложении характеристической функции $E \exp \{it S_n\}$ в терминах псевдомоментов, которая доказана в [17, теорема 3]. Обозначим

$$K_j(t) = \sum_{\nu=1}^j \sum_{p \equiv j \pmod{2}} \sum_{\substack{\nu \leq p \leq j \\ \mu_{\nu,p} \leq \mu \leq \nu}} (it)^{j+2\mu} \sigma^{j-p} (d_{\nu}^{*\nu})_{p+2\mu} c_0(\nu, (j-p)/2, \mu),$$

где $\sum_{\substack{p \equiv j \pmod{2} \\ \nu \leq p \leq j}}$ — сумма по всем таким целым p , что $j-p$

четно, $\nu \leq p \leq j$, $(d_{\nu}^{*\nu})_l$ — l -й элемент ν -кратной свертки последовательности $d_{\nu} = (d_{\nu,0}; d_{\nu,1}; \dots)$:

$$d_{\nu,j} = E W_1^j / j! \text{ для } 0 \leq j \leq k+1-\nu,$$

$$d_{\nu,j} = 0 \text{ для } j \geq k+2-\nu.$$

Теорема С [17, теорема 3]. Если $\beta_{k+1} < \infty$ для некоторого целого $k \geq 3$, то при $|t| \leq (2n)^{1/2} \sigma^2 / \beta_3$

$$\left| E \exp \{it S_n\} - \exp \{-t^2 \sigma^2 / 2\} \left[1 + \sum_{j=1}^{k-2} n^{-j/2} K_j(t) \right] \right| \leq \\ \leq c(k) \exp \{-t^2 \sigma^2 / 8\} n^{-(k-1)/2} \beta_{k+1} \sigma^{-k-1} [(|t| \sigma)^{3(k-1)} + (|t| \sigma)^{k+1}].$$

Сравнение теоремы С и теоремы 2.2 с учетом (1.10) и (1.11) приводит к следующему алгоритму вычисления. Чтобы получить $g(t) P_{2m}(t)$ из $\exp \{-t^2 \sigma^2 / 2\} K_{2m}(t)$, нужно произвести следующие замены:

$$\exp \{-t^2 \sigma^2 / 2\} \text{ — на } g(t), \\ it \text{ — на } (2it)^{1/2},$$

$$\sigma^{2M} \prod_{q=1}^{\nu} E(X_q^{j_q} - Y_q^{j_q}) \text{ — на } E \left[\|A_t T^{1/2} \alpha\|^{2M} \prod_{q=1}^{\nu} E_{W_q}(A_t W_q, \alpha)^{j_q} \right].$$

Отметим, что в [17, с. 29] допущена ошибка: при доказательстве основной леммы (в настоящей работе — лемма 2.1) возникает оператор A_t , а не A_t . Но это не отражается на цитируемой теореме 3 [17].

Продолжим рассмотрение случая $H = \mathbb{R}$. Предположим, что ξ имеет абсолютно непрерывное распределение. Обозначим через $f_n(x)$ и $\psi_n(x)$ плотности распределений случайных величин $n^{-1/2} \sum_1^n \xi_j$ и $(n^{-1/2} \sum_1^n \xi_j)^2$ соответственно. Сравним разложения $\psi_n(x)$ и $f_n(x)$ по степеням $n^{1/2}$. Оказывается, что при определении членов разложения $\psi_n(x)$ полиномы

Лагерра $L_{l,\lambda}(x) = x^{-\lambda} e^x D_x^l (x^{l+\lambda} e^{-x})$ с параметром $\lambda = -1/2$ играют ту же роль, что полиномы Чебышева — Эрмита в определении членов разложения $f_n(x)$. Действительно, пусть $q(x)$ — плотность распределения $(\sigma \eta)^2$. Тогда, учитывая [4, формула (1.14), с. 173], путем непосредственных вычислений получим, что коэффициент при n^{-m} в разложении $\psi_n(x)$ равен

$$q(x) \sum_{\{j k_j\}_{j=1}^{2m}} \left[\prod_{j=1}^{2m} \frac{1}{k_j!} \left(\frac{\kappa_{j+2}(\xi)}{\sigma^{j+2} (j+2)!} \right)^{k_j} \right] H_{2m+2\mu}(\sqrt{x}/\sigma), \quad x > 0, \quad \mu = \sum_{j=1}^{2m} k_j.$$

Ввиду тождества $H_{2l}(\sqrt{y}) = (-2)^l L_{l,-1/2}(y/2)$ мы приходим к асимптотическому разложению плотности $\psi_n(x)$ в терминах полиномов Лагерра. Покажем, что коэффициенты (1.15) также могут быть описаны в терминах полиномов Лагерра. Обозначим

$$f_k(x, \sigma) = 2^{-k/2} \sigma^{-k} (\Gamma(k/2))^{-1} x^{k/2-1} \exp\{-x(2\sigma^2)^{-1}\}, \quad x > 0,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — функция Эйлера. Соотношение

$$\begin{aligned} D_x^p f_{2l+1}(x, \sigma) &= D_y^p [y^{l-1/2} e^{-y}] \Big|_{y=x/2\sigma^2} (2\sigma^2)^{-p-1} (\Gamma(l+1/2))^{-1} = \\ &= [L_{p,\lambda}(y) y^\lambda e^{-y}] \Big|_{y=x/2\sigma^2} (2\sigma^2)^{-p-1} (\Gamma(l+1/2))^{-1} \equiv g(x; \sigma, p, l), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $p \leq l$, $\lambda = l-p-1/2$, позволяет избавиться от операции дифференцирования в (1.15). Действительно, производная D_r^l выражения

$$\sum_{q=1}^m \left[\sum_{k=1}^{\infty} G_k(r) (X_q, e_k) \alpha_k \right]^{*j_q}$$

является смесью плотностей вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} (G'_k(r))^{*\mu_k} * (G_k(r))^{*\lambda_k},$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = l$, $\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k + \lambda_k) = M$, которые, в свою очередь, совпадают с

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{\lambda_k}(r, \sigma_k) g(r; \sigma_k, \mu_k, (\mu_k-1)/2).$$

Поэтому применение формулы (2.5) приводит к замене в (1.15) выражения

$$D_r^{M/2} \left[G(r) * \sum_{k=1}^{\infty} (B(X_q, \alpha, r))^{*j_q} \right]$$

на свертку функций вида $g(r; \sigma_k, p, l)$.

§ 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 3.1. Для любых целых $l \geq 0$, $\nu \geq 2$ и последовательности чисел $a = (a_0, a_1, \dots, a_l, 0, 0, \dots)$ справедливо равенство

$$\left(\sum_{j=0}^l a_j s^j \right)^\nu = \sum_{j=0}^{l-1} (a^{*\nu})_j s^j + R_l(\nu), \quad (3.1)$$

где $(a^{*\nu})_j$ — j -й элемент ν -кратной свертки последовательности a , $R_l(\nu) = \sum_{j=l}^{\nu l} (a^{*\nu})_j s^j$, причем для $R_l(\nu)$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} R_l(\nu) &= \sum_{m=0}^{l-1} (a^{*(\nu-1)})_m s^m R_{l-m} + R_0 R_l(\nu-1) = \\ &= \sum_{m=0}^{l-1} s^m R_{l-m} \sum_{j=1}^{\nu-1} (a^{*j})_m R_0^{\nu-1-j} + R_l R_0^{\nu-1}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $R_q \equiv R_q(1) = \sum_{i=q}^l a_i s^i$, $q = 0, 1, \dots, l$.

Доказательство. Имеем

$$\left(\sum_{j=0}^l a_j s^j \right)^\nu = \sum_{j=0}^{\nu l} (a^{*\nu})_j s^j = R_l(\nu) + \sum_{j=0}^{l-1} (a^{*\nu})_j s^j. \quad (3.3)$$

Согласно определению свертки $(a^{*\nu})_j = \sum_{m=0}^j (a^{*(\nu-1)})_m a_{j-m}$. Отсюда $R_l(\nu) = \sum_{j=l}^{\nu l} s^j \sum_{m=0}^j (a^{*(\nu-1)})_m a_{j-m}$. Меняя порядок суммирования, приходим к равенству

$$R_l(\nu) = R_1 + R_2, \quad (3.4)$$

где $R_1 = \sum_{m=0}^{l-1} (a^{*(\nu-1)})_m \sum_{j=l}^{\nu l} s^j a_{j-m}$, $R_2 = \sum_{m=l}^{\nu l} (a^{*(\nu-1)})_m \sum_{j=m}^{\nu l} s^j a_{j-m}$. Делая замену $k = j - m$, находим

$$R_1 = \sum_{m=0}^{l-1} (a^{*(\nu-1)})_m s^m \sum_{k=l-m}^{\nu l-m} s^k a_k, \quad R_2 = \sum_{m=l}^{\nu l} (a^{*(\nu-1)})_m s^m \sum_{k=0}^{\nu l-m} s^k a_k.$$

Так как $a_k = 0$ при $k > l$ и $(a^{*(\nu-1)})_m = 0$ при $m > (\nu-1)l$, получаем

$$R_1 = \sum_{m=0}^{l-1} (a^{*(\nu-1)})_m s^m \sum_{k=l-m}^l s^k a_k, \quad R_2 = \sum_{m=l}^{(\nu-1)l} (a^{*(\nu-1)})_m s^m R_0. \quad (3.5)$$

Из (3.3)–(3.5) следует (3.1) и первое равенство в (3.2).

Далее рассуждаем по индукции. При $\nu = 2$ второе равенство в (3.2) очевидно. Применяя уже доказанное равенство

$$R_l(\nu-1) = R_l(\nu-2) R_0 + \sum_{m=0}^{l-1} (a^{*(\nu-2)})_m s^m R_{l-m}$$

и индуктивное предположение

$$R_l(\nu-1) = \sum_{m=0}^{l-1} s^m R_{l-m} \sum_{j=1}^{\nu-2} (a^{*j})_m R_0^{\nu-2-j} + R_l R_0^{\nu-2},$$

получаем второе равенство в (3.2):

$$\begin{aligned} R_l(\nu) &= R_l(\nu-1) R_0 + \sum_{m=0}^{l-1} (a^{*(\nu-1)})_m s^m R_{l-m} = \\ &= R_0 \left[\sum_{m=0}^{l-1} s^m R_{l-m} \sum_{j=1}^{\nu-2} (a^{*j})_m R_0^{\nu-2-j} + R_l R_0^{\nu-2} \right] + \sum_{m=0}^{l-1} (a^{*(\nu-1)})_m s^m R_{l-m} = \\ &= \sum_{m=0}^{l-1} s^m R_{l-m} \sum_{j=1}^{\nu-1} (a^{*j})_m R_0^{\nu-1-j} + R_l R_0^{\nu-1}. \end{aligned}$$

Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. Пусть Z — гауссовская случайная величина со значениями в H , $E Z = 0$, $b_1^2, b_2^2, \dots$ — собственные числа ее ковариационного оператора, $f_1, f_2, \dots$ — соответствующие собственные векторы, составляющие ортонормированный базис. Тогда для каждого $x \in H$

$$E \exp \{it |Z + x|^2\} = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - 2it b_j^2)^{-1/2} \exp \{it (1 - 2it b_j^2)^{-1} (x, f_j)^2\}.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из равенства

$$E \exp \{it (\eta b_j + x_j)^2\} = (1 - 2it b_j^2)^{-1/2} \exp \{it x_j^2 (1 - 2it b_j^2)^{-1}\},$$

где x_j, b_j — любые числа (см. также [24, с. 82; 20, (2.10)]). Определим меру

$$\begin{aligned} Q(\nu, dy) &= (\bar{F} - F)(dy) \equiv \\ &\equiv [P(|X| > L) - I_{\{|y| > L\}}(y)] F(dy) / P(|X| \leq L) \quad \text{при } \nu = 1, 2; \\ Q(\nu, dy) &= (\bar{F} - \Phi)(dy) \quad \text{при } \nu \geq 3. \end{aligned}$$

Лемма 3.3. Пусть x и z — некоторые фиксированные элементы из H_C , а $\psi(y)$, $y \in H$, обозначает любую из следующих функций:

$$(A_t y, x), \quad \|A_t y\|^2, \quad (A_t y, x)^2, \quad (A_t y, x) (A_t y, z).$$

Тогда

$$\int \psi(y) (\bar{F} - \Phi)(dy) = \int \psi(y) Q(1, dy),$$

причем

$$\int (\bar{F} - \Phi)(dy) = 0.$$

Доказательство. Утверждение следует из равенства $EX = EY$ и совпадения ковариационных операторов X и Y (см. также [20, (2.13)]).

Замечание. Лемма 3.3 останется справедливой, если A_γ заменить на $u \in H$.

Лемма 3.4. Пусть $\mu \geq 1$, $\nu \in \mathbb{N}$. Справедливы неравенства

$$\beta_{\mu, \nu} \equiv \int |y|^\mu |Q(\nu, dy)| \leq c(\mu) \begin{cases} \beta_\mu(n), & \nu \leq 2, \\ \bar{\beta}_\mu, & \nu \geq 3, \mu \geq 2. \end{cases}$$

Доказательство. Из определения $Q(\nu, dy)$ следует, что

$$\beta_{\mu, \nu} \leq \begin{cases} \beta_\mu(n) + \bar{\beta}_\mu P(|X| > L) / P(|X| \leq L), & \nu \leq 2, \\ \bar{\beta}_\mu + \sigma^\mu, & \nu \geq 3. \end{cases}$$

Заметим, что вследствие (1.16) и (1.17) верно неравенство $P(|X| > L) \leq 1/2$. Применяя неравенство Чебышева и условие (1.17), получаем

$$\sigma^2 = \bar{\beta}_2 + \beta_2(n) \leq \bar{\beta}_2 + 2\beta_3(n)/\sigma\sqrt{n} \leq \bar{\beta}_2 + \sigma^2/2.$$

Отсюда вытекает, что $\sigma^2 \leq 2\bar{\beta}_2$. С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера $\bar{\beta}_2^{\mu/2} \leq \bar{\beta}_\mu$ при $\mu \geq 2$. Следовательно, $\sigma^\mu \leq c(\mu)\bar{\beta}_\mu$, $\mu \geq 2$. Далее, при $\mu \geq 2$

$$\bar{\beta}_\mu P(|X| > L) \leq c(\mu)\sigma^\mu (\sqrt{n})^{\mu-2} P(|X| > L) \leq c_1(\mu)\beta_\mu(n)/n.$$

Лемма 3.4 доказана при $\mu \geq 2$. В случае $1 \leq \mu < 2$ доказательство упрощается. Нужно лишь заметить, что при $\mu < 2$ имеем $\bar{\beta}_\mu < \sigma^\mu$ и $\bar{\beta}_\mu P(|X| > L) \leq 2\beta_\mu(n)/n^{\mu/2}$.

Лемма 3.5. Положим $\sum_{q=1}^v \mu_q = M$.

1. Если $1 \leq \mu_q \leq 2$ при $1 \leq q \leq p \leq v$, $\mu_q \geq 3$ при $p+1 \leq q \leq v$, то

$$\left[\prod_{q=1}^p \beta_{\mu_q}(n) \right] \prod_{q=p+1}^v \bar{\beta}_{\mu_q} \leq c(\{\mu_q\}) \beta_2(n) \sigma^{M-2} n^{(M-2v)/2}. \quad (3.6)$$

2. Если $M = j+3v$, $\mu_q \geq 3$, $q = 1, \dots, v$, то

$$\prod_{q=1}^v \bar{\beta}_{\mu_q} \leq c(\{\mu_q\}) \bar{\beta}_{j+v+2} \sigma^{2v-2}. \quad (3.7)$$

3. Если $M = j+3v \leq k-2+2v$, $\mu_q \geq 3$, $q = 1, \dots, v$, то

$$\begin{aligned} \beta_{\mu_1}(n) \prod_{q=2}^v \beta_{\mu_q} &\leq c(\{\mu_q\}) \beta_{j+3}(n) \sigma^{3v-3} (\sqrt{n})^{v-1} \leq \\ &\leq c(k, \{\mu_q\}) \beta_k(n) \sigma^{j+3v-k} (\sqrt{n})^{-k+2+j+v}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Доказательство. 1. Применяя неравенство Чебышева, получим

$$\prod_{q=1}^p \beta_{\mu_q}(n) \leq c(\{\mu_q\}) (\beta_2(n))^p (\sigma\sqrt{n})^{m_p-2p},$$

где $m_p = \sum_{q=1}^p \mu_q$. Отсюда

$$\prod_{q=1}^p \beta_{\mu_q}(n) \leq c(\{\mu_q\}) \beta_2(n) \sigma^{m_p-2}(\sqrt{n})^{m_p-2p}. \quad (3.9)$$

Далее, из неравенства $\bar{\beta}_{\mu_q} \leq c(\{\mu_q\}) \sigma^{\mu_q}(\sqrt{n})^{\mu_q-2}$ следует, что

$$\prod_{q=p+1}^v \bar{\beta}_{\mu_q} \leq c(\{\mu_q\}) \sigma^{M-m_p}(\sqrt{n})^{M-m_p-2(v-p)}. \quad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) вытекает оценка (3.6).

2. Применяя неравенство Ляпунова (см. например, [4, с. 30]), получаем, что для любого $N \geq \mu_q$

$$\bar{\beta}_{\mu_q} \leq (\bar{\beta}_N^{\mu_q-2} \bar{\beta}_2^{N-\mu_q})^{1/(N-2)}. \quad (3.11)$$

Полагая в (3.11) $N = j+v+2$, приходим к оценке

$$\prod_{q=1}^v \bar{\beta}_{\mu_q} \leq \bar{\beta}_{j+v+2} \bar{\beta}_2^{v-1}.$$

Поскольку $\bar{\beta}_2 \leq \sigma^2$, неравенство (3.7) доказано.

3. Заметим, что неравенство (3.11) остается верным после замены «урезанных» абсолютных моментов на обычные абсолютные моменты. Полагая $N = j+v-\mu_1+4$, приходим к оценке

$$\prod_{q=2}^v \beta_{\mu_q} \leq \beta_N \sigma^{2v-4}. \quad (3.12)$$

Далее, $\beta_N = \bar{\beta}_N + \beta_N(n)$. С одной стороны, $\bar{\beta}_N \leq c(n) \sigma^N(\sqrt{n})^{N-2}$. С другой стороны, применяя оценку типа Чебышева и условие (1.18), получаем

$$\beta_N(n)/\sigma^N(\sqrt{n})^{N-2} \leq c(k) \beta_k(n)/\sigma^k(\sqrt{n})^{k-2} \leq c(k),$$

поскольку $N \leq k-1$. Следовательно,

$$\beta_N \leq c(k) \sigma^N(\sqrt{n})^{N-2}. \quad (3.13)$$

Так как $\mu_1 \leq j+3$, имеем

$$\beta_{\mu_1}(n) \leq c(\mu_1) \beta_{j+3}(n) (\sigma \sqrt{n})^{\mu_1-j-3}. \quad (3.14)$$

Оценки (3.11)—(3.14) влекут первое неравенство в (3.8). Чтобы получить второе, достаточно применить неравенство Чебышева.

Лемма 3.6. Пусть $y_q \in H_C$, $q = 1, \dots, v$, $\sum_{q=1}^v m_q = M$. Тогда

$$E_0 \equiv E \prod_{q=1}^v (y_q, \alpha)^{m_q} = E \eta^M (S_M(\{m_q\}))^{-1} \sum_{\{m_{pq}\}}^{\{m_q\}} S_{M/2}(\{m_{pq}\}) \prod_{p,q=1}^v (y_p, y_q)^{m_{pq}}.$$

Доказательство. Обозначим $\xi_q = (y_q, \alpha)$. Легко видеть, что E_0 является коэффициентом при $S_M(\{m_q\}) \prod_{q=1}^v \lambda_q^{m_q}$ в $E_1 = E(\sum_{q=1}^v \lambda_q \xi_q)^M$. Имеем

$$E_1 = E \left(\sum_{q=1}^v \lambda_q y_q, \alpha \right)^M = E \eta^M \left\| \sum_{q=1}^v \lambda_q y_q \right\|^M.$$

Поэтому далее можно считать, что M четно. Так как

$$\left\| \sum_{q=1}^v \lambda_q y_q \right\|^M = \sum_{\{m_{pq}\}}^{M/2} S_{M/2}(\{m_{pq}\}) \prod_{p,q=1}^v (\lambda_p y_p, \lambda_q y_q)^{m_{pq}},$$

лемма 3.6 доказана.

Лемма 3.7. Пусть $s \in \mathbb{C}$, $y_q \in H_{\mathbb{C}}$, $0 \leq \lambda_q \leq 1$, $q = 1, \dots, v$, $\sum_{q=1}^v m_q = M$. Тогда

$$\begin{aligned} A(\{m_q\}) &\equiv E \exp \left\{ s \sum_{q=1}^v \lambda_q (y_q, \alpha) \right\} \prod_{q=1}^v (y_q, \alpha)^{m_q} = \\ &= C(m, \{m_q\}, \{t_{pq}\}, \{s_{pq}\}) \exp \left\{ \frac{s^2}{2} \left\| \sum_{q=1}^v \lambda_q y_q \right\|^2 \right\} \sum' s^{M-m} \prod_{q=1}^v \left[\lambda_q^{s_{0q}} \prod_{p=1}^v (y_p, y_q)^{t_{pq} + s_{pq}} \right], \end{aligned}$$

где $C(m, \{m_q\}, \{t_{pq}\}, \{s_{pq}\}) = \binom{M}{m} E \eta^m S_{m/2}(\{t_{pq}\}) S_{M-m}(\{s_{pq}\})$, $\sum'$ означает суммирование по всем таким целым m , матрицам $\{t_{pq}\}$ и $\{s_{pq}\}$ размеров $v \times v$, что

$$0 \leq m \leq M, \quad \sum_{p,q=1}^v t_{pq} = m/2, \quad \sum_{p,q=1}^v s_{pq} = M - m,$$

$$\sum_{p=1}^v (t_{pq} + t_{qp} + s_{qp}) = m_q \quad (q = 1, \dots, v),$$

причем $s_{0q} \equiv \sum_{p=1}^v s_{pq} = 0$, если $\lambda_q = 0$, $0^0 \equiv 1$. 2.3

Доказательство см. в [8, лемма 1.4], а также в [17, лемма 1.8].

Лемма 3.8. Пусть $\{\mu_{pq}\}$ — матрица размеров $v \times v$,

$$\mu_q = \sum_{p=1}^v (\mu_{pq} + \mu_{qp}), \quad 0 \leq \lambda_q \leq 1, \quad q = 1, \dots, v, \quad s = (2it/n)^{1/2}, \quad b > 0.$$

1. Если $\mu_q \geq 3$, $q = 1, \dots, v$, то

$$A(\{\mu_{pq}\}) \equiv \left| E \exp \left\{ \frac{s^2}{2} \left\| \sum_{q=1}^v \lambda_q A_b \overline{W}_q \right\|^2 \right\} \prod_{p,q=1}^v (A_b \overline{W}_p, A_b \overline{W}_q)^{\mu_{pq}} \right| \leq c(\{\mu_q\}) \prod_{q=1}^v \overline{\beta}_{\mu_q}.$$

2. Пусть $1 \leq v_1 \leq v$. Если $\lambda_q = 0$ и $\mu_q = 1$ или $\mu_q = 2$ при $1 \leq q \leq v_1$, $\mu_q \geq 3$ при $v_1 + 1 \leq q \leq v$, то

$$A(\{\mu_{pq}\}) \leq c(\{\mu_q\}) \left[\prod_{q=1}^{v_1} \beta_{\mu_q}(n) \right] \prod_{q=v_1+1}^v \bar{\beta}_{\mu_q}. \quad (3.16)$$

Доказательство. 1. Очевидно, что при любых $y_1, \dots, y_v$ из H

$$\left| \exp \left\{ \frac{s^2}{2} \left\| \sum_{q=1}^v \lambda_q A_b y_q \right\|^2 \right\} \right| \leq 1. \quad (3.17)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A(\{\mu_{pq}\}) &\leq \int \dots \int_{\leftarrow v \rightarrow} \left| \prod_{p,q=1}^v (A_b y_p, A_b y_q)^{\mu_{pq}} \right| \prod_{q=1}^v |(\bar{F} - \Phi)(dy_q)| \leq \\ &\leq \prod_{q=1}^v \int |y_q|^{\mu_q} |(\bar{F} - \Phi)(dy_q)|. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3.4, приходим к неравенству (3.15).

2. Из леммы 3.3 получаем, что

$$A(\{\mu_{pq}\}) = \left| \int \dots \int_{\leftarrow v \rightarrow} \exp \left\{ \frac{s^2}{2} \left\| \sum_{q=v_1+1}^v \lambda_q A_b y_q \right\|^2 \right\} \left[\prod_{p,q=1}^v (A_b y_p, A_b y_q)^{\mu_{pq}} \right] \prod_{q=1}^v Q(\mu_q, dy_q) \right|.$$

Воспользовавшись (3.17) и внося модуль под знак интеграла, приходим к оценке

$$A(\{\mu_{pq}\}) \leq \prod_{q=1}^v \int |y_q|^{\mu_q} |Q(\mu_q, dy_q)|. \quad (3.18)$$

Из (3.18) и леммы 3.4 следует неравенство (3.16).

Лемма 3.9. Пусть $0 \leq \lambda_q \leq 1$, $m_q \geq 0$ целое, $\xi_q = (A_b \overline{W}_q, \alpha)$, $q = 1, \dots, v$, $M = \sum_{q=1}^v m_q$ и $s = (2it/n)^{1/2}$.

1. Пусть $1 \leq v_1 \leq v$. Если $\lambda_q = 0$ и $m_q = 1$ или $m_q = 2$ при $1 \leq q \leq v_1$, $m_q \geq 3$ при $v_1 + 1 \leq q \leq v$, то

$$\begin{aligned} A(\{m_q\}) &\equiv \left| E E_\alpha \prod_{q=1}^v (s \xi_q)^{m_q} \exp \{s \lambda_q \xi_q\} \right| \leq \\ &\leq c(\{m_q\}) n^{-v} \beta_2(n) \sigma^{-2} \{ (|t| \sigma^2)^M + (|t| \sigma^2)^{M/2} \}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

2. Если $m_q \geq 3$, $q = 1, \dots, v$, $M = k-1+2v$, то

$$A(\{m_q\}) \leq c(\{m_q\}) (n^{-M} \bar{\beta}_{k+1} / \sigma^{k+1}) \{ (|t| \sigma^2)^M + (|t| \sigma^2)^{M/2} \}. \quad (3.20)$$

Доказательство. 1. В силу леммы 3.7

$$\begin{aligned} E E_{\alpha} \prod_{q=1}^{\nu} (s \xi_q)^{m_q} \exp \{s \lambda_q \xi_q\} &= \sum' c(m, \{m_q\}, \{t_{pq}\}, \{s_{pq}\}) \left(\prod_{q=1}^{\nu} \lambda_q^{s_{0q}} \right) s^{2M-m} \times \\ &\times E \exp \left\{ \frac{s^2}{2} \left\| \sum_{q=1}^{\nu} \lambda_q A_b \overline{W}_q \right\|^2 \right\} \prod_{p,q=1}^{\nu} (A_b \overline{W}_p, A_b \overline{W}_q)^{\mu_{pq}}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $\mu_{pq} = s_{pq} + t_{pq}$. Заметим, что $\sum_{p,q=1}^{\nu} \mu_{pq} = M - m/2$. Применяя теперь (3.16) и учитывая условия $\mu_q = m_q + s_{0q}$; $s_{0q} = 0$, если $\lambda_q = 0$ (см. лемму 3.7), мы приходим к оценке

$$A(\{m_q\}) \leq \sum' c(m, \{m_q\}, \{t_{pq}\}, \{s_{pq}\}) (|t|/n)^{M-m/2} \left(\prod_{q=1}^{\nu_1} \beta_{\mu_q}(n) \right) \prod_{q=\nu_1+1}^{\nu} \overline{\beta}_{\mu_q}, \quad (3.22)$$

где $\mu_q = \sum_{p=1}^{\nu} (\mu_{pq} + \mu_{qp})$. Из (3.22) и (3.6) следует, что

$$A(\{m_q\}) \leq \sum' c(m, \{m_q\}, \{t_{pq}\}, \{s_{pq}\}) (|t|/n)^{M-m/2} \beta_2(n) \sigma^{2M-m-2} n^{(2M-m-2\nu)/2}. \quad (3.23)$$

Учитывая неравенство $M/2 \leq M - m/2 \leq M$, получим, что

$$(|t| \sigma^2)^{M-m/2} \leq (|t| \sigma^2)^M + (|t| \sigma^2)^{M/2} \quad (3.24)$$

Поэтому из (3.23) вытекает неравенство (3.19).

2. В силу (3.21) и (3.15)

$$A(\{m_q\}) \leq \sum' c(\{m_q\}, \{t_{pq}\}, \{s_{pq}\}) (|t|/n)^{M-m/2} \prod_{q=1}^{\nu} \overline{\beta}_{m_q},$$

где $M = k - 1 + 2\nu$. Применяя теперь неравенство (3.7) с $j = k - 1 - \nu$, приходим к (3.20).

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

4.1. Доказательство леммы 2.1. В силу леммы 3.2 и формулы (1.7)

$$\begin{aligned} E \exp \{it \mid ((n-\nu)/n)^{1/2} Y + n^{-1/2} \overline{V}_{\nu} \mid^2\} &= \\ &= g(\tau) E \exp \left\{ \frac{it}{n} \|A_{\tau} \overline{V}_{\nu}\|^2 \right\} = g(\tau) E E_{\alpha} \exp \left\{ s \sum_{q=1}^{\nu} \xi_q \right\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $s = (2it/n)^{1/2}$, $\xi_q = (A_{\tau} \overline{W}_q, \alpha)$. Поменяем порядок интегрирования. Обозначим $f(s, \alpha) = E_{\overline{W}_1} \exp \{s \xi_1\}$. Тогда

$$E_{\overline{W}_1, \dots, \overline{W}_{\nu}} \exp \left\{ s \sum_{q=1}^{\nu} \xi_q \right\} = f^{\nu}(s, \alpha). \quad (4.2)$$

По формуле Тейлора $f(s, \alpha) = \sum_{j=0}^l \hat{d}_j(A_\tau \alpha) s^j$, где

$$\hat{d}_j(A_\tau \alpha) = E_{\overline{W}_1} \xi_1^j / j!, \quad j = 0, 1, \dots, l-1,$$

$$\hat{d}_l(A_\tau \alpha) = \int_0^1 \frac{(1-\lambda)^{l-1}}{(l-1)!} E_{\overline{W}_1} \exp\{s \lambda \xi_1\} \xi_1^l d\lambda;$$

число l будет определено ниже. Отсюда

$$f^\nu(s, \alpha) = \psi^\nu(s, \alpha) + r_1(\alpha), \quad (4.3)$$

где

$$\psi(s, \alpha) = \sum_{j=3}^l \hat{d}_j(A_\tau \alpha) s^j,$$

$$r_1(\alpha) = \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\mu}{\nu} [\hat{d}_1(A_\tau \alpha) s + \hat{d}_2(A_\tau \alpha) s^2]^\mu \left(\sum_{j=3}^l \hat{d}_j(A_\tau \alpha) s^j \right)^{\nu-\mu}.$$

Легко видеть, что $\psi(s, \alpha) = s^3 \sum_{j=0}^{l-3} a_j s^j$ с $a_j = \hat{d}_{j+3}(A_\tau \alpha)$. Рассмотрим случай $\nu \geq 2$. В силу леммы 3.1

$$\psi^\nu(s, \alpha) = s^{3\nu} \left(\sum_{j=0}^{l-4} a_j^{*\nu} s^j + R_{l-3}(\nu, \alpha) \right), \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} R_{l-3}(\nu, \alpha) &= \sum_{i=0}^{l-4} s^i R_{l-3-i} \sum_{j=1}^{\nu-1} (a^{*j})_i R_0^{\nu-1-j} + R_{l-3} R_0^{\nu-1}, \\ R_q &= \sum_{j=q}^{l-3} a_j s^j = \left(\sum_{j=q+3}^l \hat{d}_j(A_\tau \alpha) s^j \right) \frac{1}{s^3} = \\ &= s^q \int_0^1 \frac{(1-\lambda)^{q+2}}{(q+2)!} E_{\overline{W}_1} \exp\{s \lambda \xi_1\} \xi_1^{q+3} d\lambda, \quad q = 0, 1, \dots, l-3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Оценим величину $s^{3\nu+i} E R_{l-3-i} (a^{*j})_i R_0^{\nu-1-j}$, $i=0, 1, \dots, l-3$, $j=1, \dots, \nu-1$. Для этого достаточно оценить

$$B_{i,j} \equiv s^{l+3(\nu-1)} E E_{\overline{W}_1} \xi_1^{l-i} \exp\{s \lambda_1 \xi_1\} \left(\prod_{q=2}^{j+1} E_{\overline{W}_q} \xi_q^{t_q+3} \right) \prod_{q=j+2}^{\nu} E_{\overline{W}_q} \exp\{s \lambda_q \xi_q\} \xi_q^3,$$

где $0 \leq \lambda_q \leq 1$, $t_q \geq 0$ целые, $q = 1, \dots, \nu$, $\sum_{q=2}^{j+1} t_q = i$. Меняя порядок интегрирования, имеем

$$B_{i,j} = s^{l+3(\nu-1)} E E_{\alpha} \prod_{q=1}^{\nu} \xi_q^{m_q} \exp \{s \lambda_q \xi_q\},$$

где $m_1 = l-i$, $m_q = t_q+3$ при $q = 2, \dots, j+1$, $m_q = 3$ при $q \geq j+2$, $\lambda_q = 0$ при $q = 2, \dots, j+1$. Положим $l+3(\nu-1) = k-1+2\nu$. Отсюда имеем $l = k+2-\nu$, $\sum_{q=1}^{\nu} m_q = k-1+2\nu$ и $t_q+3 \leq l-1 \leq k+2-\nu$ для любого $q = 2, \dots, j+1$. Применяя неравенство (3.20), получим, что $|B_{i,j}|$ оценивается сверху величиной

$$c(k, \nu) n^{-(k-1+2\nu)/2} \bar{\beta}_{k+1} \sigma^{-k-1} \left\{ (|t| \sigma^2)^{k-1+2\nu} + (|t| \sigma^2)^{(k-1+2\nu)/2} \right\}. \quad (4.6)$$

Аналогично доказывается, что $|s^{3\nu} E R_{l-3} R_0^{\nu-1}|$ также оценивается сверху величиной (4.6), если $l = k+2-\nu$. Следовательно, при $l = k+2-\nu$

$$\begin{aligned} & |s^{3\nu} E R_{l-3}(\nu, \alpha)| \leq \\ & \leq c(k, \nu) n^{-(k-1+2\nu)/2} \frac{\bar{\beta}_{k+1}}{\sigma^{k+1}} \left\{ (|t| \sigma^2)^{k-1+2\nu} + (|t| \sigma^2)^{(k-1+2\nu)/2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Оценим $E r_1(\alpha)$. В силу (4.5) достаточно оценить

$$E_0 \equiv E (\hat{d}_1 (A_{\tau} \alpha) s)^{n_1} (\hat{d}_2 (A_{\tau} \alpha) s^2)^{n_2} (s^3 E_{\bar{W}_1} \xi_1^3 \exp \{s \lambda \xi_1\})^{\nu-\mu},$$

где $n_1 + n_2 = \mu$, $1 \leq \mu \leq \nu$. Меняя порядок интегрирования и применяя неравенство (3.19) с $m_q = 1$ при $q = 1, \dots, n_1$, $m_q = 2$ при $q = n_1+1, \dots, \mu$, $m_q = 3$ при $q = \mu+1, \dots, \nu$, получим

$$|E_0| \leq c(M) n^{-\nu} \beta_2(n) \sigma^{-2} \left\{ (|t| \sigma^2)^M + (|t| \sigma^2)^{M/2} \right\},$$

где $M = \sum_{q=1}^{\nu} m_q$. Так как $\nu \leq M \leq 3\nu-1$, мы приходим к оценке

$$|E r_1(\alpha)| \leq c(\nu) n^{-\nu} \beta_2(n) \sigma^{-2} \left\{ (|t| \sigma^2)^{3\nu-1} + (|t| \sigma^2)^{\nu/2} \right\}. \quad (4.8)$$

Из (4.1)–(4.4), (4.7) и (4.8) вытекает, что

$$E \exp \left\{ it \left| ((n-\nu)/n)^{1/2} Y + n^{-1/2} \bar{V}_{\nu} \right|^2 \right\} = g(\tau) \sum_{j=0}^{k-2-\nu} E (a^{*\nu})_j s^{j+3\nu} + R(\nu), \quad (4.9)$$

где $|R(\nu)|$ удовлетворяет неравенству (2.2). Далее,

$$(a^{*\nu})_j = \sum_{\{m_q\}_1^{\nu}} \prod_{q=1}^{\nu} \hat{d}_{m_q+3} (A_{\tau} \alpha). \quad (4.10)$$

Поскольку $m_q+3 \leq j+3 \leq k+1-\nu$, в (4.10) $\hat{d}_{m_q+3} (A_{\tau} \alpha)$ можно заменить на $\bar{d}_{\nu, m_q+3} (A_{\tau} \alpha)$. Так как $\bar{d}_{\nu, \mu} (A_{\tau} \alpha) = 0$ при $\mu = 0, 1, 2$ и $\mu \geq k+2-\nu$, получаем

$$\sum_{\{m_q\}_1^{\nu}} \prod_{q=1}^{\nu} \bar{d}_{\nu, m_q+3} (A_{\tau} \alpha) = \sum_{\{m_q\}_1^{\nu}} \prod_{q=1}^{j+3\nu} \bar{d}_{\nu, m_q} (A_{\tau} \alpha) = (\bar{d}_{\nu}^{*\nu} (A_{\tau} \alpha))_{j+3\nu}. \quad (4.11)$$

Утверждение леммы при $\nu \geq 2$ следует из соотношений (4.9) — (4.11).

В равенстве (4.3) положим $\nu = 1$, $l = k+1$. Необходимо оценить $E \hat{d}_{k+1}(A_\tau \alpha) s^{k+1}$ и $E r_1(\alpha)$. Обращаясь к неравенству (3.20), придем к оценке

$$|E \hat{d}_{k+1}(A_\tau \alpha) s^{k+1}| \leq c(k) n^{-(k+1)/2} \frac{\bar{\beta}_{k+1}}{\sigma^{k+1}} \{ (|t| \sigma^2)^{k+1} + (|t| \sigma^2)^{(k+1)/2} \}. \quad (4.12)$$

Легко видеть, что

$$E \hat{d}_1(A_\tau \alpha) = 0, \quad (4.13)$$

$$|E \hat{d}_2(A_\tau \alpha) s^2| \leq \frac{|t|}{n} |E E_\alpha(A_\tau \bar{W}_1, \alpha)^2| \leq \frac{|t|}{n} \int |y|^2 |Q(2, dy)| \leq c |t| \beta_2(n)/n. \quad (4.14)$$

Из (4.1) — (4.3), (4.12) — (4.14) вытекает утверждение леммы 2.1 при $\nu = 1$.

Замечание. В силу леммы 3.6 $E(\bar{d}_\nu^{*\nu}(A_\tau \alpha))_p = 0$ для нечетных p . Поэтому в разложении из леммы 2.1 можно считать, что $j+3\nu$ — четные числа.

4.2. Доказательство теоремы 2.2. Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 4.1. *Справедлива оценка*

$$|E(\bar{d}_\nu^{*\nu}(A_\tau \alpha))_{j+3\nu}| \leq c(j+3\nu) \bar{\beta}_{j+\nu+2} \sigma^{2\nu-2}.$$

Доказательство. По определению последовательности $\bar{d}_\nu(A_\tau \alpha)$

$$(\bar{d}_\nu^{*\nu}(A_\tau \alpha))_{j+3\nu} = \sum_{\{m_q \geq 3\}_1^{\nu}}^{j+3\nu} \prod_{q=1}^{\nu} E_{\bar{W}_q}(A_\tau \bar{W}_q, \alpha)^{m_q/m_q!}. \quad (4.15)$$

Рассмотрим величину $B = E \prod_{q=1}^{\nu} E_{\bar{W}_q}(A_\tau \bar{W}_q, \alpha)^{m_q}$. Меняя порядок интегрирования и используя лемму 3.6, мы приходим к равенству

$$B = \sum_{\{m_{pq}\}}^{\{m_q\}} c(\{m_{pq}\}) E \prod_{p,q=1}^{\nu} (A_\tau \bar{W}_p, A_\tau \bar{W}_q)^{m_{pq}}. \quad (4.16)$$

Применяя теперь неравенство (3.15), получим оценку

$$|B| \leq c(\{m_q\}) \prod_{q=1}^{\nu} \bar{\beta}_{m_q}. \quad (4.17)$$

Из (4.15) — (4.17) и (3.7) вытекает утверждение предложения 4.1.

Предложение 4.2. *Пусть $2 \leq p \leq N$. Если $\bar{\beta}_2 \geq \sigma^2/2$, то*

$$\bar{\beta}_p \leq c(N-p) \bar{\beta}_N \sigma^{p-N}.$$

Доказательство. В силу неравенства Ляпунова имеем $\bar{\beta}_p \leq (\bar{\beta}_N^{p-2} \bar{\beta}_2^{N-p})^{1/(N-2)}$. Применяя неравенство Гёльдера, получаем оценку

$(\overline{\beta}_2/\overline{\beta}_N)^{(N-p)/(N-2)} \leq \overline{\beta}_2^{(p-N)/2}$. Из этих неравенств и представления $p-2 = N-2-(N-p)$ вытекает, что $\overline{\beta}_p \leq \overline{\beta}_N \overline{\beta}_2^{(p-N)/2}$. Воспользовавшись теперь условием $\overline{\beta}_2 \geq \sigma^2/2$, придем к утверждению предложения 4.2.

Предложение 4.3. Пусть $\nu = 1, \dots, k-2$, $k \geq 3$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{P}(\nu, n, t) &= \binom{n}{\nu} E \exp \left\{ it \left| ((n-\nu)/n)^{1/2} Y + n^{-1/2} \overline{V}_\nu \right|^2 \right\} = \\ &= g(\tau) \sum_{\nu/2 \leq p \leq (k-2)/2} n^{-p} \sum_{\mu, \nu, 2p \leq \mu \leq \nu} (2it)^{\mu+p} E(\overline{d}_\nu^{\nu\mu}(A_\tau \alpha))_{2\mu+2p} \frac{s(\nu, \mu)}{\nu!} + R_1(\nu), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |R_1(\nu)| &\leq c(k, \nu) |g(\tau)| [n^{-(k-1)/2} \overline{\beta}_{k+1}/\sigma^{k+1} + \beta_2(n)/\sigma^2] \times \\ &\times \left\{ (|t| \sigma^2)^{k-1+2\nu} + (|t| \sigma^2)^{k_\nu/2} \right\} = R(t, \nu, k, n), \quad k_\nu = \max \{2, \nu\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Из представления $\binom{n}{\nu} = \sum_{\mu=1}^{\nu} s(\nu, \mu) n^\mu / \nu!$, неравенства $\binom{n}{\nu} \leq n^\nu / \nu!$ и леммы 2.1 следует, что

$$\overline{P}(\nu, n, t) = g(\tau) \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{s(\nu, \mu)}{\nu!} \sum_{j=0}^{k-2-\nu} E(\overline{d}_\nu^{\nu\mu}(A_\tau \alpha))_{j+3\nu} (2it/n)^{(j+3\nu)/2} n^\mu + R_0(\nu), \quad (4.18)$$

причем $|R_0(\nu)| \leq R(t, \nu, k, n)$. В силу предложения 4.1

$$\begin{aligned} B(\mu, \nu, n, j) &\equiv \left| E(\overline{d}_\nu^{\nu\mu}(A_\tau \alpha))_{j+3\nu} (2it/n)^{(j+3\nu)/2} n^\mu \right| \leq \\ &\leq c(j, \nu) \overline{\beta}_{j+\nu+2} \sigma^{2\nu-2} |t|^{(j+3\nu)/2} n^{(2\mu-j-3\nu)/2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$B(\mu, \nu, n, j) \leq c(j, \nu) \overline{\beta}_{j+\nu+2} \sigma^{2\nu-2} |t|^{(j+3\nu)/2} n^{-(k-1)/2}, \quad (4.19)$$

если

$$2\mu - j - 3\nu \leq -k + 1. \quad (4.20)$$

Из условия (1.17) следует, что $\overline{\beta}_2 \geq \sigma^2/2$. Поэтому соотношения (4.19), (4.20) и предложение 4.2 приводят к неравенству

$$B(\mu, \nu, n, j) \leq c(n) \overline{\beta}_N \sigma^{j+3\nu-N} |t|^{(j+3\nu)/2} n^{-(k-1)/2}, \quad (4.21)$$

справедливому при любом $N \geq j+\nu+2$. Далее, при условии (4.20) выполнено неравенство $k+1 \leq j+3\nu$. С другой стороны, $j+3\nu \leq k-2+2\nu$. Отсюда

$$\begin{aligned} (|t| \sigma^2)^{(j+3\nu)/2} &\leq \max \left\{ (|t| \sigma^2)^{(k-2+2\nu)/2}, (|t| \sigma^2)^{(k+1)/2} \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ (|t| \sigma^2)^{k-1+2\nu}, (|t| \sigma^2)^{k_\nu/2} \right\}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство очевидно и приведено лишь для сравнения с оценкой остатка леммы 2.1. Таким образом, из разложения (4.18) и оценки (4.21) при $N = k+1$ вытекает, что

$$\bar{P}(\nu, n, t) =$$

$$= g(\tau) \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{j=0}^{k-2-3\nu+2\mu} n^{-(j+3\nu-2\mu)/2} (2it)^{j+3\nu/2} E(\bar{d}_{\nu}^{\tau\nu}(A_{\tau}\alpha))_{j+3\nu} \frac{s(\nu, \mu)}{\nu!} + R_1(\nu), \quad (4.22)$$

где $|R_1(\nu)| \leq R(t, \nu, k, n)$.

Сделаем в (4.22) замену переменной $j+3\nu-2\mu = 2p$. Тогда

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{j=0}^{k-2-3\nu+2\mu} \dots = \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{3\nu/2-\mu \leq p \leq (k-2)/2} \dots$$

Меняя порядок суммирования, приходим к утверждению предложения 4.3.

Предложение 4.4. В условиях предложения 4.3 справедливо разложение

$$\sum_{\nu=1}^{k-2} \bar{P}(\nu, n, t) = g(\tau) \sum_{1 \leq p \leq (k-2)/2} \sum_{\nu=1}^{2p} n^{-p} \sum_{\mu, 2p \leq \mu \leq \nu} (2it)^{\mu+p} E(\bar{d}_{\nu}^{\tau\nu}(A_{\tau}\alpha))_{2\mu+2p} \frac{s(\nu, \mu)}{\nu!} + R, \quad (4.23)$$

$$\text{где } |R| \leq c(k) |g(t/2)| [(|t| \sigma^2)^{3k-5} + |t| \sigma^2] \{\bar{\beta}_{k+1}/\sigma^{k+1} n^{(k-1)/2} + \beta_2(n)/\sigma^2\} = \\ = R(t, k, n).$$

Доказательство. В силу предложения 4.3

$$\sum_{\nu=1}^{k-2} \bar{P}(\nu, n, t) =$$

$$= g(\tau) \sum_{\nu=1}^{k-2} \sum_{\nu/2 \leq p \leq (k-2)/2} n^{-p} \sum_{\mu, 2p \leq \mu \leq \nu} (2it)^{\mu+p} E(\bar{d}_{\nu}^{\tau\nu}(A_{\tau}\alpha))_{2\mu+2p} \frac{s(\nu, \mu)}{\nu!} + R,$$

где $|R| \leq (k-2) \max_{1 \leq \nu \leq k-2} R(t, \nu, k, n)$. Так как при условии (1.16)

$$\sum_{\nu=1}^{k-2} \sum_{\nu/2 \leq p \leq (k-2)/2} \dots = \sum_{1 \leq p \leq (k-2)/2} \sum_{\nu=1}^{2p} \dots,$$

$$\max_{1 \leq \nu \leq k-2} |g(\tau)| \{(|t| \sigma^2)^{k-1+2\nu} + (|t| \sigma^2)^{k/2}\} \leq 2 |g(t/2)| [(|t| \sigma^2)^{3k-5} + |t| \sigma^2],$$

предложение 4.4 доказано.

Предложение 4.5. Для любых $x_1, \dots, x_{\nu} \in H_C$ и $N, m_1, \dots, m_{\nu} \in \mathbb{N}$

$$E \exp \{(2it)^{1/2} (Y, \alpha)\} (T\alpha, \alpha)^N \prod_{q=1}^{\nu} (x_q, \alpha)^{m_q} =$$

$$= E \exp \{it (T\alpha, \alpha)\} (T\alpha, \alpha)^N \prod_{q=1}^{\nu} (x_q, \alpha)^{m_q} = g(t) E \|A_t T^{1/2} \alpha\|^{2N} \prod_{q=1}^{\nu} (A_t x_q, \alpha)^{m_q}. \quad (4.24)$$

Доказательство. Первое равенство в (4.24) вытекает из формулы $E_Y \exp \{(2it)^{1/2} (Y, \alpha)\} = \exp \{it(T\alpha, \alpha)\}$. Для доказательства второго достаточно применить представление

$$\begin{aligned} E \exp \{it(T\alpha, \alpha)\} (T\alpha, \alpha)^N \prod_{q=1}^v (x_q, \alpha)^{m_q} = \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k \sigma_j^2 u_j^2 \right)^N \left[\prod_{q=1}^v \left(\sum_{j=1}^k (x_q, e_j) u_j \right)^{m_q} \right] \times \\ \times \prod_{j=1}^k \exp \{it \sigma_j^2 u_j^2 - u_j^2/2\} du_j, \end{aligned}$$

а затем использовать замену $u_j(1 - 2it \sigma_j^2)^{1/2} = u_j$ точно так же, как это было сделано при выводе (1.9). Предложение 4.5 доказано.

Предложение 4.6. Пусть $Q_1, \dots, Q_v$ — заряды, определенные на σ -алгебре борелевских множеств пространства H . Для любых неотрицательных $\lambda_1, \dots, \lambda_v$ и $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \int \dots \int E \|A_t T^{1/2} \alpha\|^{2N} \prod_{q=1}^v (A_t y_q, \alpha)^{\lambda_q} Q_q(dy_q) \right| \leq \\ \leq c(N, v, \{\lambda_q\}) \sigma^{2N} \prod_{q=1}^v \int |y_q|^{\lambda_q} |Q_q(dy_q)|. \end{aligned}$$

Доказательство. В силу неравенства Шварца

$$\left| E \|A_t T^{1/2} \alpha\|^{2N} \prod_{q=1}^v (A_t y_q, \alpha)^{\lambda_q} \right| \leq E^{1/2} \|A_t T^{1/2} \alpha\|^{4N} E^{1/2} \prod_{q=1}^v |(A_t y_q, \alpha)|^{2\lambda_q}.$$

Как нетрудно проверить,

$$E \|A_t T^{1/2} \alpha\|^{4N} \leq c(N) \sigma^{4N}, \quad E |(A_t y, \alpha)|^{\lambda} \leq c(\lambda) |y|^{\lambda}$$

для любых $\lambda > 0$ и $y \in H$. С другой стороны, по обобщенному неравенству Гёльдера

$$E \prod_{q=1}^v |(A_t y_q, \alpha)|^{2\lambda_q} \leq \left(\prod_{q=1}^v E |(A_t y_q, \alpha)|^{2\nu\lambda_q} \right)^{1/\nu}.$$

Поэтому

$$\int \dots \int E^{1/2} \prod_{q=1}^v |(A_t y_q, \alpha)|^{2\lambda_q} |Q_q(dy_q)| \leq c(v, \{\lambda_q\}) \prod_{q=1}^v \int |y_q|^{\lambda_q} |Q_q(dy_q)|.$$

Предложение 4.6 доказано.

Предложение 4.7. В условиях предложения 4.3 справедливо разложение

$$\sum_{v=1}^{k-2} \bar{P}(v, n, t) = \sum_{1 \leq m \leq (k-2)/2} n^{-m} g(t) \bar{P}_{2m}(t) + R_2,$$

где $|R_2| \leq R(t, k, n)$ (см. предложение 4.4), а $\bar{P}_{2m}(t)$ определены так же, как функции $P_{2m}(t)$ в (2.3), с одним отличием: $(\bar{d}_v^{*v}(A_t \alpha))_{2l}$ заменены на $(\bar{d}_v^{*v}(A_t \alpha))_{2l}$.

Доказательство. Меняя порядок интегрирования и используя (4.24), находим, что

$$g(\tau) E(\bar{d}_v^{*v}(A_t \alpha))_{2l} = E \exp \{i \tau (T\alpha, \alpha)\} (\bar{d}_v^{*v}(\alpha))_{2l}.$$

Подставляя это выражение в правую часть равенства (4.23) и раскладывая $\exp \{-i \nu t (T\alpha, \alpha)/n\}$ по формуле Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{k-2} \bar{P}(v, n, t) &= \sum_{1 \leq p \leq (k-2)/2} \sum_{v=1}^{2p} \sum_{\mu, 2p \leq \mu \leq v} \sum_{j=0}^N \frac{n^{-j-p}}{j!} (2it)^{j+\mu+p} \left(-\frac{v}{2}\right)^j \frac{s(v, \mu)}{v!} \times \\ &\times E \exp \{it (T\alpha, \alpha)\} (T\alpha, \alpha)^j (\bar{d}_v^{*v}(\alpha))_{2\mu+2p} + R_1 + R, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где $N = [k/2] - p - 1$,

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{1 \leq p \leq (k-2)/2} \sum_{v=1}^{2p} \sum_{\mu, 2p \leq \mu \leq v} n^{-p} (2it)^{\mu+p} \frac{s(v, \mu)}{v!} \left(-\frac{i \nu t}{n}\right)^{N+1} \times \\ &\times \int_0^1 \frac{(1-\lambda)^N}{N!} E \exp \{i s (T\alpha, \alpha)\} (T\alpha, \alpha)^{N+1} (\bar{d}_v^{*v}(\alpha))_{2\mu+2p} d\lambda, \end{aligned}$$

где $s = t(1 - \lambda \nu/n)$. В силу предложения 4.5

$$E \exp \{i s (T\alpha, \alpha)\} (T\alpha, \alpha)^{N+1} (\bar{d}_v^{*v}(\alpha))_{2\mu+2p} = g(s) B,$$

где $B = E \|A_s T^{1/2} \alpha\|^{2(N+1)} (\bar{d}_v^{*v}(A_s \alpha))_{2\mu+2p}$. Пользуясь предложением 4.6 и леммой 3.4, а также неравенством (3.7), получаем, что

$$|B| \leq c(N+1, 2\mu+2p) \bar{\beta}_{2(\mu+p-\nu+1)} \sigma^{2\nu+2N}.$$

Отсюда, учитывая неравенства $2(\mu+p-\nu+1) \leq k < k+1$ и применяя предложение 4.4, имеем

$$|B| \leq c(N+1, 2\mu+2p, \nu, k) \bar{\beta}_{k+1} \sigma^{2(\mu+p+N)+1-k}.$$

С другой стороны, в силу (1.16) $|g(s)| \leq |g(\tau)| \leq |g(t/2)|$. В результате мы получаем оценку

$$|R_1| \leq c(k) \bar{\beta}_{k+1} \sigma^{-k-1} n^{-[k/2]} \left\{ (|t| \sigma^2)^{k-2+[k/2]} + (|t| \sigma^2)^{1+[k/2]} \right\}.$$

Следовательно, $|R_1 + R| \leq R(t, k, n)$. Делая в (4.25) подстановку $j+p = m$, используя предложение 4.5 и меняя порядок суммирования, получаем утверждение предложения 4.7.

Предложение 4.8. Пусть $P_v(t)$ — функции, определенные в (2.3), $\beta_k < \infty$ для некоторого целого $k \geq 4$. Тогда справедливо разложение

$$\sum_{\nu=1}^{k-2} \bar{P}(\nu, n, t) = \sum_{1 \leq m \leq (k-2)/2} n^{-m} g(t) P_{2m}(t) + R_3,$$

где

$$|R_3| \leq c(k) |g(t/2)| n^{-(k-1)/2} \Gamma_{k+1}(n) [(|t| \sigma^2)^{3k-5} + |t| \sigma^2]. \quad (4.26)$$

Доказательство. Оценим $n^{-m} |g(t) [\bar{P}_{2m}(t) - P_{2m}(t)]|$. Заметим, что в силу предложения 4.5 мы можем заменить в (4.25)

$$E \exp \{it(T\alpha, \alpha)\} (T\alpha, \alpha)^j (\bar{d}_\nu^{\star\nu}(\alpha))_{2\mu+2p}$$

на

$$g(t) E \|A_t T^{1/2} \alpha\|^{2j} (\bar{d}_\nu^{\star\nu}(A_t \alpha))_{2\mu+2p}.$$

Сравнивая теперь (4.25) и сумму $g(t) \sum_{1 \leq m \leq (k-2)/2} n^{-m} P_{2m}(t)$, в которой вместо $P_{2m}(t)$ подставлены их явные выражения (2.3), мы видим, что достаточно оценить величину

$$B(\{m_q\}) \equiv E \|A_t T^{1/2} \alpha\|^{2j} \left[\prod_{q=1}^{\nu} E_{\bar{W}_q}(A_t \bar{W}_q, \alpha)^{m_q} - \prod_{q=1}^{\nu} E_{W_q}(A_t W_q, \alpha)^{m_q} \right],$$

где $3 < m_q \leq k$, $\sum_{q=1}^{\nu} m_q = 2\mu + 2p$. Пользуясь тождеством

$$\begin{aligned} & \prod_{q=1}^{\nu} (\bar{F} - \Phi)(dy_q) - \prod_{q=1}^{\nu} (F - \Phi)(dy_q) = \\ & = \sum_{q=1}^{\nu} (\bar{F} - F) \prod_{l=1}^{q-1} (F - \Phi)(dy_l) \prod_{l=1}^{\nu} (\bar{F} - \Phi)(dy_l), \end{aligned}$$

запишем $B(\{m_q\})$ в виде

$$\begin{aligned} B(\{m_q\}) &= \int \dots \int_{\leftarrow \nu \rightarrow} E \left[\|A_t T^{1/2} \alpha\|^{2j} \prod_{q=1}^{\nu} (A_t y_q, \alpha)^{m_q} \right] \times \\ &\times \sum_{q=1}^{\nu} (\bar{F} - F)(dy_q) \left[\prod_{l=1}^{q-1} (F - \Phi)(dy_l) \right] \prod_{l=q+1}^{\nu} (\bar{F} - \Phi)(dy_l). \end{aligned}$$

Оценим, например,

$$B_{\nu} \equiv \int \dots \int_{\leftarrow \nu \rightarrow} E \left[\|A_t T^{1/2} \alpha\|^{2j} \prod_{q=1}^{\nu} (A_t y_q, \alpha)^{m_q} \right] (\bar{F} - F)(dy_{\nu}) \prod_{q=1}^{\nu-1} (\bar{F} - \Phi)(dy_q).$$

В силу предложения 4.6

Так как $(\bar{F} - F)(dy) \equiv Q(1, dy)$, по лемме 3.4

$$\int |y|^{m_\nu} |(\bar{F} - F)(dy)| \leq c(m_\nu) \beta_{m_\nu}(n).$$

Поэтому, используя неравенства $\sigma^{m_q} \leq \beta_{m_q}$, $2\mu + 2p \leq k - 2 + 2\nu$ и (3.8), получаем оценку

$$|B_\nu| \leq c(j, \nu, \{m_q\}) \beta_k(n) \sigma^{2\mu + 2(p+j) - k} n^{\mu + p - \nu - (k-2)/2},$$

которая, справедлива также при замене $|B_\nu|$ на $|B(\{m_q\})|$. Отсюда при $p+j = m$ следует, что

$$\begin{aligned} n^{-m} |g(t)| |\bar{P}_{2m}(t) - P_{2m}(t)| &\leq \\ &\leq c(m, k) |g(t)| n^{-(k-2)/2} \beta_k(n) \sigma^{-k} [(|t| \sigma^2)^{3(k-2)/2} + (|t| \sigma^2)^2]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Неравенство (4.24) вытекает из (4.27) и предложения 4.7.

4.3. Доказательство теоремы 2.2. Утверждение теоремы следует из предложения 4.8 и теоремы А.

4.4. Доказательство теоремы 2.3. Очевидно,

$$\Delta'_{k,n} \leq \bar{\Delta}_{k,n} + \hat{\Delta}_{k,n}, \quad (4.28)$$

где $\hat{\Delta}_{k,n} = \sup_r \left| \sum_{\nu=1}^{k-2} \bar{Q}_{\nu,n}(r) - \sum_{1 \leq m \leq (k-2)/2} n^{-m} Q_{2m}(r) \right|$. Напомним, что функции $\bar{Q}_{\nu,n}$ определены в начале §2, а $Q_{2m}(r)$ — в равенстве (2.4). В силу формулы обращения и предложения 4.8

$$\hat{\Delta}_{k,n} \leq c(k) \Gamma_{k+1}(n) n^{-(k-1)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{g(t/2)}{t} \right| \{(|t| \sigma^2)^{3k-5} + |t| \sigma^2\} dt. \quad (4.29)$$

Нетрудно показать, что при $l > 2\mu$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{\mu-1} |g(t)| dt \leq c(\mu, l) \Lambda_l^{-\mu/l}.$$

Отсюда следует, что при $l > 6k-10$

$$\hat{\Delta}_{k,n} \leq c(k, l) \Gamma_{k+1}(n) n^{-(k-1)/2} \Lambda_l^{-(3k-5)/l} \sigma^{2(3k-5)}. \quad (4.30)$$

Теперь применим теорему В. Положим $\varepsilon \leq 1/12$. Так как $l \geq 6(k-1)+1$, то $l/12 - \varepsilon \geq (k-1)/2$. Нетрудно видеть, что

$$\beta_4^{(k-1)/2} \leq c(k) [\bar{\beta}_4^{(k-1)/2} + (\beta_4(n))^{(k-1)/2}] \quad (4.31)$$

при $k \geq 4$. Вследствие (3.11)

$$\bar{\beta}_4^{(k-1)/2} \leq \bar{\beta}_{k+1} \sigma^{k-3}. \quad (4.32)$$

При оценке $(\beta_4(n))^{(k-1)/2}$ мы будем опираться на неравенство

$$\beta_\mu(n) \leq ((\beta_N(n))^{\mu-2} (\beta_2(n))^{N-\mu})^{1/(N-2)}, \quad \mu \leq N, \quad (4.33)$$

которое выводится точно так же, как (3.11). Полагая в (4.33) $\mu=4$, $N=k$, имеем

$$\beta_4(n) \leq ((\beta_k(n))^2 \beta_2(n)^{k-4})^{1/(k-2)}.$$

Отсюда

$$(\beta_4(n))^{(k-1)/2} \leq (\beta_k(n))^{1+1/(k-2)} \sigma^{(k-4)(k-1)/(k-2)}.$$

В силу (1.18)

$$(\beta_k(n))^{1/(k-2)} \leq \sigma^{k/(k-2)} \sqrt{n}. \quad (4.34)$$

Следовательно,

$$\beta_4^{(k-1)/2}(n) \leq \beta_k(n) \sigma^{k-2} \sqrt{n}. \quad (4.35)$$

Комбинируя оценки (4.31) — (4.35), имеем $\beta_4^{(k-1)/2} \leq c(k) \Gamma_{k+1}(n) \sigma^{2(k-1)}$. Из неравенства

$$(\Gamma_{4,l}/n)^{(k-1)/2} \leq c(k) \Gamma_{k+1}(n) \sigma^{4(k-1)} \Lambda_l^{-2(k-1)/l} n^{-(k-1)/2},$$

и теоремы В вытекает утверждение теоремы 2.3.

Доказательство следствия 1.1. Мы начнем с неравенства

$$\beta_3^{k-1} \leq c(k) [\bar{\beta}_3^{k-1} + (\beta_3(n))^{k-1}]. \quad (4.36)$$

В силу (3.11)

$$\bar{\beta}_3^{k-1} \leq \bar{\beta}_{k+1} \sigma^{2(k-2)}. \quad (4.37)$$

Полагая в (4.33) $\mu=3$, $N=k$, имеем $\beta_3(n) \leq (\beta_k(n) (\beta_2(n))^{k-3})^{1/(k-2)}$; отсюда

$$(\beta_3(n))^{k-1} \leq \beta_k(n)^{1+1/(k-2)} \sigma^{2(k-1)(k-3)/(k-2)}.$$

Из этой оценки и неравенства (4.34) следует

$$(\beta_3(n))^{k-1} \leq \beta_k(n) \sigma^{2k-3} \sqrt{n}. \quad (4.38)$$

Комбинируя оценки (4.36) — (4.38), находим $\beta_3^{k-1} \leq c(k) \Gamma_{k+1}(n) \sigma^{3(k-1)}$. Следовательно,

$$(\Gamma_{3,l}/n)^{(k-1)/2} \leq c(k) \Gamma_{k+1}(n) \sigma^{6(k-1)} \Lambda_l^{-3(k-1)/l} n^{-(k-1)/2}.$$

Осталось воспользоваться теоремой 1.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Götze F. Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.—1979.—Bd 50, N 3.—P. 333–355.
2. Бенткус В. Ю. Асимптотические разложения в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Лит. мат. сб.—1984.—Т. 24, № 3.—С. 29–49.

3. Бенткус В. Ю. Асимптотические разложения для сумм независимых случайных элементов пространства Гильберта // Лит. мат. сб.—1984.—Т. 24, № 4.—С. 29–48.
4. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин.—М.: Наука, 1972.
5. Götze F. On Edgeworth expansions in Banach spaces // Ann. Probab.—1981.—V. 9, N 5.—P. 852–859.
6. Бенткус В. Ю. Асимптотические разложения для сумм независимых случайных элементов пространства Гильберта // Докл. АН СССР.—1984.—Т. 278, № 5.—С. 1033–1036.
7. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1.—М.: Мир, 1980.
8. Нагаев С. В., Чеботарёв В. И. Об асимптотическом разложении типа Бергстрема в гильбертовом пространстве // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.—Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние.—1989.—С. 66–77.—(Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).
9. Nagaev S. V. On a new approach to the study of the distribution of a norm of a random elements in Hilbert space // Proc. 5th Intern. Vilnius Conf. Probab. Th. and Math. Stat., Vilnius, 1989.—Vilnius: Mokslas; Utrecht: VSP, 1990.—V. 2.—P. 214–226.
10. Nagaev S. V., Chebotarev V. I. Asymptotic expansions for the distribution of the sum of i.i.d. Hilbert space valued random variables // Proc. 4th Intern. Vilnius Conf. Probab. Th. and Math. Stat., Vilnius, 1985.—Utrecht: VNU Science Press, 1987.—V. 2.—P. 357–363.
11. Nagaev S. V., Chebotarev V. I. On asymptotic expansion for the distribution of the sum of independent identically distributed random variables taking values in Hilbert space // Proc. 1st World congress Bernoulli Society, Tashkent, USSR, 1986.—Utrecht: VNU Science Press, 1987.—V. 1—P. 693–696.
12. Sazonov V. V., Ulyanov V. V., Zaleskii V. A. Asymptotic expansions refining the central limit theorem in Hilbert space // 1st World Congress Bernoulli Society, Tashkent, 1986: Abstracts of commun.—М.: Nauka, 1986.—V. 2.—P. 782–783.
13. Боровских Ю. В. О нормальной аппроксимации в бесконечномерных пространствах // Докл. АН СССР.—1984.—Т. 278, № 6.—С. 1291–1296.
14. Бенткус В. Ю., Залесский Б. А. Асимптотические разложения с неравномерными остатками в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Лит. мат. сб.—1985.—Т. 25, № 3.—С. 3–16.
15. Götze F. Asymptotic expansions in functional limit theorems// J. Multi-variate Analysis.—1985.—V. 16, N 1.—P. 1–20.
16. Ульянов В. В. Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин в H // Теория вероятностей и ее применения.—1986.—Т. 31, № 1.—С. 31–46.
17. Nagaev S. V., Chebotarev V. I. On Edgeworth expansion in Hilbert space.—Vladivostok, 1989.—62 p.—(Preprint/Academy Sciences USSR. Far-Eastern Branch. Inst. Applied Mathematics).
18. Bentkus V., Götze F., Paulauskas V., Rachkauskas A. The accuracy of Gaussian approximation in Banach spaces.—Bielefeld, 1990.—90 p.—(Preprint 90—100/Universitat Bielefeld).

19. Нагаев С. В., Чеботарёв В. И. Уточнение оценки погрешности нормальной аппроксимации в гильбертовом пространстве.—Новосибирск, 1984.—47 с.—(Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 84).
20. Нагаев С. В., Чеботарёв В. И. Уточнение оценки погрешности нормальной аппроксимации в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 3.—С. 154–173.
21. Бенткус В., Зитикис Р. Замечание о критерии Крамера — фон Мизеса — Смирнова // Лит. мат. сб.—1988.—Т. 28, № 1.—С. 14–22.
22. Залесский Б. А., Сазонов В. В., Ульянов В. В. Нормальная аппроксимация в гильбертовом пространстве. I // Теория вероятностей и ее применения.—1988.—Т. 33, № 2.—С. 225–245.
23. Залесский Б. А., Сазонов В. В., Ульянов В. В. Нормальная аппроксимация в гильбертовом пространстве. II // Теория вероятностей и ее применения.—1988.—Т. 33, № 3.—С. 508–521.
24. Sazonov V. V. Normal approximation — some recent advances.—Berlin etc.: Springer, 1981.—(Lecture Notes in Math., 879.)