ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Том XVII *Основан в 1956 г.*
Выпуск 4 *Выходит 4 раза в год*
октябрь, ноябрь, декабрь *Москва*

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ УСИЛЕННОГО ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

С. В. НАГАЕВ

§ 0. Формулировка и обсуждение результатов

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с функциями распределения соответственно $F_1(x), F_2(x), \ldots$ $\ldots, F_n(x), \ldots$ Мы будем говорить, что эта последовательность подчиняется усиленному закону больших чисел (у.з.б.ч.), если

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \to 0\right\} = 1.$$

Если речь идет об условиях применимости у.з.б.ч., то, не нарушая общности, можно считать, что случайные величины ξ_n симметрично распределены (см., например, [1], § 1).

Пусть $I_r = \{n : 2^r + 1 \leqslant n \leqslant 2^{r+1}\}$ и $\chi_r = \frac{1}{2^r}\sum_{n\in I_r}\xi_n$. Ю. В. Прохоровым [2] было доказано, что у.з.б.ч. выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{r=0}^{\infty}\mathbf{P}(\chi_r \geqslant \varepsilon) < \infty. \tag{0.1}$$

Таким образом, проблема отыскания необходимых и достаточных условий для у.з.б.ч. сводится к получению оценок снизу и сверху для вероятностей того, что сумма независимых случайных величин превзойдет заданный уровень. В результате необходимые условия будут совпадать с достаточными, если существуют последовательности $\varepsilon_m > 0$ и $\eta_m > 0$, $\varepsilon_m \leqslant \eta_m$, $m = \overline{1, \infty}$, такие, что $\eta_m \to 0$ и оценка снизу при $\varepsilon = \varepsilon_m$ является с точностью до постоянного относительно r множителя оценкой сверху для $\varepsilon = \eta_m$.

Естественно возникает вопрос, в терминах каких характеристик отдельных слагаемых должны формулироваться эти оценки, если иметь в виду получение достаточных условий, которые в то же время являются необходимыми.

В работе Ю. В. Прохорова [3] построены две последовательности независимых случайных величин ξ_n' и ξ_n'' таких, что $D\xi_n' = D\xi_n''$, из которых одна подчиняется у.з.б.ч., а другая нет.

Отсюда следует, что необходимые и достаточные условия для у.з.б.ч. не могут быть выражены в терминах одних дисперсий. Из общих соображений представляется весьма правдоподобным, что необходимые и достаточные условия для у.з.б.ч. нельзя сформулировать и с помощью любого конечного числа моментов s, поскольку оценки сверху в терминах моментов в большинстве случаев являются завышенными.

Такое предположение в свое время высказывал Ю. В. Прохоров [3]. Нижеследующий пример показывает, что это действительно так.

Пусть $L_s(x)$ — полином Лагерра $e^x \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}} x^{s+1}e^{-x}$. Обозначим через a_s наибольший корень $L_s(x)$. Пусть $p_s(x) = \frac{1}{2a_s}$ $\forall |x| \leqslant a_s$ и $=0$ $\forall |x| > a_s$. Положим $q_s(x) = p_s(x) + b_s e^{-x} L_s(x)$ $\forall x \geqslant 0$, где $b_s = \frac{1}{2a_s} \min_{0 \leqslant x \leqslant a_s} |e^{-x} L_s(x)|^{-1}$ и $q_s(x) = q_s(-x)$ $\forall x < 0$. Очевидно, $q_s(x) \geqslant 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} q_s(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_s(x)dx = 1$.

Определим две последовательности независимых случайных величин ξ_n' и ξ_n'' следующим образом. Пусть ξ_1' и ξ_1'' имеют распределения с плотностями соответственно $p_s(x)$ и $q_s(x)$, $\xi_n' = \xi_n'' = 0$ $\forall 2^r < n < 2^{r+1}, r > 0$, а ξ_{2^r}' и ξ_{2^r}'' распределены, соответственно, как $c_r\xi_1'$ и $c_r\xi_1''$, где $c_r = \frac{2^r}{\sqrt{\ln r}}$. Необходимое и достаточное условие (0.1) в нашем случае принимает вид:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_1 > \varepsilon \sqrt{\ln r}) < \infty, \quad \xi_1 = \xi_1', \ \xi_1'', \ \forall \varepsilon > 0. \tag{0.2}$$

Очевидно, при достаточно больших r

$$\mathbf{P}(\xi_1'' > \varepsilon \sqrt{\ln r}) > b_s e^{-\varepsilon \sqrt{\ln r}} L_s(a_s + 1).$$

Следовательно, последовательность ξ_n'' не подчиняется у.з.б.ч. В то же время для последовательности ξ_n' он, очевидно, выполняется. С другой стороны, $\mathbf{M}\xi_n'^k = \mathbf{M}\xi_n''^k$ $\forall k \leqslant s$, поскольку

$$\int_0^{\infty} x^k L_s(x) e^{-x} dx = 0 \quad \forall k \leqslant s.$$

Следующее утверждение является ответом на вопрос о том, в каких терминах могут быть выражены необходимые и достаточные условия для у.з.б.ч.

Пусть $f_n(h, \varepsilon) = \int_{-n\varepsilon}^{n\varepsilon} e^{hx} dF_n(x)$. Определим $h_r(\varepsilon)$ как решение уравнения

$$\Psi_r(h, \varepsilon) \equiv \sum_{n \in I_r} f_n'(h, \varepsilon)/f_n(h, \varepsilon) = \varepsilon n_r \qquad \left(f_n'(h, \varepsilon) = \frac{d}{dh} f_n(h, \varepsilon) \right),$$

где $n_r = 2^{r+1}$, в том случае, когда $\sup\limits_h \Psi_r(h, \varepsilon) \geqslant \varepsilon n_r$ (решение единственно в силу монотонности $\Psi_r(h, \varepsilon)$). В противном случае положим $h_r(\varepsilon) = \infty$.

Теорема. *У.з.б.ч. выполняется тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0$

$$\text{(I)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_n > n\varepsilon) < \infty,$$

$$\text{(II)} \qquad \sum_{r=1}^{\infty} e^{-\varepsilon h_r(\varepsilon) n_r} < \infty.$$

Мы отложим доказательство этой теоремы до § 1, а пока в качестве следствий выведем два критерия справедливости у.з.б.ч., принадлежащие Ю. В. Прохорову [3].

Следствие 1. *Если* $\xi_n < \varphi(n)$ *и* $\varphi(n) = O\left(\frac{n}{\ln \ln n}\right)$, *то для справедливости у.з.б.ч. необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{r=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{H_r}\right\} < \infty,$$

где $H_r = \frac{1}{n_r^2} \sum\limits_{n \in I_r} \mathbf{D}\xi_n$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать $\varphi(n_r) = n_r/\ln r$.

Необходимость. Пусть $h_r(\varepsilon) > \bar{h}_r = \varphi^{-1}(n_r)$. Очевидно, $f_n(\bar{h}_r, \varepsilon) < e\ \forall n \leqslant n_r$. Если, кроме того, $n\varepsilon > \varphi(n_r)$, то $f_n'(\bar{h}_r, \varepsilon) > \sigma_n^2 \bar{h}_r/e$, где $\sigma_n^2 = \mathbf{D}\xi_n$. Поэтому

$$\bar{h}_r \sum_{n \in I_r} \sigma_n^2/e^2 < \Psi_r(\bar{h}_r, \varepsilon) \leqslant \varepsilon n_r.$$

Таким образом, при достаточно больших r

$$-e^2\varepsilon/H_r < -\ln r. \qquad (0.3)$$

Пусть теперь $h_r(\varepsilon) \leqslant \bar{h}_r$. Очевидно, $\forall n \leqslant n_r$ такого, что $n\varepsilon > \varphi(n_r)$, $f_n(h_r(\varepsilon), \varepsilon) < e$, $f_n'(h_r(\varepsilon), \varepsilon) > \sigma_n^2 h_r(\varepsilon)/e$. Отсюда точно так же, как (0.3), выводим:

$$-e^2\varepsilon/H_r < -n_r h_r(\varepsilon). \qquad (0.4)$$

Из (0.3) и (0.4) следует сходимость $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \exp\{-\varepsilon/H_r\}$ $\forall \varepsilon > 0$.

Достаточность. Если $\varepsilon h_r(\varepsilon) < 2\bar{h}_r$, то

$$f_n'(h_r(\varepsilon), \varepsilon) < e^{2/\varepsilon} \sigma_n^2 h_r(\varepsilon).$$

Если, кроме того, $n\varepsilon > \varphi(n_r)$, то $f_n(h_r(\varepsilon), \varepsilon) \geqslant 1$. Из этих двух оценок аналогично (0.4) получаем, что

$$-e^{-2/\varepsilon}\varepsilon/H_r > -n_r h_r(\varepsilon),$$

если r достаточно велико.

Таким образом, $\forall\varepsilon > 0$

$$\sum_{r=r(\varepsilon)}^{\infty} e^{-\varepsilon n_r h_r(\varepsilon)} < \sum_{r=r(\varepsilon)}^{\infty} (r^{-2} + \exp\{-e^{-2/\varepsilon}\varepsilon^2/H_r\}) < \infty,$$

т. е. выполнено условие (II) теоремы.

Условие (I) тоже, очевидно, выполняется.

Следствие 2. *Если* $\mathbf{P}(\xi_n = \pm a_n) = p_n/2$, $\mathbf{P}(\xi_n = 0) = 1 - p_n$, $a_n = o(n)$ *и* $\exists c_1 > 0$ *и* $c_2 > 0$ *такие, что*

$$c_1 \leqslant \min_{n\in I_r} a_n / \max_{n\in I_r} a_n, \quad c_2 \leqslant \min_{n\in I_r} p_n / \max_{n\in I_r} p_n,$$

то у.з.б.ч. применим к последовательности ξ_n *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{r=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon n_r}{a_{n_r}} \operatorname{Ar\,sh} \frac{\varepsilon}{a_{n_r} p_{n_r}}\right\} < \infty \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Доказательство. Необходимость. Не нарушая общности, можно считать, что $n\varepsilon > a_n \forall n$. Пусть $\varepsilon/c_1 a_{n_r} < 1/4$. Если при этом $\min_{n\in I_r} f_n(h_r(\varepsilon), \varepsilon) > 2$, то

$$e^{h_r(\varepsilon) a_n} p_n > f_n(h_r(\varepsilon), \varepsilon) - 1 > f_n(h_r(\varepsilon), \varepsilon)/2 \quad \forall n \in I_r.$$

Значит,

$$\varepsilon n_r = \sum_{n\in I_r} \frac{2a_n p_n \operatorname{sh} h_r(\varepsilon) a_n}{f_n(h_r(\varepsilon), \varepsilon)} > \frac{1}{2} \sum_{n\in I_r} a_n (1 - e^{-2h_r(\varepsilon) a_n}) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} n_r c_1 a_{n_r} (1 - e^{-2c_1 h_r(\varepsilon) a_{n_r}}).$$

Отсюда вытекает, что $e^{2c_1 h_r(\varepsilon) a_{n_r}} < 2$ и, следовательно, $f_n(h_r(\varepsilon), \varepsilon) < 2^{1/2c_1^2}$. Если же $\min_{n\in I_r} f_n(h_r(\varepsilon), \varepsilon) \leqslant 2$, то $\max_{n\in I_r} f_n(h_r(\varepsilon), \varepsilon) < 2^{1/c_1} + 1$. Таким образом, при $\varepsilon/c_1 a_{n_r} < 1/4$

$$f_n(h_r(\varepsilon), \varepsilon) < \Lambda_1 \quad \forall n \in I_r,$$

где $\Lambda_1 = \max[2^{1/2c_1^2}, 2^{1/c_1} + 1]$. Поэтому

$$\varepsilon n_r = \sum_{n\in I_r} \frac{2a_n p_n \operatorname{sh} h_r(\varepsilon) a_n}{f_n(h_r(\varepsilon), \varepsilon)} > 2\Lambda_1^{-1} n_r c_1 c_2 a_{n_r} p_{n_r} \operatorname{sh} h_r(\varepsilon) c_1 a_{n_r}.$$

Отсюда находим:

$$h_r(\varepsilon) < \frac{1}{c_1 a_{n_r}} \operatorname{Ar\,sh} \frac{\Lambda_2 \varepsilon}{a_{n_r} p_{n_r}},$$

где $\Lambda_2 = \dfrac{\Lambda_1}{2c_1 c_2}$, при условии, что $\varepsilon/c_1 a_{n_r} < 1/4$.

Если же $\varepsilon/c_1 a_{n_r} \geqslant 1/4$, то

$$\frac{\varepsilon}{a_{n_r}} \operatorname{Ar\,sh} \frac{\varepsilon}{a_{n_r} p_{n_r}} \geqslant \frac{c_1}{4} \operatorname{Ar\,sh} \frac{c_1}{4}.$$

Из двух последних оценок и условия (II) теоремы следует необходимость условия следствия 2.

Достаточность. Заметим, что $f_n(h, \varepsilon) \geqslant 1$ $\forall h > 0$. Поэтому

$$\Psi_r(h, \varepsilon) \leqslant \sum_{n \in I_r} f'_n(h, \varepsilon) \leqslant 2n_r a_{n_r} p_{n_r} c_1^{-1} c_2^{-1} \operatorname{sh} a_{n_r} h / c_1 c_2 \quad \forall h > 0.$$

Отсюда получаем:

$$h_r(\varepsilon) \geqslant \frac{c_1 c_2}{a_{n_r}} \operatorname{Ar\,sh} \frac{c_1 c_2 \varepsilon}{2a_{n_r} p_{n_r}}.$$

Из последней оценки следует, что выполняется условие (II) теоремы. Пусть $\bar{h}_r(\varepsilon)$ — корень уравнения

$$\sum_{n \in I_r} \int_{-n}^{n} x e^{hx} \, dF_n(x) = n_r \varepsilon.$$

В работе [1] доказывается, что условие

$$\sum_{r=1}^{\infty} \exp\{-n_r \varepsilon \bar{h}_r(\varepsilon)\} < \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{0.5}$$

является достаточным для у.з.б.ч., если $|\xi_n| < n$ $\forall n$. Покажем теперь, что из условия (0.5) легко вывести условия (I) и (II) теоремы.

В самом деле, $h_r(\varepsilon) \geqslant \bar{h}_r(\varepsilon')$, $\varepsilon' = \varepsilon \min\limits_{n \in I_r} \mathbf{P}(|\xi_n| < n\varepsilon)$. Отсюда следует условие (II), если

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(|\xi_n| < n\varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Далее, при $2n_r \varepsilon < n$

$$\sum_{n \in I_r} \mathbf{P}(\xi_n > 2n_r \varepsilon) < e^{-2n_r \bar{h}_r(\varepsilon)\varepsilon} \int_{2n_r \varepsilon}^{n} e^{\bar{h}_r(\varepsilon) x} \, dF_n(x).$$

Не нарушая общности, можно считать, что $2\varepsilon n_r \bar{h}_r(\varepsilon) > 1$. Поэтому

$$\sum_{n \in I_r} \int_{2n_r \varepsilon}^{n} e^{\bar{h}_r(\varepsilon) x} dF_n(x) < 4\bar{h}_r(\varepsilon) \sum_{n \in I_r} \int_{2n_r \varepsilon}^{n} (e^{\bar{h}_r(\varepsilon) x} - e^{-\bar{h}_r(\varepsilon) x}) \, x \, dF_n(x) <$$
$$< 4\varepsilon n_r \bar{h}_r(\varepsilon).$$

Из двух последних оценок следуют условия (I) и (II). Выведем теперь условия (I) и (II) из достаточного условия Колмогорова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}\xi_n}{n^2} < \infty.$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_{-n_r \varepsilon}^{n_r \varepsilon} e^{hx} x \, dF_n(x) = \int_{0}^{n_r \varepsilon} (e^{hx} - e^{-hx}) \, x \, dF_n(x) <$$

$$< h e^{h n_r \varepsilon} \int_{0}^{n_r \varepsilon} x^2 \, dF_n(x) < e^{2h n_r \varepsilon} n_r^{-1} \varepsilon^{-1} \int_{0}^{n_r \varepsilon} x^2 \, dF_n(x).$$

С другой стороны,

$$\sum_{n\in I_r}\int_{-n_r\varepsilon}^{n_r\varepsilon} e^{h_r(\varepsilon)x}x\,dF_n(x)>n_r\varepsilon\min_{n\in I_r}\int_{-n_{r-1}\varepsilon}^{n_{r-1}\varepsilon} e^{h_r(\varepsilon)x}\,dF_n(x).$$

Следовательно,

$$e^{-2h_r(\varepsilon)n_r\varepsilon}<\sum_{n\in I_r}\mathrm{D}\xi_n/\varepsilon^2 n_r^2(1-n_{r-1}^{-2}\varepsilon^{-2}\max_{n\in I_r}\mathrm{D}\xi_n).$$

Отсюда, очевидно, следует условие (II). Справедливость условия (I) вытекает из неравенства Чебышева.

§ 1. Доказательство теоремы

Необходимость. Как известно, условие (I) является необходимым для у.з.б.ч. (см., например, [4], стр. 60, теорема 2.7.2).

Положим $Q_r(h,\delta)=\prod_{n\in I_r}f_n(h,\delta)$. **Пусть**

$$F_n(x,\delta)=\begin{cases}F_n(x), & |x|\leqslant n\delta,\\ F_n(n\delta), & |x|>n\delta,\end{cases}$$

и $G_r(x,\delta)=F_{n_{r-1}+1}*F_{n_{r-1}+2}\ldots *F_{n_r}(x,\delta)$. Обозначим через $h_r(\delta,\varepsilon)$ корень уравнения

$$\frac{d}{dh}\ln Q_r(h,\delta)=n_r\varepsilon,$$

если последний существует. В противном случае положим $h_r(\delta,\varepsilon)=\infty$. Нетрудно видеть, что $\forall\eta>0$

$$G_r(\infty,\delta)-G_r(\eta n_r,\delta)=Q_r(h,\delta)\int_{n_r\eta}^{\infty}e^{-hx}d\bar G_r(x,h,\delta), \qquad (1.1)$$

где

$$\bar G_r(x,h,\delta)=\int_{-\infty}^{x}e^{hy}\,dG_r(y,\delta)/Q_r(h,\delta).$$

Пусть $\zeta_r(h,\delta)$ — случайная величина с функцией распределения $\bar G_r(x,h,\delta)$. Нетрудно видеть, что

$$\zeta_r(h,\delta)=\sum_{n\in I_r}\xi_n(h,\delta),$$

где $\xi_n(h,\delta)$ взаимно независимы и

$$\mathrm{P}(\xi_n(h,\delta)<x)=\int_{-\infty}^{x}e^{hy}\,dF_n(y,\delta)/f_n(h,\delta).$$

Вследствие (0.1) $\chi_r\to 0$ по вероятности при $r\to\infty$. Из условия (I) вытекает, что $\forall\delta>0$

$$\lim_{r\to\infty}\mathrm{P}\left(\max_{n\in I_r}\left|\frac{\xi_n}{n_r}\right|>\delta\right)=0.$$

Применяя теперь критерий вырожденной сходимости, получаем, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{n_r^2}\sum_{n\in I_r}\int_{|x|<n_r\delta} x^2\,dF_n(x)=0$$

(см., например, [5], стр. 331). Значит, $\forall c>0$

$$\lim_{r\to\infty} n_r^{-2}\sum_{n\in I_r}\int_{-n\delta}^{c/h} e^{hx}x^2\,dF_n(x)/f_n(h,\delta)=0$$

равномерно относительно $h>0$. Далее, $\forall\eta>0$ $\exists c>0$ такое, что

$$\sum_{n\in I_r}\int_{c/h_r(\delta,\varepsilon)}^{n\delta} e^{h_r(\delta,\varepsilon)x}\,dF_n(x)/f_n(h_r(\delta,\varepsilon),\delta)<(1-e^{-2c})^{-1}\times$$
$$\times\sum_{n\in I_r}\int_{c/h_r(\delta,\varepsilon)}^{n\delta}\left(e^{h_r(\delta,\varepsilon)x}-e^{-h_r(\delta,\varepsilon)x}\right)x\,dF_n(x)/f_n(h_r(\delta,\varepsilon),\delta)<(1+\eta)\,\varepsilon n_r.$$

Следовательно, $\forall\eta$ $\exists r_0$ такое, что при $r>r_0$

$$D\zeta_r(h_r(\delta,\varepsilon),\delta)\leqslant\sum_{n\in I_r}M\xi_n^2(h_r(\delta,\varepsilon),\delta)\leqslant\sum_{n\in I_r}\left[\int_{-n\delta}^{c/h_r(\delta,\varepsilon)} e^{hx}\times\right.$$
$$\left.\times\, x^2\,dF_n(x)+\delta n_r\int_{c/h_r(\delta,\varepsilon)}^{n\delta} e^{hx}x\,dF_n(x)\right]\Big/ f_n(h_r(\delta,\varepsilon),\delta)<(1+\eta)\,\delta\varepsilon n_r^2.$$

Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что при $\delta<\varepsilon$

$$D\zeta_r(h_r(\delta,\varepsilon),\delta)<\frac{\delta+\varepsilon}{2}\,\varepsilon n_r^2.$$

Следовательно,

$$P\{|\zeta_r(h_r(\delta,\varepsilon),\delta)-\varepsilon n_r|>n_r(\varepsilon-\eta)\}\leqslant\frac{(\delta+\varepsilon)\,\varepsilon}{2\,(\varepsilon-\eta)^2},$$

если только $h_r(\delta,\varepsilon)<\infty$ и $\delta<\varepsilon$. Отсюда получаем:

$$\int_{n_r\eta}^{\infty} e^{-h_r(\delta,\varepsilon)x}\,d\overline{G}_r(x,h,\delta)>\frac{\varepsilon(\varepsilon-\delta)-2\varepsilon\eta+2\eta^2}{2\,(\varepsilon-\eta)^2}\,e^{-n_rh_r(\delta,\varepsilon)(2\varepsilon-\eta)},\tag{1.2}$$

$$2\,(\varepsilon-\eta)^2>(\delta+\varepsilon)\,\varepsilon.$$

Из (1.1) и (1.2) следует, что при $2\,(\varepsilon-\eta)^2>(\delta+\varepsilon)\,\varepsilon$

$$\frac{2\,(\varepsilon-\eta)^2}{\varepsilon(\varepsilon-\delta)-2\varepsilon\eta+2\eta^2}\,(G_r(\infty,\delta)-G_r(n_r\eta,\delta))/(G_r(\infty,\delta)-G_r(-\infty,\delta))>$$
$$>e^{-n_r(2\varepsilon-\eta)h_r(\delta,\varepsilon)},\tag{1.3}$$

поскольку $Q_r(h,\delta)\geqslant G_r(\infty,\delta)-G_r(-\infty,\delta)$. С другой стороны,

$$0\leqslant G_r(x,\infty)-G_r(x,\delta)\leqslant\sum_{n\in I_r}P(|\xi_n|>\delta n).\tag{1.4}$$

Из (0.1), (1.3) и (1.4) и условия (I) мы заключаем, что

$$\sum_{r=1}^{\infty} e^{-n_r(\varepsilon+2\delta)h_r(\delta,\varepsilon)} < \infty, \quad \frac{\varepsilon}{2,3} \leqslant \delta < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Заметим, что (1.5) тем более справедливо, если все или часть величин $h_r(\delta, \varepsilon)$ обращаются в бесконечность.

Предположим, что

$$\sum_{n \in I_r} \int_{n\delta}^{n\varepsilon} x e^{h_r(\varepsilon)x} dF_n(x) > \frac{\varepsilon n_r}{3}, \quad \delta < \varepsilon.$$

Тогда

$$n_r e^{\varepsilon n_r h_r(\varepsilon)} \sum_{n \in I_r} (1 - F_n(n\delta)) > \frac{\varepsilon n_r}{3}$$

и, следовательно,

$$e^{-n_r \varepsilon h_r(\varepsilon)} < \frac{3}{\varepsilon} \sum_{n \in I_r} (1 - F_n(n\delta)). \tag{1.6}$$

Пусть теперь

$$\sum_{n \in I_r} \int_{n\delta}^{n\varepsilon} x e^{h_r(\varepsilon)x} dF_n(x) < \frac{\varepsilon n_r}{3}, \quad \delta < \varepsilon.$$

Тогда при достаточно большом r

$$\sum_{n \in I_r} \frac{\int\limits_{n\delta \leqslant |x| \leqslant n\varepsilon} x e^{h_r(\varepsilon)x} dF_n(x)}{f_n(h_r(\varepsilon), \varepsilon)} \leqslant \frac{1}{2} \varepsilon n_r,$$

поскольку $f_n(h_r(\varepsilon), \varepsilon) \geqslant \frac{2}{3}$, если n достаточно велико. Отсюда вытекает, что

$$\sum_{n \in I_r} f_n'(h_r(\varepsilon), \delta)/f_n(h_r(\varepsilon), \delta) \geqslant \sum_{n \in I_r} f_n'(h_r(\varepsilon), \delta)/f_n(h_r(\varepsilon), \varepsilon) \geqslant \frac{\varepsilon n_r}{2}$$

и, следовательно,

$$h_r(\varepsilon) \geqslant h_r\left(\delta, \frac{\varepsilon}{2}\right), \tag{1.7}$$

если r достаточно велико.

Из (1.6) и (1.7) мы заключаем, что

$$e^{-n_r \varepsilon h_r(\varepsilon)} < \max\left[\frac{3}{\varepsilon} \sum_{n \in I_r} \left(1 - F_n\left(\frac{n\varepsilon}{4}\right)\right), \; e^{-n_r \varepsilon h_r\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}\right)}\right] \quad \forall r > r(\varepsilon).$$

Таким образом, в силу (I) и (1.5)

$$\sum_{r=r(\varepsilon)}^{\infty} e^{-n_r \varepsilon h_r(\varepsilon)} < \frac{3}{\varepsilon} \sum_{n=2^{r(\varepsilon)}}^{\infty} \left(1 - F_n\left(\frac{n\varepsilon}{4}\right)\right) + \sum_{n=2^{r(\varepsilon)}}^{\infty} e^{-n_r \varepsilon h_r\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}\right)} < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Вследствие (1.1)

$$G_r(\infty, \delta) - G_r(n_r\eta, \delta) \leqslant e^{-hn_r\eta} Q_r(h, \delta). \tag{1.8}$$

Заметим, что

$$\frac{d^2}{dh^2} \ln Q_r(h, \delta) \geqslant 0,$$

т. е. функция $\ln Q_r(h, \delta)$ выпукла вниз относительно h. Поэтому

$$\int_0^x \frac{d}{dh} \ln Q_r(h, \delta)\, dh \leqslant x n_r \varepsilon, \quad 0 < x \leqslant h_r(\delta, \varepsilon).$$

Отсюда находим:

$$\ln Q_r(h, \delta) - \ln Q_r(0, \delta) \leqslant \varepsilon n_r h_r(\delta, \varepsilon), \ 0 \leqslant h \leqslant h_r(\delta, \varepsilon),$$

и, следовательно,

$$Q_r(h(\delta, \varepsilon), \delta) \leqslant e^{\varepsilon n_r h_r(\delta, \varepsilon)}, \tag{1.9}$$

поскольку $Q_r(0, \delta) \leqslant 1$.

Из (1.8) и (1.9) получаем для $h_r(\delta, \varepsilon) < \infty$:

$$G_r(\infty, \delta) - G_r(n_r\eta, \delta) \leqslant e^{(\varepsilon-\eta) n_r h_r(\delta, \varepsilon)}.$$

Полагая теперь $\delta = \varepsilon$, $\eta = 2\varepsilon$, имеем при условии $h_r(\varepsilon) < \infty$:

$$G_r(\infty, \varepsilon) - G_r(2n_r\varepsilon, \varepsilon) \leqslant e^{-\varepsilon n_r h_r(\varepsilon)}. \tag{1.10}$$

Если же $h_r(\varepsilon) = \infty$, то

$$\sum_{n \in I_r} M_n \leqslant \varepsilon n_r, \tag{1.11}$$

где $M_n = \text{vrai sup}\, \xi_n$.

Из (1.10), (1.11), (1.4) и условий (I) и (II) следует, что

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}(\chi_r \geqslant \varepsilon) < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Поступила в редакцию
12.4.71

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Прохоров, Усиленная устойчивость сумм и неограниченно делимые распределения, Теория вероят. и ее примен., III, 2 (1958), 153—165.

[2] Ю. В. Прохоров, Об усиленном законе больших чисел, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 6 (1950), 523—536.

[3] Ю. В. Прохоров, Несколько замечаний к усиленному закону больших чисел, Теория вероят. и ее примен., IV, 2 (1959), 215—220.

[4] P. R é v é s z, The laws of large numbers, Academic press, New York and London, 1968.
[5] М. Л о э в, Теория вероятностей, М., ИЛ, 1962.

ON SUFFICIENT AND NECESSARY CONDITIONS FOR THE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS

S. V. NAGAEV (NOVOSIBIRSK)

(*Summary*)

Sufficient and necessary conditions for the strong law of large numbers are given in terms of the distributions of addends. This result is obtained as a consequence of the sufficient and necessary condition due to Yu. V. Prohorov [2].