СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XV, № 3 Май — Июнь 1974

УДК 519.21

С. В. НАГАЕВ

ПЕРЕХОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ДЛЯ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВОЗРАСТА ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ. II

Введение

Настоящая работа — продолжение статьи автора ([1]) — посвящена доказательству анонсированных там теорем 3 и 5 (доказательства сформулированных в ([1]) теорем 4 и 6 вполне аналогичны доказательствам соответственно теорем 3 и 5). При этом мы сохраним введенные в ([1]) обозначения. Нумерация формул и параграфов является продолжением нумерации работы ([1]).

§ 4. Доказательство теории 3 и 5

Как и при доказательстве теоремы 1, мы ограничимся случаем $\Delta=1$.

Лемма 4.1. *Если* $A\geqslant 1$, *то*

$$M(n)=\bar{A}^n(1+\eta(n,A)),$$

где

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ A\downarrow 1}}\eta(n,A)=0,\qquad \sup_{1\leqslant A\leqslant\rho,n}|\eta(n,A)|<\infty.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что при $AF(0)<1$

$$M(t)=A\int_{0-}^{t+}M(t-\tau)\,dF(\tau)+1-F(t), \tag{4.1}$$

поскольку в этом случае $P(1,t)\equiv 1$ (см. ([2]), теорема 7). Отсюда

$$M(n)=d_n(A). \tag{4.2}$$

Поскольку $\lim\limits_{A\downarrow 1}\lambda(A)=1$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{A}^k q_{n-k}=\bar{A}^n\sum_{k=1}^{n}\bar{A}^{k-n}q_{n-k}=\mu\bar{A}^n(1+\eta(n,A)), \tag{4.3}$$

где

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ A\downarrow 1}}\eta(n,A)=0,\qquad \sup_{1\leqslant A\leqslant\rho,n}|\eta(n,A)|<\infty.$$

Из (4.2), (2.25), (2.5), (4.3) и (2.30) следует утверждение леммы.

Лемма 4.2. *При* $A\leqslant 1$

$$M(n)=\bar{A}^n(1+\eta(n,A)),$$

где

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{V_n(\varepsilon)\leqslant A\leqslant 1} |\eta(n,A)|=0.$$

Доказательство. Прежде всего,

$$d_n(A)=A\sum_{k=1}^{n} q_{n-k}(u_k(A)-b_{nk}(A))+\sum_{k=1}^{n} q_{n-k}b_{nk}(A)+$$

$$+q_n/(1-Af_0).$$

Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{n} q_{n-k}(u_k(A)-b_{nk}(A))=\lambda_n^{-n}(A)\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_n^{k}(A)q_k/f_n'(\lambda_n(A))A^2.$$

Вследствие (2.39)

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_n^{k}(A)q_k=\mu(1+\eta(n,A)),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{V_n(\varepsilon)\leqslant A\leqslant 1} |\eta(n,A)|=0.$ Ввиду (2.39) и (2.99)

$$\sum_{k=1}^{n} q_{n-k}b_{nk}(A)=O\left(n^{-s}\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_n^{n-k}(A)(n-k)^{-s}\right)+$$

$$+o\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^{-s}(n-k)^{-s}\right)=o(n^{-s})$$

равномерно по $V_n(\varepsilon)\leqslant A\leqslant 1$. Таким образом,

$$d_n(A)=\frac{\mu\lambda_n^{-n}(A)}{f_n'(\lambda_n(A))}(1+\eta(n,A))+o(n^{-s}).$$

Для завершения доказательства нужно теперь воспользоваться (2.68), (2.87), (2.39) и (4.2).

Положим $B(t)=M\xi(t)(\xi(t)-1)$.

Лемма 4.3. *При* $1\leqslant A<1/F(0)$

$$B(n)=\frac{B}{\mu}\frac{\bar{A}^{n+1}-1}{\bar{A}-1}(1+\eta(n,A)),$$

где

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ A\downarrow 1}} \eta(n,A)=0.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что при $AF(0)<1$

$$B(t)=A\int_{0-}^{t+} B(t-\tau)dF(\tau)+B\int_{0-}^{t+} M^2(t-\tau)dF(\tau)$$

(ср. (4.1)). Отсюда

$$B(n)=B\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}\left(\frac{1}{1-Af(u)}\right)\int_{0-}^{k+} M^2(n-\tau)\,dF(\tau).$$

Используя лемму 4.1, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty,\ A\downarrow 1}\int_{0-}^{n+} M^2(n-\tau)\,dF(\tau)/\bar{A}^{2n}=1.$$

С другой стороны, в силу (2.5) и (2.64)

$$\lim_{n\to\infty,\ A\downarrow 1} C_n\left(\frac{1}{1-Af(u)}\right)\Big/\bar{A}^n=1/\mu.$$

Следовательно,

$$\lim_{A\downarrow 1} B(n)\Big/\sum_{k=0}\bar{A}^{n+k}=B/\mu.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Если* $AF(0)<1$, *то уравнение* (1.5) *имеет единственное решение в классе функций* $f(t)$, *удовлетворяющих условию* $|f(t)|\leqslant 1$, *для всех* $0\leqslant|z|\leqslant 1$ *).

Доказательство. Пусть $P_1(z,t)$ и $P_2(z,t)$ — два различных решения. Выберем $t_1>0$ так, чтобы $AF(t_1)<1$. Очевидно,

$$|P_1(z,t)-P_2(z,t)|\leqslant\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}|P_1(z,\tau)-P_2(z,\tau)|AF(t_1),\quad 0\leqslant t\leqslant t_1.$$

Следовательно, $P_1(z,t)\equiv P_2(z,t)$ при $0\leqslant t\leqslant t_1$ и

$$P_1(z,t)-P_2(z,t)=\int_{0-}^{t-t_1}(h(P_1(z,t-\tau))-h(P_2(z,t-\tau))\,dF(\tau).$$

Отсюда $P_1(z,t)\equiv P_2(z,t)$ для $t_1\leqslant t\leqslant 2t_1$. Повторяя эти рассуждения, получаем

$$P_1(z,t)\equiv P_2(z,t),\quad 0\leqslant t\leqslant\infty.$$

Лемма 4.5. *Пусть* $AF(0)<1$. *Тогда функция* $P(z,t)$ *не убывает по* t *при* $0\leqslant z\leqslant z_0$ *и не возрастает при* $z_0\leqslant z\leqslant 1$, *где* z_0 — *корень уравнения* $z=h(z)$, *отличный от* 1.

Доказательство. Определим последовательные приближения $P^{(j)}(z,t)$ следующим образом:

$$P^{(0)}(z,t)=z,$$

$$P^{(j)}(z,t)=\int_{0-}^{t+} h(P^{(j-1)}(z,t-\tau))\,dF(\tau)+z(1-F(t)). \tag{4.4}$$

*) В ([4]), стр. 204, доказано, что уравнение (1.5) имеет единственное неотрицательное решение при $0\leqslant z<1$.

Если $0 \leqslant z \leqslant z_0$ и $P^{(j-1)}(z,t) \geqslant z$, то $P^{(j)}(z,t) \geqslant z$. Поскольку $P^{(0)}(z,t) \equiv z$, это неравенство имеет место для всех $j \geqslant 0$. Если $P^{(j-1)}(z,t)$ не убывает, то

$$P^{(j)}(z,t_2) - P^{(j)}(z,t_1) = \int_{0-}^{t_1} [h(P^{(j-1)}(z,t_2-\tau)) - h(P^{(j-1)}(z,t_1-\tau))] \times$$

$$\times dF(\tau) + \int_{t_1}^{t_2} h(P^{(j-1)}(z,t_2-\tau))\,dF(\tau) - z\int_{t_1}^{t_2} dF(\tau) \geqslant 0$$

для $t_2 \geqslant t_1$, поскольку $h(P^{(j-1)}(z,t-\tau)) \geqslant z$. Таким образом, $P^{(j)}(z,t)$ не убывает по t. Если $P^{(j-1)}(z,t) \geqslant P^{(j-2)}(z,t)$, то

$$P^{(j)}(z,t) \geqslant \int_{0-}^{t+} h(P^{(j-2)}(z,t-\tau))\,dF(\tau) + z(1-F(t)) = P^{(j-1)}(z,t).$$

С другой стороны, $P^{(j)}(z,t) \leqslant 1$. Поэтому существует

$$\lim_{j\to\infty} P^{(j)}(z,t) = P^*(z,t).$$

Очевидно, $P^*(z,t)$ не убывает по t и удовлетворяет уравнению (1.5). В силу леммы 4.3 $P^*(z,t) = P(z,t)$.

В случае $z_0 \leqslant z \leqslant 1$ доказательство вполне аналогично.

Лемма 4.6. *Если у двух ветвящихся процессов функции распределения времени жизни удовлетворяют условию $F_1(t) \geqslant F_2(t)$, $AF_1(0) < 1$, а $h(z)$ одна и та же, то*

$$P_1(z,t) \geqslant P_2(z,t) \quad \text{при } 0 \leqslant z \leqslant z_0$$

и

$$P_1(z,t) \leqslant P_2(z,t) \quad \text{при } z_0 \leqslant z \leqslant 1,$$

где z_0 отличный от 1 корень уравнения $z = h(z)$, $P_i(z,t)$, $i = 1, 2$, производящая функция числа частиц в момент времени t, соответствующая $F_i(t)$.

Доказательство. Рассмотрим последовательные приближения $P_i^{(j)}(z,t)$ для $P_i(z,t)$, $i = 1, 2$, определяемые посредством (4.4). Очевидно,

$$P_i^{(j)}(z,t) = \int_{0-}^{\infty} h(P_i^{(j-1)}(z,t-\tau))\,dF_i(\tau) + (z - h(z))(1 - F_i(t)),$$

если положить $P_i^{(j)}(z,t) = z$ для $t < 0$. Если $0 \leqslant z \leqslant z_0$, то $P_i^{(j)}(z,t)$ не убывает. Поэтому, предположив, что

$$P_1^{(j-1)}(z,t) \geqslant P_2^{(j-1)}(z,t), \quad \text{имеем}$$

$$\int_{0-}^{\infty} h(P_1^{(j-1)}(z,t-\tau))\,dF_1(\tau) \geqslant \int_{0-}^{\infty} h(P_2^{(j-1)}(z,t-\tau))\,dF_1(\tau) =$$

$$= h(z) + \int_{0-}^{\infty} F_1(t-\tau)\,dh(P_2^{(j-1)}(z,\tau)) \leqslant \int_{0-}^{\infty} h(P_2^{(j-1)}(z,t-\tau))\,dF_2(\tau),$$

т. е.

$$P_1^{(j)}(z,t) \geqslant P_2^{(j)}(z,t).$$

Если же $z_0 \leqslant z \leqslant 1$, то $P^{(j)}(z,t)$ не возрастает. Следовательно,

$$\int_{0^-}^{\infty} h(P_1^{(j-1)}(z,t-\tau))\,dF_1(\tau) \leqslant \int_{0^-}^{\infty} h(P_2^{(j-1)}(z,t-\tau))\,dF_1(\tau) =$$

$$= h(z) + \int_{0^-}^{\infty} F_1(t-\tau)\,dh(P_2^{(j-1)}(z,\tau)) \leqslant \int_{0^-}^{\infty} h(P_2^{(j-1)}(z,t-\tau))\,dF_2(\tau)$$

при условии, что

$$P_1^{(j-1)}(z,t) \leqslant P_2^{(j-1)}(z,t).$$

Поскольку $P_1^{(0)}(z,t) = P_2^{(0)}(z,t)$, то $P_1^{(j)}(z,t) \leqslant P_2^{(j)}(z,t)$ при $z_0 \leqslant z \leqslant 1$ и $P_1^{(j)}(z,t) \geqslant P_2^{(j)}(z,t)$ при $0 \leqslant z \leqslant z_0$ для всех $j \geqslant 0$. Очевидно, эти два неравенства остаются справедливыми и для $P_i(z,t) = \lim\limits_{j\to\infty} P_i^{(j)}(z,t)$. Лемма доказана.

Положим $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^{-k}$.

Лемма 4.7. *Существует такое* ε_0, *что*

$$Q_n(z) \leqslant \frac{K}{S_n(\bar{A}) + 1/\bar{A}^n(1-z)}, \qquad V_n(\varepsilon) \leqslant 1+\varepsilon_0, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $Q_n(z) \leqslant M(n)(1-z)$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. В силу лемм 4.1 и 4.2 существует такая постоянная K, что $M(n) < K\bar{A}^n$, $V_n(\varepsilon) \leqslant A \leqslant 1+\rho$. Следовательно,

$$Q_n(z) \leqslant \min[Q_n, K\bar{A}^n(1-z)] \leqslant \frac{2}{Q_n^{-1} + 1/K\bar{A}^n(1-z)}$$

(мы пользуемся здесь неравенством $\min[a,b] \leqslant 2/(a^{-1}+b^{-1})$). Остается применить оценку для Q_n, которая дается леммами 2.8 и 2.9.

Лемма 4.8. *Если выполнены условия леммы* 2.10, *то*

$$Q_n(z) > \frac{K}{S_n(\bar{\bar{A}}) + 1/\bar{\bar{A}}^n(1-z)}, \qquad |A-1| < \delta.$$

Доказательство. Положим

$$Q_k(z) = \frac{(1-z)\bar{\bar{A}}^k}{(1-z)S_k(\bar{\bar{A}})\bar{\bar{A}}^k + 1} v_k(z).$$

Из (2.1) тогда следует

$$\frac{\bar{\bar{A}}^k v_k(z)}{S_k(\bar{\bar{A}})\bar{\bar{A}}^k(1-z)+1} \geqslant A\bar{\bar{A}}^k \sum_{i=k-N}^{k} \frac{\bar{\bar{A}}^{i-k} f_{k-i} v_i(z)}{S_k(\bar{\bar{A}})\bar{\bar{A}}^k(1-z)+1} +$$

$$+(1-z)\sum_{i=k-N}^{k}\left(\frac{S_k(\bar{\bar{A}}^{-1})-S_i(\bar{\bar{A}}^{-1})}{S_k(\bar{\bar{A}})\bar{\bar{A}}^k(1-z)+1}-\frac{B}{2}\frac{\bar{\bar{A}}^i v_i(z)}{S_i(\bar{\bar{A}})\bar{\bar{A}}^i(1-z)+1}\right)\times$$

$$\times\frac{\bar{\bar{A}}^i f_{k-i} v_i(z)}{S_i(\bar{\bar{A}})\bar{\bar{A}}^i(1-z)+1},\qquad k>N.$$

В дальнейшем доказательство совпадает с доказательством леммы 2.10.

Займемся теперь доказательством теоремы 4. В случае $A\leqslant 1$, как нетрудно видеть, для $Q_n(z)$ справедлива оценка (2.69) с заменой $A_n d_{k-1}-d_k$ на $(1-z)(A_n d_{k-1}-d_k)$. Следовательно,

$$|A_n Q_{k-1}(z)-Q_k(z)|\leqslant(1-z)|Ad_{k-1}-d_k|+$$

$$+K\left(\sum_{j=0}^{k}((j+1)^{-s}+A_j^j A_n^{-n} n^{-s-1})Q_{k-j}^2(z)\right),\qquad k\leqslant n,\qquad U_n\leqslant A\leqslant 1.$$

Далее при $j\leqslant k$

$$(S_k(\bar{A})+1/\bar{A}^k(1-z))/(S_j(\bar{A})+1/\bar{A}^j(1-z))\leqslant$$
$$\leqslant S_k(\bar{A})/S_j(\bar{A})+\bar{A}^{j-k}<2S_k(\bar{A})/S_j(\bar{A}),$$

поскольку

$$\bar{A}^{j-k}\leqslant\frac{\bar{A}^k-1}{\bar{A}^j-1}\bar{A}^{j-k}=S_k(\bar{A})/S_j(\bar{A}).$$

Таким образом,

$$|A_n Q_{k-1}(z)-Q_k(z)|\leqslant(1-z)|A_n d_{k-1}-d_k|+K(S_k(\bar{A})+1/\bar{A}^k(1-z))^{-2}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{k}((j+1)^{-s}+A_j^j A_n^{-n} n^{-s-1})S_k^2(\bar{A})/S_{k-j}^2(\bar{A}),\qquad U_n\leqslant A\leqslant 1$$

(для оценки $Q_k(z)$ используется лемма 4.7). Отсюда с помощью (2.87′) и оценок (2.74) и (2.75) получаем, что

$$|Q_k(z)-A_n Q_{k-1}(z)|\leqslant(1-z)|A_n d_{k-1}-d_k|+\tag{4.5}$$
$$+K(S_k(\bar{A})+1/\bar{A}^k(1-z))^{-2},\qquad U_n\leqslant A\leqslant 1.$$

Заметим, что (2.94) остается справедливым, если заменить Q_k на $Q_k(z)$ и $A_n d_{k-1}-d_k$ на $(1-z)(A_n d_{k-1}-d_k)$. Применяя теперь рассуждения, следующие за (2.94), выводим, что при $k\to\infty$

$$A_n Q_{k-1}(z)-Q_k(z)=-\frac{B}{2\mu}Q_k^2(z)(1+o(1))+(1-z)(A_n d_{k-1}-d_k)\tag{4.6}$$

равномерно по $0\leqslant z\leqslant 1$ и $U_\nu(n)\leqslant A\leqslant 1$, $k\leqslant n$.

Возможность применения этих рассуждений следует из (4.5) и оценки

$$\frac{Q_i(z)}{Q_k(z)}<K\frac{S_k(\bar{A}(\varepsilon))+1/\bar{A}^k(\varepsilon)(1-z)}{S_i(\bar{A})+1/\bar{A}^i(1-z)}=O(S_k(\bar{A}(\varepsilon))/S_i(\bar{A})),\tag{4.7}$$

которая в свою очередь легко получается из лемм 4.6—4.8.

Вследствие (2.116) и (2.117) при $k\to\infty$, $n\to\infty$, $n\geqslant k$

(4.8) $$\sup_{0\leqslant z\leqslant 1}(1-z)\,|A_n d_{k-1}-d_k|\,(S_k(\bar{A}(\varepsilon))+1/\bar{A}^k(\varepsilon)\,(1-z))=o(S_k^{-1}(\bar{A}(\varepsilon)))$$

равномерно по $U_\gamma(n)\leqslant A\leqslant 1$. Из (4.6) и (4.8) следует

$$A_n Q_{k-1}(z)/Q_k(z)=1+\frac{B}{2\mu}Q_k(z)\,(1+o(1))+o(1/S_k(\bar{A}(\varepsilon)))$$

равномерно по $U_\gamma(n)\leqslant A\leqslant 1$ и $0\leqslant z\leqslant 1$. Отсюда

(4.9) $$\lim_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}}\ \sup_{\substack{U_\gamma(n)\leqslant A\leqslant 1\\ k\leqslant n}} Q_{k-1}(z)/Q_k(z)=1.$$

Очевидно,

$$|Q_j(z)-M\xi(j)\,(1-z)|<M\xi^2(j)\,(1-z)^2.$$

Нетрудно видеть, что $\sup\limits_{A\leqslant 1+\rho} M\xi^2(j)<\infty$. Следовательно,

(4.10) $$\lim_{A\to 1}(1-z)/Q_j(z)=1.$$

Заметим, что

(4.11) $$\lim_{A\to 1} d_j(A)=1.$$

Из (4.10), (4.11) и (2.110) следует, что при любых N, ε и $U_\gamma(n)\leqslant A\leqslant 1$

$$(1-z)\left|\sum_{i=1}^{N}(A_n d_{i-1}-d_i)A_n^{i-n}/Q_{i-1}(z)Q_i(z)\right|<\varepsilon/A_n{}^n(1-z),$$

если n достаточно велико. Ввиду (2.97), (2.103) и (2.87)

$$\sup_{k\leqslant n}\ \sup_{U_\gamma(n)\leqslant A\leqslant 1} A_n{}^k/\bar{A}^{2k}(\varepsilon)<Kk^{s/2-1},$$

если ε достаточно мало.

В то же время в силу лемм 2.6 и 2.1 и оценки (2.72)

(4.12) $$\sup_{n>N+1}\ \sup_{U_\gamma(n)\leqslant A\leqslant 1}\sum_{k=N+1}^{n}|A_n d_{k-1}(A)-d_k(A)|\,k^{s/2-1}<\varepsilon,\ N>N(\varepsilon).$$

Из двух последних оценок и леммы 4.8 следует, что при достаточно больших N и $U_\gamma(n)\leqslant A\leqslant 1$

(4.13) $$(1-z)\sum_{k=N+1}^{n}|A_n d_{k-1}(A)-d_k(A)|\,A_n^{k-n}/Q_{k-1}(z)Q_k(z)\leqslant$$
$$\leqslant K\sum_{k=N+1}^{n}|A_n d_{k-1}(A)-d_k(A)|\,S_k^2(\bar{A}(\varepsilon))A_n^{k-n}+\varepsilon/A_n{}^n(1-z).$$

Заметим, что в силу (2.117)

(4.14) $$N^{2\delta(\gamma)}\sum_{k=N+1}^{n}|A_n d_{k-1}(A)-d_k(A)|\,S_k^2(\bar{A}(\varepsilon))A_n^{k-n}=O(S_n(A_n))$$

равномерно по $U_\gamma(n)\leqslant A\leqslant 1$.

Вследствие (4.6)

$$1/Q_k(z)=1/A_nQ_{k-1}(z)+\frac{B}{2\mu}(1+\eta_k(z,A))+$$
$$+(1-z)(A_nd_{k-1}(A)-d_k(A))/Q_{k-1}(z)Q_k(z).$$

Значит,

$$1/Q_n(z)=\frac{B}{2\mu}S_n(A_n)(1+\eta_n(z,A))+1/Q_0(z)A_n{}^n+$$

$$+(1-z)\sum_{k=1}(A_nd_{k-1}-d_k)A_n^{k-n}/Q_{k-1}(z)Q_k(z).$$

Символом $\eta_n(z,A)$ в двух последних равенствах сбозначаются функции, удовлетворяющие условию

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{0\leqslant z\leqslant 1\\ U_\gamma(n)\leqslant A\leqslant 1}}|\eta_n(z,A)|=0.$$

Отсюда в силу (2.87), (4.10) и оценок (4.12)—(4.14)

$$1/Q_n(z)=\frac{B}{2\mu}S_n(\bar A)(1+\eta_n^{(1)}(z,A))+(1-z)^{-1}\bar A^{-n}(1+\eta_n^{(2)}(z,A)),$$

где

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{0\leqslant z\leqslant 1\\ U_\gamma(n)\leqslant A\leqslant 1,}}|\eta_n^{(i)}(z,A)|=0,\qquad i=1,2,$$

а это равносильно утверждению теоремы.

В случае $A\geqslant 1$ доказательство аналогично.

Оценка для $Q_i(z)/Q_k(z)$, заменяющая 4.7, получается здесь с несколько большими усилиями.

Пусть $0=z\leqslant z_0$, $z_0<1$, $h(z_0)=z_0$. Используя леммы 4.6—4.8, получаем

$$Q_i(z)/Q_k(z)<K(S_k(\bar A(\varepsilon)+1/\bar A^k(1-z))/(S_i(\bar A)+$$
$$+1/\bar A^i(1-z))\leqslant K(S_k(\bar A(\varepsilon))/S_i(\bar A)+\bar A^i/\bar A^k(\varepsilon)).$$

Нетрудно видеть, что при $A\geqslant 1$ $\bar A\leqslant\bar A(\varepsilon)$. Поэтому

$$(4.15)\qquad Q_i(z)/Q_k(z)<K(S_k(\bar A)/S_i(\bar A)+1)\leqslant K\left(\frac{k}{i}+1\right),\quad i\leqslant k,\ 0\leqslant z\leqslant z_0.$$

Если же $z_0\leqslant z\leqslant 1$, то в силу леммы 4.4

$$(4.16)\qquad Q_i(z)/Q_k(z)\leqslant 1,\quad i\leqslant k.$$

С помощью (4.15) и (4.16), применяя те же рассуждения, что и при выводе (4.6), получаем, что при $A\uparrow 1$ и $k\to\infty$

$$(4.17)\qquad \bar AQ_{k-1}(z)-Q_k(z)=\frac{B}{2\mu}Q_k^2(z)(1+o(1))+(1-z)(\bar Ad_{k-1}(A)-d_k(A))$$

равномерно относительно $0\leqslant z\leqslant 1$.

Остановимся теперь на оценке $\sigma(z, A, N)\equiv(1-z)\sum_{k=N+1}^{n}|\bar{A}d_{k-1}(A)-$ $-d_k(A)|\bar{A}^{k-n}/Q_{k-1}(z)Q_k(z)$. Если $0\leqslant z\leqslant z_0$ то, используя леммы 2.3, 4.6 и 4.8, находим, что при достаточно больших N

$$\sigma(z,A,N)<\varepsilon\sum_{k=N+1}^{n}k^{-2}\bar{A}^{k-n}(S_k^2(\bar{A}(\varepsilon))+1/\bar{A}^{2k}(\varepsilon)(1-z))$$

каково бы ни было $\varepsilon>0$. Очевидно, $k^{-2}S_k^2(\bar{A}(\varepsilon))\leqslant1$, $\bar{A}^k/\bar{A}^{2k}(\varepsilon)\leqslant1$. Поэтому

$$\sigma(z, A, N)\leqslant\varepsilon(\bar{S}_n(A)+1/\bar{A}^n(1-z)),\qquad 0\leqslant z\leqslant z_0. \tag{4.18}$$

Пусть теперь $z_0\leqslant z\leqslant1$. Нетрудно видеть, что

$$Q_k(z)\geqslant M(k)(1-z)-\frac{B(k)}{2}(1-z)^2.$$

В силу лемм 4.1 и 4.3 существуют такие $A_0>1$ и k_0, не зависящее от A, что одновременно

$$M(k)>\frac{1}{2}\bar{A}^k,\qquad B(k)<\frac{2}{\mu}B\bar{A}^{2k}S_k(\bar{A}),$$

если $1\leqslant A\leqslant A_0$, $k\geqslant k_0$. Следовательно,

$$Q_k(z)>\frac{1}{4}\bar{A}^k(1-z) \tag{4.19}$$

при условии, что $1\leqslant A\leqslant A_0$, $k\geqslant k_0$ и

$$1-z<\mu/4\bar{A}^kS_k(\bar{A})B. \tag{4.20}$$

Пусть k_1 наибольшее из $k\geqslant k_0$, удовлетворяющих неравенству (4.20) (k_1 конечно, зависит от z и A). Тогда

$$1-z\geqslant\mu/4\bar{A}^{k_1+1}S_{k_1+1}(\bar{A})B.$$

Отсюда в силу (4.16) и (4.19)

$$Q_k(z)\geqslant Q_{k_1}(z)\geqslant\mu/16\bar{A}S_{k_1+1}(\bar{A})B,\quad k\geqslant k_1,\quad 1\leqslant A\leqslant A_0. \tag{4.21}$$

Из леммы 2.3 и оценок (4.19) и (4.21) следует, что при достаточно больших N

$$\begin{aligned}\sigma(z,A,N)&<\varepsilon\Bigg(\sum_{k=N+1}^{k_1}1/k^2\bar{A}^n(1-z)+\\&+\sum_{k=k_1+1}^{n}k^{-2}S_{k_1+1}^2(\bar{A})\bar{A}^{k-n}\Bigg)<\varepsilon(1/\bar{A}^n(1-z)+S_n(\bar{A})).\end{aligned} \tag{4.22}$$

Далее, используя (4.10), заключаем, что при любых N и ε

$$(4.23) \qquad (1-z)\sum_{k=1}^{N} |\bar{A}d_{k-1}(A)-d_k(A)|\bar{A}^{k-n}/Q_{k-1}(z)Q_k(z)<\varepsilon/\bar{A}^n(1-z),$$

если A достаточно близко к 1.

Из (4.17) с помощью оценок (4.18), (4.22) и (4.23) выводим, что

$$1/Q_n(z)=\left(\frac{B}{2\mu}S_n(\bar{A})+1/\bar{A}^n(1-z)\right)(1+\eta_n(z,A)),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty, A\downarrow 1}\ \sup\limits_{0\leqslant z\leqslant 1}|\eta_n(z,A)|=0$, а это равносильно утверждению теоремы.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 5. Пусть

$$\psi_t(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,d_xG(t,x).$$

Как известно (см. ([3]), § 4)

$$\psi_t(s)=1-Q(e^{-s/M*(t)},t)/Q(t).$$

Теперь нужно воспользоваться асимптотическими выражениями для $Q(t)$, $Q(z,t)$ и $M(t)$, которые даются теоремами 1 и 3 и леммами 4.1 и 4.2 (ср. ([3]), § 4).

Поступила в редакцию
19 апреля 1973 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Нагаев С. В.* Переходные явления для зависящих от возраста ветвящихся процессов с дискретным временем I, Сиб. матем. ж. XV, № 2 (1974), 368—394.

[2] *Севастьянов Б. А.*, О регулярности ветвящихся процессов, Матем. заметки, I, № 1 (1967), 53–62.

[3] *Севастьянов Б. А.*, Ветвящиеся процессы с превращениями, зависящими от возраста частиц, Теория вероятностей и ее применения, IX, № 4 (1964), 578–594.

[4] *Харрис Т.*, Теория ветвящихся случайных процессов, «Мир», М., 1966.