ЛИТЕРАТУРА

1. Фук Д. Х., Нагаев С. В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин, „Теория вероятн. и ее примен.“, т. XVI, № 4, 1971, с. 660—675.
2. Нагаев А. В. Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин, Автореф. на соиск. учен. степени докт. физ.-мат. наук, Л., 1971.

УДК 519.21

С. В. НАГАЕВ, С. К. САКОЯН

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

Рассмотрим последовательность случайных величин $\{\xi_i\}_1^n$ с функциями распределения $\{F_i(u)\}_1^n$.

Пусть $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, а $F^{*n}(u)$ — функция распределения S_n. Будем считать, что $M\xi_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Для любого $\delta > 2$ определим класс функций $\{g(u)\} = G(\delta)$ на $(0, \infty)$ с непрерывной невозрастающей производной, удовлетворяющей условиям:

1) $g'(u) \to 0$ при $u \to \infty$;

2) $g'(u) \geqslant \frac{\delta}{u}$.

Очевидно, введенный класс функций шире класса, определенного С. В. Нагаевым в работе [1], а также класса функций, рассмотренного в статье [2].

Допустим, что

$$\int_0^\infty e^{g(u)} dF_i(u) < \infty, \quad M\xi_i^2 < \infty, \quad i = \overline{1, n}.$$

Положим

$$b_{gi} = \int_0^\infty e^{g(u)} dF_i(u), \quad \sigma_i^2 = M\xi_i^2, \quad B_{gn} = \sum_{i=1}^n b_{gi}, \quad B_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2;$$

$$S(u) = e^{-g(u)} g'(u) u^2.$$

Пусть γ, $\{\gamma_i\}_1^3$, β — положительные константы, такие, что $\sum_{i=1}^3 \gamma_i = 1$, $\beta = 1 - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_2}{\delta}$, $\gamma < 1$ и a — решение уравнения

$$\frac{u+1}{u} = e^{u-1}.$$

Доопределим функцию $S(u)u$ и в нуле по непрерывности.

Пусть $S_1 = \sup_{u>0} S(u)u$, а $u_0 = \inf\{u : S(u)u = S_1\}$. Рассмотрим уравнение

$$S(u)u = \frac{2a^2\gamma_2}{\gamma_1 e}\frac{B_n^2}{B_{gn}}. \tag{1}$$

Пусть $V_1(n)$ — наименьшее решение уравнения (1) при $\frac{2a^2\gamma_2 B_n^2}{e\gamma_1 B_{gn}} < S_1$. В противном случае полагаем $V_1(n) = u_0$. Пусть $\Lambda_1(n) = \frac{2(a+1)B_n^2}{\gamma_1 V_1(n)}$. Заметим, что если $\delta > 2$, то $S_1 = \infty$, а $S(u)u$ строго убывает к нулю при $u \to \infty$. Поэтому в этом случае решение уравнения (1) существует и единственно.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\gamma\gamma_1 a^2}{2(a+1)}\frac{x^2}{B_n^2} = g(\gamma x) - \ln B_{gn}\frac{\gamma}{\gamma_3}. \tag{2}$$

Пусть $\Lambda_2(n)$ — решение уравнения (2) для тех x, для которых $g(\gamma x) - \ln B_{gn}\frac{\gamma}{\gamma_3} > \frac{\gamma_3}{\beta}$ и $\Lambda_2(n) = \sqrt{\frac{2(a+1)\gamma_3}{\gamma\gamma_1 a^2\beta}}$ — в противном случае.

Рассмотрим, наконец, уравнение

$$S\left(\frac{a\gamma x}{g(\gamma x) - \ln B_{gn}\frac{\gamma}{\gamma_3}}\right) = \frac{\gamma_2 a x}{e^a B_{gn}}. \tag{3}$$

Пусть $\Lambda_3(n)$ — решение уравнения (3) для x, таких, что $g(\gamma x) - \ln B_{gn}\frac{\gamma}{\gamma_3} > \frac{\gamma_3}{\beta}$ и $\Lambda_3(n) = \frac{1}{\gamma}\bar{S}^{-1}\left(\frac{\gamma_2 a}{\gamma e^a B_{gn}}\right)$ — в противном случае $\left(\text{здесь } \bar{S}(u) = \frac{S(u)}{u}\right)$.

Положим $\Lambda_{\min}(n) = \min(\Lambda_1(n), \Lambda_2(n))$, $\Lambda_{\max}(n) = \max(\Lambda_2(n), \Lambda_3(n))$, $L_1 = (0, \Lambda_{\min}(n)]$, $L_2 = (\Lambda_{\min}(n), \Lambda_{\max}(n)]$, $L_3 = (\Lambda_{\max}(n), \infty)$, $\chi_1(u) = e^{\frac{\gamma_1}{\gamma}} I_{L_1}$, $\chi_2(u) = e^{\frac{\gamma_1}{\gamma}} I_{L_2}$, $\chi_3(u) = \frac{\gamma}{\gamma_3} e^{\frac{\gamma_3}{\gamma}} I_{L_3}$, где I_{L_i} — индикатор множества L_i, $i = \overline{1, 3}$.

Теорема 1. При $\delta \geqslant 2$, $\forall g \in G(\delta)$

$$P(S_n \geqslant x) \leqslant \chi_1(x)\exp\left\{-\frac{\gamma_1\beta a^2 x^2}{2(a+1)B_n^2}\right\} +$$

$$+\chi_2(x)\exp\left\{-\frac{\beta a x}{S^{-1}\left(\frac{\gamma_2 a x}{e^a B_{gn}}\right)}\right\}+\chi_3(x)\, B_{gn}^{\frac{\beta}{\gamma}}\exp\left\{-\frac{\beta}{\gamma}\, g(\gamma x)\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(1-F_i(\gamma x)\right).$$

Приведенная оценка является обобщением соответствующих неравенств в работах [2] и [3].

Следствие 1. При $\delta \geqslant 2$, $\forall g \in G(\delta)$

$$P\left(S_n \geqslant x\right) \leqslant \overline{\chi}_1(x)\exp\left\{-\frac{\gamma_1\gamma a^2 x^2}{2(a+1)B_n^2}\right\}+$$

$$+\overline{\chi}_2(x)\exp\left\{-\frac{\gamma a x}{S^{-1}\left(\frac{\gamma_2 a x}{e^a B_{gn}}\right)}\right\}+$$

$$+\overline{\chi}_3(x)\, B_{gn}\exp\left\{-g(\gamma x)\right\},$$

где

$$\overline{\chi}_i(x) = \left(\chi_i(x)+1\right) I_{L_i}, \quad i=\overline{1,3}.$$

Доказательство. Положим в уравнениях (2) и (3) $\gamma=\beta$. В этом случае, если $g(\gamma x)-\ln B_{gn}\frac{\gamma}{\gamma_3} \geqslant \frac{\gamma_3}{\gamma}$, то из уравнений (2) и (3) получим

$$\frac{\gamma}{\gamma_3} B_{gn}\, e^{-g(\gamma x)} \leqslant \exp\left\{-\frac{\gamma_1\gamma a^2 x^2}{2(a+1)B_n^2}\right\}, \quad \forall x \in L_1, \tag{4}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_3} B_{gn}\, e^{-g(\gamma x)} \leqslant \exp\left\{-\frac{\gamma a x}{S^{-1}\left(\frac{\gamma a x}{e^a B_{gn}}\right)}\right\}, \quad \forall x \in L_2. \tag{5}$$

Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1-F_i(\gamma x)\right) \leqslant B_{gn}\, e^{-g(\gamma x)}. \tag{6}$$

Из теоремы 1 и неравенств (4) и (6) вытекает утверждение следствия 1. В случае, когда $g(\gamma x)-\ln B_{gn}\frac{\gamma}{\gamma_3} < \frac{\gamma_3}{\gamma}$, $\frac{\gamma}{\gamma_3} B_{gn} \times$ $\times \exp\left\{-g(\gamma x)+\frac{\gamma}{\gamma_3}\right\} > 1$, утверждение следствия 1 становится тривиальным.

Следствие 2. Если $g \in G(\delta)$ и, кроме того, $g'(u) \leqslant L\frac{e^{g(u)}}{u^l}$, $l > 2$, $L > 0$, то

$$P(S_n > x) \le \bar{\chi}_1(x)\exp\left\{-\frac{\gamma_1\gamma a^2 x^2}{2(a+1)B_n^2}\right\} +$$

$$+\bar{\chi}_2(x)\exp\left\{-\gamma a x\left[\frac{\gamma_2 x a}{Le^a B_{gn}}\right]^{\frac{1}{l-2}}\right\} + \bar{\chi}_3(x)\, B_{gn}\exp\{-g(\gamma x)\}.$$

Доказательство. Из дополнительного условия на класс функций $G(\delta)$ имеем $S(u) \le Lu^{l-2}$, следовательно, $\frac{1}{S^{-1}(V)} \ge$ $\ge \left(\frac{V}{L}\right)^{\frac{1}{l-2}}$. Подставив эту оценку в средний член правой части неравенства следствия 1, получим утверждение следствия 2.

Доказательство теоремы 1. Положим

$$\bar{\xi}_i = \begin{cases} \xi_i, \text{ если } & \xi_i \le y \\ 0, \text{ если } & \xi_i > y, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

где $y = \gamma x$.

Пусть $\bar{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i$, а $F^{*n}(u)$ - функция распределения $\bar{S}_n$. Случайные величины $\bar{\xi}_i$ независимы и ограничены сверху, поэтому $\forall h > 0$. Имеем

$$P\left(\bar{S}_n \ge x\right) \le e^{-hx}\prod_{i=1}^{n} Me^{h\bar{\xi}_i}.$$

Отсюда и из неравенства $P\left(\bar{S}_n \ne S_n\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i > y)$ следует, что

$$P(S_n > x) \le P\left(\{\bar{S}_n > x\} \cup \{\bar{S}_n \ne S_n\}\right) \le e^{-hx}\prod_{i=1}^{n} Me^{h\bar{\xi}_i} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i > y). \tag{7}$$

Пусть

$$R_i(y, h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hu}\, d\bar{F}_i(u).$$

Очевидно,

$$R_i(y, h) = H_i(h) + H_i(y, h), \tag{8}$$

где

$$H_i(h)=\int_{-\infty}^{ah^{-1}} e^{hu}d\overline{F}_i(u),\quad H_i(y,h)=\int_{ah^{-1}}^{\max(y,\,ah^{-1})} e^{hu}d\overline{F}_i(u).$$

Раскладывая функцию e^{hu} в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Коши, получаем

$$H_i(h)=\int_{-\infty}^{ah^{-1}} e^{hu}dF_i(u)+\int_{y}^{\infty}dF_i(u)=\left\{\int_{-\infty}^{ah^{-1}}+\int_{y}^{\infty}\right\}dF_i(u)+$$

$$+h\int_{-\infty}^{ah^{-1}} u\,dF_i(u)+h^2\int_{-\infty}^{ah^{-1}} e^{\theta hu}(1-\theta)\,u^2dF_i(u),\tag{9}$$

где $0<\theta<1$.

Очевидно,

$$-\int_{ah^{-1}}^{y} dF_i(u)\geqslant-\frac{h^2\sigma_i^2}{a^2},\quad \int_{-\infty}^{ah^{-1}} u\,dF_i(u)=$$

$$=-\int_{ah^{-1}}^{\infty} u\,dF_i(u)\geqslant-\frac{h\sigma_i^2}{a}.$$

С помощью этих неравенств и неравенства $e^{v\theta}(1-\theta)\leqslant\frac{e^{v}-1}{v}$ из (9) получим

$$|H_i(h)-1|\leqslant h^2\sigma_i^2\frac{a+1}{a^2}.\tag{10}$$

Пусть $x_1(h)$ — наибольшее решение уравнения $g'(x)=h$. Заметим, что из условий 1) и 2) следует, что это решение существует, $\forall h>0$.

Получим теперь оценку для $H_i(y,h)$:

$$H_i(y,h)=\int_{ah^{-1}}^{x_1(h)} e^{hu}dF_i(u)+\int_{x_1(h)}^{y} e^{hu}dF_i(u)=$$

$$=\int_{ah^{-1}}^{x_1(h)} e^{hu-g(u)}\,e^{g(u)}dF_i(u)+\int_{x_1(h)}^{y} e^{hu-g(u)}\,e^{g(u)}dF_i(u)\leqslant$$

$$\leqslant b_{gi}\left(e^{a-g(ah^{-1})}+e^{hy-g(y)}\right).\tag{11}$$

Подставив в (8) оценки (10) и (11), получим

$$R_i(y,\ h) \leqslant 1+\frac{a+1}{a^2}h^2\sigma_i^2+b_{gi}e^{a-g\,(ah^{-1})}+b_{gi}e^{hy-g(y)},$$

откуда

$$e^{-hx}\prod_{i=1}^{n}R_i(y,\ h)\leqslant \exp\left\{\frac{a+1}{a^2}h^2B_n^2+B_{gn}\,e^{a-g\,(ah^{-1})}+\right.$$

$$\left.+B_{gn}\,e^{hy-g(y)}-hx\right\}. \tag{12}$$

Определим функции $h_i(x)$, $i=\overline{1,3}$, равенствами

$$h_1(x)=\frac{\gamma_1 a}{2\,(a+1)}\frac{x}{B_n^2},$$

$$h_2(x)=\frac{a}{S^{-1}\left(\dfrac{\gamma_2 ax}{e^a\,B_{gn}}\right)},$$

$$h_3(x)=\begin{cases}\dfrac{g(\gamma x)-\ln B_{gn}\dfrac{\gamma}{\gamma_3}}{\gamma x}, & \text{если}\quad g(\gamma x)-\ln B_{gn}\dfrac{\gamma}{\gamma_3}\geqslant\dfrac{\gamma_3}{\beta}\\[2ex] \dfrac{\gamma_3}{\beta\gamma x}, & \text{если}\quad g(\gamma x)-\ln B_{gn}\dfrac{\gamma}{\gamma_3}<\dfrac{\gamma_3}{\beta}\end{cases}$$

и пусть

$$\overline{h}(x)=\min_{i=\overline{1,3}}h_i(x).$$

Замечание. На $(0,\ \infty)$ существует строго убывающая от ∞ до 0 функция $S^{-1}(u)$. Проинтегрировав неравенство из условия 2) на $(1,\ \infty)$, получим

$$g(u)-g(1)=\int_1^u g'(u)\,du\geqslant\delta\ln u,\quad \delta>2.$$

Отсюда получаем, что при $u>1$ функция $e^{g(u)}u^2$ - невозрастающая. Кроме того, на интервалах постоянства $g'(u)$ функция $e^{-g(u)}u^2$ строго убывает. Это совместно с условием 1) показывает, что $S(u)$ при $u>1$ строго убывает к нулю.

При $u<1$ из условия 2) имеем

$$g(1)-g(u)=\int_u^1 g'(u)\,du\geqslant-\delta\ln u.$$

Отсюда и из условия 2) следует, что

$$S(u) \geq \delta e^{-g(u)} u \geq \delta e^{g(1)} u^{-\delta+1},$$

поэтому $S(u) \uparrow \infty$ при $u \to \infty$. Следовательно, $S(u)$ строго убывает на $(0, \infty)$ от ∞ до 0. Это и доказывает утверждение замечания.

В дальнейшем достаточно рассматривать случай, когда $g(\gamma x) - \ln B_{gn} \frac{\gamma}{\gamma_3} \geq \frac{\gamma_3}{\beta}$. В противном случае $\left(\frac{\gamma}{\gamma_3} B_{gn}\right)^{\frac{\gamma}{\beta}} \exp \times$ $\times \left\{-\frac{\gamma}{\beta} g(\gamma x) + \frac{\gamma}{\gamma_3}\right\} > 1$ и утверждение теоремы 1 становится тривиальным.

Легко видеть, что

$$B_{gn} e^{\bar{h}(x) y - g(y)} \leq B_{gn} e^{h_3(x) y - g(y)} = \frac{\gamma_3}{\gamma}. \tag{13}$$

Кроме того,

$$S\left(\frac{a}{\bar{h}(x)}\right) \leq S\left(\frac{a}{h_2(x)}\right) = \frac{\gamma_2 a x}{e^a B_{gn}}.$$

Отсюда, используя условие 2) и вспоминая определение функции $S(u)$, получаем

$$B_{gn} e^{a - g\left(\frac{a}{\bar{h}(x)}\right)} \leq \frac{\gamma_2 x \bar{h}^2(x)}{g'(\bar{h}(x))} \leq \frac{\gamma_2 x \bar{h}(x)}{\delta}. \tag{14}$$

Пользуясь оценками (13), (14) из (12), имеем

$$e^{-\bar{h}(x) x} \prod_{i=1}^{n} R_i(y, \bar{h}(x)) \leq \exp\left\{ -\bar{h}(x) x + \frac{a+1}{a^2} h_1(x) \bar{h}(x) B_n^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma_2 x \bar{h}(x)}{\delta} + \frac{\gamma_3}{\gamma}\right\} \exp\{-\beta \bar{h}(x) x\}.$$

Подставляя эту оценку в (7), получаем

$$P(S_n \geq x) \leq \exp\{-\beta \bar{h}(x) x\} + \sum_{i=1}^{n} (1 - F_i(\gamma x)). \tag{15}$$

Легко видеть, что условие $x \in L_i$ равносильно тому, что $\bar{h}(x) = h_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$. Подставляя в оценку (15) соответствующее $h_i(x)$, получаем утверждение теоремы 1.

Построим пример, показывающий качество оценки в теореме 1. Пусть

$$g(u) = \begin{cases} u^\alpha, & \text{если } u \geq \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ \delta \ln u + \frac{\delta}{\alpha}\left(1 - \ln \frac{\delta}{\alpha}\right), & \text{если } u < \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \ 0 < \alpha < 1, \ \delta > 2. \end{cases}$$

Очевидно, $g \in G$.

Рассмотрим трехточечное распределение $F = \{p, 1-2p, p\}$ со скачками в точках $-y$, 0, y. Для введенного распределения F

$$P(S_n \geqslant x) \geqslant C_n^l p^l (1-2p)^{n-l} = \frac{n(n-1)\cdots(n-l-1)}{n^l} \times$$

$$\times \frac{(np)^l}{l!}(1-2p)^{n-l},$$

где $l = \left[\frac{x}{y}\right]$.

Положим $l = n^{\frac{\alpha}{2}}$, $p = \frac{x}{ny} b$, где b — некоторое фиксированное число, которое будет выбрано позднее. В этом случае, используя формулу Стирлинга, получаем

$$P(S_n \geqslant x) \geqslant \exp\left\{l + l \ln b - 2np - \frac{1}{2}\ln l + o(1)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left\{-\frac{x}{y}\left(\ln\frac{1}{b} - 1 + 2b + \varepsilon\right)\right\}. \tag{16}$$

Здесь и далее $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Заметим, что $S(u) = \alpha u^{1+\alpha} e^{-u^\alpha}$, $\forall\ u > \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Следовательно, при достаточно больших u

$$S(u) < e^{-(1-\varepsilon)u^\alpha}.$$

Поэтому, при достаточно малых v

$$S^{-1}(v) < (1+\varepsilon)\ln\frac{1}{v}.$$

Таким образом, при достаточно больших y

$$S^{-1}\left(\frac{\gamma_2 a x}{e^a B_{gn}}\right) = S^{-1}\left(\frac{\gamma_2 a y}{b e^a e^{y^\alpha}}\right) \leqslant (1+\varepsilon) y.$$

Следовательно,

$$\exp\left\{-\frac{\gamma a x}{S^{-1}\left(\frac{\gamma_2 a x}{e^a B_{gn}}\right)}\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{\gamma a x}{(1+\varepsilon) y}\right\}. \tag{17}$$

Для распределения F имеем

$$\exp\left\{-\frac{\gamma_1 \gamma a^2 x^2}{2(a+1) B_n^2}\right\} = \exp\left\{-\frac{\gamma_1 \gamma a^2}{4(a+1)}\frac{x}{by}\right\}, \tag{18}$$

$$B_{gn}\exp\{-g(\gamma x)\} = np \exp\left\{-\gamma^\alpha x^\alpha\left(1 - \left(\frac{y}{\gamma x}\right)^\alpha\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{-(1-\varepsilon)\gamma^\alpha x^\alpha\}. \tag{19}$$

Положим $x = n^{\frac{1}{2\alpha}}$, тогда

$$B_{gn} \exp\{-g(\gamma x)\} = o\left(P\left(S_n > x\right)\right). \tag{20}$$

Из неравенства (16) при достаточно малом b имеем

$$\exp\left\{-\frac{\gamma\gamma_1 a^2}{4(a+1)} \frac{x}{by}\right\} = o\left(P\left(S_n \geqslant x\right)\right).$$

Поэтому из (18) и (20) следует, что в оценке следствия 1 средний член $\exp\left\{-\frac{\gamma a x}{S^{-1}\left(\frac{\gamma_2 a x}{e^a B_{gn}}\right)}\right\}$ является главным.

Более того, неравенства (16) и (17) показывают, что для выбранного распределения F выражение $\exp\left\{-\frac{\gamma a x}{S^{-1}\left(\frac{\gamma_2 a x}{e^a B_{gn}}\right)}\right\}$ и $P\left(S_n > x\right)$ отличаются только константами в показателях экспоненты. Выбором b можно добиться того, что эти константы будут мало отличаться друг от друга. Это позволяет утверждать, что оценка, приведенная в теореме 1, в определенном смысле является достижимой.

ЛИТЕРАТУРА

. Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений, „Теор. вероятн. и ее примен.", 1965, № 10, с. 231—254.

2. Сакоян С. К. Некоторые оценки функций распределения сумм случайных величин, В сб. „Вероятностные процессы и статистические выводы", Ташкент, Изд-во „Фан" УзССР, 1973, с. 136—151.

3. Фук Д. Х., Нагаев С. В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин, „Теор. вероятн. и ее примен.", 1971, № 4, с. 660—675.

УДК 948.3

Н. П. РАСУЛОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВИНЕРА — ХОПФА

В таких задачах статистики стационарных случайных процессов, как линейная экстраполяция, фильтрация, оценка коэффициентов регрессии, важную роль играет уравнение

$$\theta(t) = \int e^{it\lambda} \varphi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda, \quad t \in S, \tag{1}$$

где $\theta(t)$ — функция, заданная на некотором множестве S действительной прямой, а $\varphi(\lambda)$ ищется в пространстве H_S, которое является замыканием линейной оболочки функций $e^{it\lambda}$, $t \in S$ по норме $\|\varphi\| = \left(\int\limits^{\pi} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$ (см., например [1]). В практически интересном случае „рационального" спектра разработан метод решения интегрального уравнения (1) путем сведения его к краевой задаче для некоторого обыкновенного дифференциального (разностного) уравнения [1]. Мы предлагаем более простой способ решения уравнения (1) для дискретного времени t; случай непрерывного времени можно найти в [2], [3].

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \varphi(\lambda) \left| \frac{Q(e^{i\lambda})}{R(e^{i\lambda})} \right|^2 d\lambda, \quad t \in S, \tag{2}$$

где

$$R(z) = \sum_{k=0}^{r} \rho_k z^k, \quad Q(z) = \sum_{k=0}^{q} \gamma_k z^k.$$

Будем предполагать, что все корни полинома $R(z)$ по модулю больше единицы. Тогда при условии $\sum\limits_{t \in S} |\theta(t)|^2 < \infty$ решение уравнения (2) существует и единственно.

Введем оператор сдвига Δ, действующий по формулам

$$\Delta^k \theta(t) = \theta(t+k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Лемма 1. Пусть $Q(z) \equiv 1$ и $S = \{t : t \leqslant T\}$. Тогда решение уравнения (2) имеет вид

$$\varphi(\lambda) = R(e^{i\lambda}) \sum_{t=-\infty}^{T} e^{-it\lambda} \overline{R(\Delta^{-1})}\, \theta(t). \tag{3}$$

Доказательство. Применяя оператор $\overline{R(\Delta^{-1})}$ к обеим частям соотношения (2), имеем

$$\overline{R(\Delta^{-1})}\, \theta(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \frac{\varphi(\lambda)}{R(e^{i\lambda})} d\lambda, \quad t \leqslant T.$$

Функция $e^{iT\lambda} \dfrac{\varphi(\lambda)}{R(e^{i\lambda})}$ аналитична в единичном круге и потому

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \frac{\varphi(\lambda)}{R(e^{i\lambda})} d\lambda = 0, \quad t \geqslant T+1.$$

Использовав разложение $\dfrac{\varphi(\lambda)}{R(e^{i\lambda})}$ в ряд Фурье, получим (3).

Лемма 2. Решение разностного уравнения

$$R(\Delta^{-1})\, \theta_0(t+r) = 0, \quad t \geqslant 1, \tag{4}$$