ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том XXII Выпуск 2
1977

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

С. В. НАГАЕВ, И. Ф. ПИНЕЛИС

§ 1. Введение. Формулировка и обсуждение результатов

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Предметом настоящей работы являются, в основном, оценки сверху вероятностей $\mathbf{P}(S_n \geqslant x)$ и $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant x)$, $x > 0$.

Простейшую оценку для вероятности $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant x)$ при условии $\mathbf{M}X_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, дает неравенство Чебышева

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant x) \leqslant \frac{B_n^2}{x^2}, \quad \text{где } B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2, \ \ \sigma_i^2 = \mathbf{D}X_i. \tag{1}$$

Существует много уточнений и обобщений неравенства (1) (см., например, обзорную статью [1]). Этому же кругу вопросов посвящена и работа Д. Х. Фука и С. В. Нагаева [2].

Приведем один из результатов, полученных в [2] (стр. 662, теорема 4). Пусть

$$F_i(x) = \mathbf{P}(X_i < x), \ \ Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, \ y_i > 0,$$

$$\mu(-\infty, Y) = \sum_{1}^{n} \int_{u<y_i} u\,dF_i(u), \quad B^2(-\infty; Y) = \sum_{1}^{n} \int_{u<y_i} u^2 dF_i(u).$$

В этих обозначениях при $y = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} y_i$

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant x) \leqslant \sum_{1}^{n} \mathbf{P}(X_i \geqslant y_i) + $$
$$+ \exp\left\{\frac{x}{y} - \left(\frac{x-\mu(-\infty, Y)}{y} + \frac{B^2(-\infty, Y)}{y^2}\right) \ln\left(\frac{xy}{B^2(-\infty, Y)} + 1\right)\right\}. \tag{2}$$

Неравенство (2) довольно громоздко и с вероятностной точки зрения вовсе лишено наглядности. В этом смысле оно явно проигрывает неравенству (1). Достоинством неравенства (2) является его общность и гораздо бо́льшая, по сравнению с (1), точность. Отправляясь от (2), можно получать в качестве следствий уже достаточно простые и наглядные оценки.

Остановимся на одном таком следствии. Предположим, что $\mathbf{M}X_i = 0$, $y_i = y$, $i = \overline{1, n}$, и $B_n^2 < \infty$. Тогда $\mu(-\infty, Y) \leqslant 0$, $B^2(-\infty, Y) \leqslant B_n^2$,

и мы приходим к оценке

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant x) \leqslant \sum_1^n \mathbf{P}(X_i \geqslant y) + e^{x/y} \left(\frac{B_n^2}{xy}\right)^{x/y}. \qquad (3)$$

Соответствующая двусторонняя оценка имеет вид

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant x) \leqslant \sum_1^n \mathbf{P}(|X_i| \geqslant y) + 2e^{x/y} \left(\frac{B_n^2}{xy}\right)^{x/y} \qquad (3')$$

(для того чтобы получить (3′), достаточно сложить оценки для $\mathbf{P}(S_n \geqslant x)$ и $\mathbf{P}(S_n \leqslant -x)$).

Если $\frac{B_n^2}{x^2}$ велико по сравнению с $\sum_1^n \mathbf{P}(|X_i| \geqslant x)$, то оценка (3′) может оказаться точнее оценки (1).

Все оценки, о которых шла речь выше, имеют собирательный характер поскольку их правые части зависят от усредненных характеристик. Точность этих оценок наибольшая, когда слагаемые одинаково распределены. Если распределения слагаемых сильно различаются, то точность оценок может значительно понизиться.

В самом деле, пусть $n = 3$, $\mathbf{M}X_i = 0$, $i = \overline{1,3}$. Полагая в (3) $y = x/2$, мы получаем оценку

$$\mathbf{P}\left(\sum_1^3 X_i \geqslant x\right) \leqslant \sum_1^3 \mathbf{P}\left(X_i \geqslant \frac{x}{2}\right) + 4e^2 \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{x^2}\right)^2. \qquad (4)$$

Очевидно, $\left\{\sum_1^3 X_i \geqslant x\right\} \subseteq \bigcup_1^3 \left\{X_i \geqslant \frac{x}{2}\right\} \cup \left[\left\{\sum_1^3 X_i \geqslant x\right\} \cap \left(\bigcap_1^3 \left\{X_i < \frac{x}{2}\right\}\right)\right]$.

Далее,

$$\left\{\sum_1^3 X_j \geqslant x\right\} \cap \left(\bigcap_1^3 \left\{X_i < \frac{x}{2}\right\}\right) \subseteq \bigcup_{i \neq j} \left\{X_i \geqslant \frac{x}{4},\ X_j \geqslant \frac{x}{4}\right\}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\sum_1^3 X_i \geqslant x\right) \leqslant \sum_1^3 \mathbf{P}\left(X_i \geqslant \frac{x}{2}\right) + \sum_{i<k} \mathbf{P}\left(X_i \geqslant \frac{x}{4}\right) \mathbf{P}\left(X_k \geqslant \frac{x}{4}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_1^3 \mathbf{P}\left(X_i \geqslant \frac{x}{2}\right) + 16^2 \sum_{i<k} \frac{\sigma_i^2 \sigma_k^2}{x^4}. \qquad (4')$$

Слагаемое $16^2 \sigma_i^2 \sigma_k^2 / x^4$ отвечает, очевидно, случаю, когда превышение уровня x происходит за счет того, что случайные величины X_i и X_k принимают большие значения.

Запишем теперь $4e^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)^2 / x^4$ в виде

$$4e^2 \left(\sum_1^3 \sigma_i^4 / x^4 + 2 \sum_{i<k} \sigma_i^2 \sigma_k^2 / x^4\right).$$

Числа σ_i^4/x^4 не имеют такой наглядной интерпретации, как $\sigma_i^2 \sigma_k^2 / x^4$, $i \neq k$, и потому выглядят лишними. С другой стороны, вклад этих слагаемых может быть значительно больше, нежели вклад $2\sum\limits_{i<k}\sigma_i^2\sigma_k^2/x^4$, если σ_i^2 сильно отличаются друг от друга. По этой причине оценка (4) может оказаться завышенной.

Наши рассуждения делают весьма правдоподобной оценку

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant x) \leqslant \sum_1^n \mathbf{P}(X_i \geqslant y_i) + O\Bigl(\sum_{i<k}\sigma_i^2\sigma_k^2/x^4\Bigr).$$

Оценка такого типа была получена в [4]. Чтобы сформулировать эту оценку, нам понадобятся дополнительные обозначения.

Для произвольного конечного семейства чисел $\{u_i\}$, $i \in I$, положим

$$\Sigma_p\,\{u_k\}_I = \Sigma\, u_{k_1}u_{k_2}\ldots u_{k_p},$$

где суммирование производится по всем $k_1, k_2, \ldots, k_p$, принадлежащим I и удовлетворяющим условиям $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$.

Пусть $D_p = \Sigma_p\,\{\sigma_k^2\}_{I_n}, D_{p,Y} = \Sigma_p\Bigl\{\int\limits_{|x|\leqslant y_i} x^2dF_k(x)\Bigr\}_{I_n}, I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

В уже упоминавшейся работе [4] доказано, что при $n \geqslant p$, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} y_i < x/\Delta_p$ и $\mathbf{M}X_i = 0$, $i = \overline{1, n}$,

$$\mathbf{P}(|S_n| > x) \leqslant \sum_1^n \mathbf{P}(|X_i| > y_i) + \frac{\Gamma_p D_p + \Delta_p^{2p} D_{p,Y}}{x^{2p}}, \tag{5}$$

где $\Delta_p = (1 + a_p\alpha_p^{-1})(2p-1)^{1/2}$, $\Gamma_p = p!\,/\,(1 - \alpha_p)$, a_p — произвольное число из интервала $(0, 1)$. В качестве a_p можно взять $(p!)^{2p+2}$.

Заметим, что правая часть неравенства (5) при $p \geqslant 2$, $\sigma_j \to 0$, $j = \overline{2, n}$, стремится к $\mathbf{P}(X_1 > y_1)$. Это лишний раз свидетельствует о том, что оценка (5) может оказаться значительно точнее (3′). В настоящей работе аналогичным образом усиливается другое неравенство, верное при $t \geqslant 2$, $\mathbf{M}X_i = 0$, $i = \overline{1, n}$:

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant x) \leqslant \sum_1^n \mathbf{P}(X_i \geqslant y_i) + \left(\frac{\beta x y^{t-1}}{A(t; 0, Y)} + 1\right)^{-\beta x/y} + \\ + \exp\left\{-\frac{\alpha^2x^2}{2e^tB^2(-\infty, Y)}\right\},$$

где $A(t; 0, Y) = \sum\limits_1^n \int\limits_0^{y_i} u^t dF_i(u)$, $\beta = t/(t+2)$, $\alpha = 1 - \beta$ ([2], стр. 668, следствие 3).

Положим

$$D_p^{(t)} = \Sigma_p\{\alpha_k^{(t)}\}_{I_n}, \quad \text{где } \alpha_k^{(t)} = \int\limits_0^\infty x^t dF_k(x),$$

$$\overline{D}_p^{(t)} = \Sigma_p\{\overline{\alpha}_k^{(t)}\}_{I_n}, \quad \text{где } \overline{\alpha}_k^{(t)} = \int\limits_{\mu_k}^{y_k}(x - \mu_k)^t\,dF_k(x), \quad \mu_k = \int\limits_{-\infty}^{y_k} x\,dF_k(x),$$

$$\overline{D}_p = \Sigma_p\Bigl\{\int\limits_{-\infty}^{y_k}(x - \mu_k)^2\,dF_k(x)\Bigr\}_{I_n}.$$

Теорема 1. *Если* $X_k \leqslant b$, $\mathbf{M}X_k = 0$ $(k = \overline{1, n})$, $t > 0$, $a > 0$ *и* $0 < 2(2p-1)\, b/a \leqslant \gamma < 1$, *то*

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant a) \leqslant \max\left[\exp\left\{\frac{(\gamma-1)\gamma a^2}{e^t \beta_p D_p^{1/p}}\right\}, \left(\frac{(D_p^{(t+1)})^{1/p}}{\gamma a b^t}\right)^{\frac{(1-\gamma)a}{b}}\right], \quad \text{где } \beta_p = 2(2p-1). \tag{6}$$

Следствие. *Если* $\frac{1}{2}\gamma\,(x - \mu(-\infty, Y)) \geqslant (2p-1)\,(y - \mu^*) > 0$, $0 < \gamma < 1$, $\mu^* = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \mu_k$, *то для любых* y_k, *удовлетворяющих условию* $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} y_k \leqslant y$,

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant x) \leqslant \sum_1^n \mathbf{P}(X_k \geqslant y_k) + P_1,$$

где P_1 *равно значению правой части* (6), *в которой* D_p *и* $D_p^{(t+1)}$ *заменены соответственно на* $\overline{D}_p$ *и* $\overline{D}_p^{(t+1)}$ *при* $a = x - \mu(-\infty, Y)$, $b = y - \mu^*$.

Замечание. Теорема 1 остается справедливой, если заменить S_n на $\overline{S}_n = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k$.

Причина появления $D_p^{(t)}$ в правой части неравенства (6) вместо $A(t; 0, Y)$ та же, что и причина появления D_p и $D_{p,Y}$ в неравенстве (5). Нам остается прокомментировать замену $B^2(-\infty, Y)$ на $D_p^{1/p}$.

На первый взгляд может показаться, что оценка (6) противоречит центральной предельной теореме, так как согласно последней

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant x) > \frac{1}{10}\, e^{-x^2/B^2}, \qquad B^2 = B_n^2, \tag{7}$$

для сравнимых с B значений x. Но дело в том, что $D_p^{1/p}$ может быть значительно меньше B^2 только в том случае, когда одна из дисперсий, скажем σ_1^2, сравнима по величине с B^2. Действительно, предположим, что $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sigma_i^2 > 0$, $D_p < \alpha B^{2p}$ $(\alpha < 1)$ и $\sigma_1^2 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sigma_i^2 < \beta B^2$, $\beta < 1/(p-1)$. Найдем связь между α и β.

Для любого набора $i_1, i_2, \ldots, i_s$, $i_j \neq i_l$, $l \neq j$, определим $B^2(i_1, \ldots, i_s)$, как $\Sigma \sigma_j^2$, где суммирование производится по всем значениям $j = \overline{1, n}$, за исключением $j = i_1, \ldots, i_s$. Аналогично положим

$$D_p(i_1, \ldots, i_s) = \Sigma_p \{\sigma_j^2\}_{I_n(i_1, \ldots, i_s)},$$
$$I_n(i_1, \ldots, i_s) = \{j : j \in I_n,\ j \neq i_1, \ldots, i_s\}.$$

Очевидно, $D_p = \frac{1}{p}\sum\limits_1^n \sigma_i^2 D_{p-1}(i) \leqslant \alpha \sum\limits_1^n \sigma_i^2 B^{2(p-1)}$. Следовательно, существует такое i_1, что $D_{p-1}(i_1) \leqslant \alpha p B^{2(p-1)}$. Далее, $B^2 \leqslant B^2(i_1)/(1-\beta)$. Таким образом,

$$D_{p-1}(i_1) \leqslant \frac{\alpha p}{(1-\beta)^{p-1}}\, B^{2(p-1)}(i_1). \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что

$$B^2(i_1, i_2, \ldots, i_s) \geqslant (1 - s\beta)\, B^2 \geqslant (1 - s\beta)\, B^2(i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}).$$

В частности, $B^2(i_1) \leqslant B^2(i_1, i_2)/(1-2\beta)$. Повторяя теперь рассуждения, приведшие нас к (8), мы получаем, что существует i_2, для которого

$$D_{p-2}(i_1, i_2) \leqslant \frac{\alpha p(p-1) B^{2(p-2)}}{(1-\beta)^{p-1}(1-2\beta)^{p-2}}.$$

Продолжая этот процесс, мы приходим к набору $i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}$ такому, что

$$D_1(i_1, \ldots, i_{p-1}) \equiv B^2(i_1, \ldots, i_{p-1}) \leqslant \frac{\alpha p!}{(1-(p-1)\beta)^{(p-1)p/2}} B^2(i_1, \ldots, i_{p-1}).$$

Следовательно,

$$\beta \geqslant (1-(\alpha p!)^{2/((p-1)p)}) / (p-1).$$

Мы видим, что $\overline{\lim\limits_{\alpha\to 0}}\, \sigma_1^2/B^2 \geqslant 1/(p-1)$. Кстати, ляпуновское отношение $L \geqslant \sigma_1^3/B^3$ и поэтому в данном случае не стремится к нулю.

Отношение $B^2/D_p^{1/p}$ можно рассматривать как меру разнораспределенности слагаемых.

Вернемся теперь к неравенству (7). Пусть случайные величины X_i ограничены, одинаково распределены и $\mathbf{M}X_i = 0$. Рассмотрим последовательность $\{X_{0n}\}$ случайных величин, каждая из которых не зависит от последовательности $\{X_i\}$. Потребуем, чтобы $\mathbf{M}X_{0n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_{0n}| > \varepsilon \bar{B}_n) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{B}_n^{-2} \mathbf{D}X_{0n} = 1$, где $\bar{B}_n^2 = \sum\limits_1^n \mathbf{D}X_i + \mathbf{D}X_{0n}$. Последовательность $\left(X_{0n} + \sum\limits_1^n X_i\right) \Big/ \bar{B}_n \to 0$ при $n \to \infty$ по вероятности. Следовательно, неравенство (7) не может выполняться для x, сравнимых с $\bar{B}_n$.

С помощью теоремы 1 и следствий из нее можно получать достаточные условия для усиленного закона больших чисел, обобщающие условия Егорова [3], аналогично тому, как это делается в [4].

Положим $A_t = \sum\limits_1^n \mathbf{M}|X_k|^t$.

Теорема 2. *Пусть* $t \geqslant 2$ *и* $\mathbf{M}X_k = 0$, $k = \overline{1, n}$. *Тогда при любом* $c > t/2$

$$\mathbf{M}|S_n|^t \leqslant c^t A_t + tc^{t/2} e^c B(t/2, c - t/2) B_n^t, \tag{9}$$

где $B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$.

С другой стороны, существует зависящая только от t *постоянная* a_t *такая, что*

$$\mathbf{M}|S_n|^t \geqslant a_t \max [A_t, B_n^t]. \tag{10}$$

Оценки (9) и (10) являются, очевидно, оптимальными в смысле зависимости от B_n и A_t. В частном случае $t = 3$ неравенство (9) приводится (без доказательства и явных выражений для постоянных) в [5] (стр. 663) и [6] (стр. 259, неравенство (1.4)).

Следует упомянуть также работу Розена [9], в которой было доказано, что если $MX_k^{2m} \leqslant \lambda_k^{2m}\rho_k$ для $k = \overline{1, n}$ и $m = \overline{1, p}$, то

$$MS_n^{2p} \leqslant c(p)\max\left[\left(\sum_1^n \lambda_k^2\rho_k\right)^p, \sum_1^n \lambda_k^{2p}\rho_k\right].$$

Это неравенство является, очевидно, частным случаем (9).

Поскольку $B_n^t \leqslant n^{t/2-1}A_t$, то из неравенства (9) следует (с точностью до постоянного множителя) неравенство Дхармадхикари и Йогдео [8] (см. также [7], стр. 79).

Сравним теперь оценку (9) с недавней оценкой В. В. Сазонова [12], которая применительно к нашему случаю выглядит следующим образом:

$$M|S_n|^t \leqslant (2^{t-1}+1)A_t + \sum_1^{p-1} c_k(t)\sum{}' \sigma_{i_1}^2\ldots\sigma_{i_k}^2 M|X_{i_{k+1}}|^{t-2k} +$$
$$+2\prod_{j=0}^{p-1}(2^{t-2j-1}-1)\sum{}'\sigma_{i_1}^2\ldots\sigma_{i_p}^2\left(\sum{}''\sigma_i^2\right)^{(t-2p)/2}, \qquad (11)$$

где $c_k(t) = (2^{t-2k-1}+1)\prod_{j=0}^{k-1}(2^{t-2j-1}-1)$, $p = [t/2]$, Σ' означает суммирование по всем попарно различным индексам $i_1, \ldots, i_k$, Σ'' — суммирование по всем $i \neq i_1, \ldots, i_p$. Отсюда, в частности, следует, что

$$M|S_n|^t \leqslant (2^{t-1}+1)A_t + \sum_1^{p-1} c_k(t)A_{t-2k}B_n^{2k} + 2\prod_{j=0}^{p-1}(2^{t-2j-1}-1)B_n^t. \qquad (12)$$

Если B_n^t мало по сравнению с A_t и t достаточно велико, то оценка (12) (а следовательно, и (11)) может оказаться точнее (9) за счет того, что $(t/2)^t > 2^{t-1}+1$.

С другой стороны, нетрудно привести пример, когда, наоборот, (9) лучше, чем (11). В самом деле, пусть X_i одинаково распределены, $M|X_1|^t = \beta_t$, $\sigma_1^2 = 1$. Тогда правая часть (9) не превосходит (при $c = t$)

$$nt^t\beta_t + t^{t/2+1}e^t n^{t/2}.$$

Оценим теперь снизу правую часть (11). Нетрудно видеть, что в данном случае

$$\sum{}'\sigma_{i_1}^2\ldots\sigma_{i_p}^2\left(\sum{}''\sigma_i^2\right)^{(t-2p)/2} = (n-p)^{(t-2p)/2}\prod_{j=0}^{p-1}(n-j) > (n-p)^{t/2}.$$

В то же время $\prod_{j=0}^{p-1}(2^{t-2j-1}-1) > c_0 2^{[t/2]^2}$, где $c_0 = \prod_1^\infty(1-2^{-j})$. Следовательно, правая часть (11) не меньше $c_0 2^{[t/2]^2+1}(n-p)^{t/2}$.

Если $t^{t/2+1}e^t < c_0 2^{[t/2]^2+1}$, то при достаточно больших n правая часть (9) окажется меньше, чем правая часть (11).

Заметим, что из (10) следует, что правые части (9) и (11) вообще могут отличаться друг от друга лишь множителем, зависящим только от t. Более того, из (12) нетрудно вывести (9), правда, с другими коэффициентами при A_t и B_n. Для этого нужно воспользоваться неравенством

$$A_p B_n^s \leqslant \max\ (A_{p+s},\ B_n^{p+s}), \qquad (13)$$

где $p > 2$, $s \geqslant 0$. Доказывается это неравенство совсем просто. Действительно, если $A_p \leqslant B_n^p$, то $A_p B_n^s \leqslant B_n^{p+s}$. Пусть теперь $A_p > B_n^p$. Не нарушая общности можно считать, что $A_{p+s} < \infty$. Тогда функция $f(t) = A_t/B_n^t$ выпукла на отрезке $[2, p+s]$ и $f(p) > 1$. Поскольку $f(2) = 1$, то $f(t)$ возрастает на отрезке $[p, p+s]$. Поэтому $f(p+s) \geqslant f(p)$, т. е. $A_p B_n^s \leqslant A_{p+s}$. Неравенство (13) доказано.

Оценивая $A_{t-2k} B_n^{2k}$ с помощью (13), мы получаем из (12) оценку

$$\mathbf{M}|S_n|^t \leqslant [2^{t-1} + \sum_{k=1}^{p-1} c_k(t) + 2\prod_{j=0}^{p-1}(2^{t-2j-1}-1)] \max(A_t, B_n^t).$$

Прямое доказательство (9), помещенное в § 3, на наш взгляд, ненамного сложнее.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Положим $f_k(h) = \mathbf{M}e^{hX_k}$, $m_k(h) = f_k'(h)$, $g_k(h) = \frac{d}{dh}\log f_k(h)$, $Q(h) = \prod_1^n f_k(h)$. Пусть h_0 есть корень уравнения

$$\frac{d}{dh}\log Q(h) \equiv \sum_1^n g_k(h) = \gamma a. \tag{14}$$

Если уравнение (14) не имеет корней, то положим $h_0 = \infty$. Отметим, что

$$\frac{d}{dh} g_k(h) = \frac{\mathbf{M}X_k^2 e^{hX_k}\mathbf{M}e^{hX_k} - (\mathbf{M}X_k e^{hX_k})^2}{(\mathbf{M}e^{hX_k})^2} > 0$$

(за исключением тривиального случая $\mathbf{P}(X_k = 0) = 1$). Поэтому h_0 определяется однозначно для $a > 0$.

Очевидно, $\mathbf{P}(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-h_0 a} Q(h_0)$. При $h \leqslant h_0$ имеем $\sum_1^n g_k(h) \leqslant \gamma a$. С другой стороны, $\log Q(0) = 0$. Поэтому при $h \leqslant h_0$

$$\log Q(h) = \int_0^h \frac{d}{du}\log Q(u)\,du \leqslant h\gamma a.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant a) \leqslant e^{(\gamma-1)h_0 a}. \tag{15}$$

Оценим теперь h_0 снизу. С этой целью введем в рассмотрение следующие величины (можно считать $h_0 < \infty$):

$$v_k = \int_{u \leqslant t/h_0} u e^{h_0 u} dF_k(u), \quad w_k = \int_{u > t/h_0} u e^{h_0 u} dF_k(u).$$

Положим для краткости $m_k = m_k(h_0)$, $f_k = f_k(h_0)$. Ясно, что

$$v_k/f_k \leqslant b, \quad w_k/f_k \leqslant b. \tag{16}$$

Из (14) следует, что либо

$$\sum_1^n v_k/f_k \geqslant \frac{1}{2}\gamma a, \tag{A}$$

либо

$$\sum_{1}^{n} w_k/f_k \geqslant \frac{1}{2}\gamma a. \tag{B}$$

Предположим сначала, что выполняется условие (А). Очевидно, $f_k(0) = 1$, $f_k'(0) = \mathbf{M}X_k = 0$, $f_k''(h) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{hu} dF_k(u) > 0$. Поэтому

$$f_k \equiv f_k(h_0) \geqslant 1, \quad k = \overline{1, n}. \tag{17}$$

Полагая $K = \{k\colon 1 \leqslant k \leqslant n,\ v_k \geqslant 0\}$, заключаем, что $\sum_{k \in K} v_k \geqslant \frac{1}{2}\gamma a$.

Нам понадобится теперь следующее утверждение из работы Егорова [3].

Лемма. *Если* $0 \leqslant u_i \leqslant A$, $\Sigma_p \{u_i\}_I \leqslant A^p$, *то*

$$\sum_{i \in I} u_i \leqslant (2p - 1)A.$$

Полагая в лемме $A = \gamma a/(2(2p - 1))$ и учитывая (16), мы получаем, что

$$\sum\nolimits_p \{v_k\}_K \geqslant \left(\frac{\gamma a}{2(2p-1)}\right)^p. \tag{18}$$

Величину $\gamma a/(2(2p - 1))$ мы будем обозначать символом A_0. Для оценки v_k сверху введем функцию

$$v_k(h) = \int_{u \leqslant t/h_0} e^{hu} u\, dF_k(u).$$

Очевидно, $v_k(0) = -\int_{u > t/h_0} u\, dF_k(u) \leqslant 0$. Далее, $v_k'(h) = \int_{u \leqslant t/h_0} u^2 e^{hu} dF_k(u) \leqslant e^t \sigma_k^2$, если только $h \leqslant h_0$. Таким образом,

$$v_k \leqslant e^t h_0 \sigma_k^2. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует оценка

$$A_0^p \leqslant e^{pt} h_0^p \Sigma_p \{\sigma_k^2\}_K \leqslant e^{pt} h_0^p D_p.$$

Отсюда

$$h_0 \geqslant A_0/(e^t D_p^{1/p}). \tag{20}$$

Сопоставляя (15) и (20), получаем

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant a) \leqslant \exp\{(\gamma - 1) a e^{-t} A_0 / D_p^{1/p}\}. \tag{21}$$

Рассмотрим теперь случай, когда выполняется условие (В).

Пользуясь тем, что функция $u^{-t} e^{h_0 u}$ возрастает при $u > t/h_0$, получаем оценку $w_k \leqslant e^{h_0 b} b^{-t} \alpha_k^{t+1}$. С другой стороны, $\Sigma_p \{w_k\}_{I_n} \geqslant A_0^p$ (эта оценка выводится точно так же, как (18)). Следовательно,

$$A_0^p \leqslant \frac{e^{h_0 b p}}{b^{tp}} D_p^{(t+1)}.$$

Отсюда $e^{-h_0} \leqslant (A_0^{-p} b^{-pt} D_p^{t+1})^{1/(bp)}$. Возвращаясь теперь к оценке (15), получаем

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant a) \leqslant \left(\frac{(D_p^{(t+1)})^{1/p}}{A_0 b^t}\right)^{(1-\gamma)a/b}. \tag{22}$$

Из оценок (21) и (22) следует утверждение теоремы.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Выведем сначала оценку сверху для $\mathbf{M}\,|S_n|^t$. С этой целью воспользуемся неравенством (2) *.

Поскольку в нашем случае $\mu(-\infty, Y) \leqslant 0$, то справедлива двусторонняя оценка

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant x) \leqslant \sum_1^n \mathbf{P}(|X_i| \geqslant y) + 2\exp\left\{\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\ln\left(\frac{xy}{B_n^2} + 1\right)\right\}.$$

Пусть $y = x/c$, $c > t/2$. Умножая обе части неравенства на tx^{t-1} и интегрируя по x от 0 до ∞, мы получаем, что

$$\mathbf{M}\,|S_n|^t \leqslant c^t A_t + 2te^c \int_0^\infty x^{t-1}\left(\frac{x^2}{cB_n^2} + 1\right)^{-c} dx.$$

Интеграл в правой части равен $2^{-1}c^{t/2}\mathrm{B}(t/2,\ c - t/2)B_n^t$ (см., например, [11], стр. 309, формула 11). Неравенство (9), таким образом, доказано. Осталось доказать справедливость неравенства (10).

Известно, что при $t \geqslant 2$

$$\mathbf{M}\,|S_n|^t \geqslant a_t \mathbf{M}\left(\sum_1^n X_k^2\right)^{t/2},$$

где a_t зависит только от t (см. [10], а также [7], стр. 78). По неравенству Гёльдера

$$\mathbf{M}\left(\sum_1^n X_k^2\right)^{t/2} \geqslant B_n^t.$$

Далее, $\left(\sum_1^n X_k^2\right)^{t/2} \geqslant \sum_1^n |X_k|^t$, откуда $\mathbf{M}\left(\sum_1^n X_k^2\right)^{t/2} \geqslant A_t$. Таким образом,

$$\mathbf{M}\,|S_n|^t \geqslant a_t \max\,[B_n^t,\ A_t].$$

Теорема 2 доказана.

Поступила в редакцию
5.5.75

ЛИТЕРАТУРА

[1] **I. R. Savage**, Probability inequalities of the Tchebycheff type, J. Res. Nat. Bur. Standards, **65B**, 3 (1961), 211—222 (русский перевод: сб. перев. «Математика», **6**, 4 (1962), 71—95).

[2] **Д. Х. Фук, С. В. Нагаев**, Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин, Теория вероят. и ее примен., **XVI**, 4 (1971), 660—675.

[3] **В. А. Егоров**, Об усиленном законе больших чисел и законе повторного логарифма для последовательности независимых случайных величин, Теория вероят. и ее примен., **XV**, 3 (1970), 520—527.

[4] **С. В. Нагаев, И. Ф. Пинелис**, Некоторые неравенства для больших уклонений, Сиб. матем. ж., **XV**, 1 (1974), 212—218.

* Эта идея предложена А. И. Саханенко. Первоначальное доказательство основывалось на других соображениях и было значительно сложнее.

[5] **В. И. Ротарь,** Неравномерная оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, Теория вероят. и ее примен., **XV**, 4 (1970), 647—664.

[6] **Т. В. Арак,** О распределении максимума последовательных сумм независимых случайных величин, Теория вероят. и ее примен., **XIX**, 2 (1974), 257—277.

[7] **В. В. Петров,** Суммы независимых случайных величин, М., изд-во «Наука», 1972.

[8] **S. W. Dharmadhikari, K. Jogdeo,** Bounds on moments of certain random variables, Ann. Math. Statist., **40**, 4 (1969), 1506—1508.

[9] **B. Rosén,** On bounds of the central moments of even order of a sum of independent random variables, Ann. Math. Statist., **41**, 3 (1970), 1074—1077.

[10] **J. Marcinkievicz, A. Zygmund,** Sur les fonctions independantes, Fund. Math., **29** (1937), 60—90.

[11] **И. С. Градштейн, И. М. Рыжик,** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1962.

[12] **В. В. Сазонов,** К оценке моментов сумм независимых случайных величин, Теория вероят. и ее примен., **XIX**, 2 (1974), 383—386.

SOME INEQUALITIES FOR THE DISTRIBUTIONS OF SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

S. V. NAGAEV, I. F. PINELIS (NOVOSIBIRSK)

(*Summary*)

Let X_i, $i = \overline{1, n}$, be independent random variables,

$$S_n = \sum_1^n X_i,\ F_i(x) = \mathbf{P}(X_i < x),\ \bar{a}_k = \int_0^\infty x^t dF_k(x).$$

Upper estimates are given for $\mathbf{P}(S_n \geqslant x)$ in terms of the sum

$$\sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n} \bar{a}_{i_1} \ldots \bar{a}_{i_p}.$$

Upper and lower estimates are obtained for $\mathbf{M}\,|\,S_n\,|^t$, $t > 2$.