ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том XXV Выпуск 3
1980

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ КРИТИЧЕСКОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА ГАЛЬТОНА – ВАТСОНА С МИГРАЦИЕЙ

С. В. НАГАЕВ, Л. В. ХАН

1. Введение. Обозначения. Формулировка основных результатов. В настоящей работе изучается ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона с иммиграцией и эмиграцией. Более точно, рассматривается популяция, каждая частица которой размножается по схеме процесса Гальтона — Ватсона, причем в каждый момент времени n ($n = 0, 1, \ldots$) либо с вероятностью p_k ($k = 0, 1, \ldots$) в популяцию иммигрирует k частиц, либо с вероятностью q_r ($r = 1, \ldots, m$) из популяции эмигрирует r из существующих в момент n частиц, где m — произвольное фиксированное натуральное число,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k + \sum_{r=1}^{m} q_r = 1.$$

Частицы размножаются независимо друг от друга и независимо от своего происхождения.

Перейдем теперь к формальному описанию изучаемого процесса. Пусть заданы независимые целочисленные случайные величины

$$\xi_i^{(n)}, \zeta_n, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

причем ζ_n, $n = 0, 1, \ldots$, одинаково распределены и

$$\mathbf{P}\{\zeta_n = k\} = p_k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$
$$\mathbf{P}\{\zeta_n = -r\} = q_r, \quad r = 1, \ldots, m,$$

в свою очередь, ξ_i^n ($i = 1, 2, \ldots; n = 0, 1, \ldots$) одинаково распределены с производящей функцией

$$f(s) = \mathrm{M}s^{\xi_i^{(n)}}, \quad |s| \leqslant 1.$$

Определим процесс $\{Z_n, n = 0, 1, \ldots\}$ следующим образом:

$$Z_0 = 0, \quad Z_{n+1} = \begin{cases} \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_{Z_n+\zeta_n}^{(n)}, & Z_n + \zeta_n > 0, \\ 0, & Z_n + \zeta_n \leqslant 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\{Z_n, n = 0, 1, \ldots\}$ является однородным марковским процессом.

Случайные величины Z_n, $\xi_i^{(n)}$, ζ_n ($n = 0, 1, \ldots; i = 1, 2, \ldots$) интерпретируются соответственно как число частиц популяции в момент времени n, число частиц, порождаемых i-й из существующих в момент n частиц в

$(n+1)$-й момент времени, число мигрирующих в n-й момент времени частиц.

Всюду в дальнейшем будем считать, что

$$f'(1-)=1, \tag{1}$$

$$f(0)>0, \tag{2}$$

$$B=\frac{f''(1-)}{2}<\infty, \tag{3}$$

$$q_m>0, \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp_k-\sum_{k=1}^{m} kq_k=0, \tag{5}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2 p_k<\infty. \tag{6}$$

Из (1), (2), очевидно, следует, что

$$B=\frac{f''(1-)}{2}>0. \tag{7}$$

Среди рассматривавшихся ранее процессов Гальтона — Ватсона с различными формами иммиграции наиболее близким к приведенному выше является критический процесс Гальтона — Ватсона с зависящей от состояния иммиграцией, который изучался в [1] — [3].

Для критического процесса Гальтона — Ватсона с иммиграцией, определенного в [4], предельные теоремы получены в [5] — [10]. Процессы Гальтона — Ватсона с эмиграцией изучались в [11], [12].

Заметим также, что процесс $\{Z_n,\ n=0, 1, \dots\}$ можно представить в виде φ-ветвящегося процесса, рассматривавшегося в [13] — [15]. Однако результаты настоящей работы не следуют из известных результатов для φ-ветвящихся процессов.

Пусть $\mathfrak{N}$ — множество состояний марковской цепи $\{Z_k,\ k=0, 1, \dots\}$, $p_{rj}(n)$ — вероятность перехода из состояния r в состояние j через n шагов, $r, j\in\mathfrak{N}$, $n=0, 1, \dots$ $(p_{rr}(0)=1, r\in\mathfrak{N})$, ${}_0p_{0r}(n)$ — вероятность того, что процесс $\{Z_k,\ k=0, 1, \dots\}$, исходя из 0, достигнет состояния r через n шагов, ни разу до этого не попадая в 0 $(n=1, 2, \dots, r\in\mathfrak{N})$,

$$F(x)=\sum_{k=[x]+1}^{\infty} {}_0p_{00}(k), \qquad x\geqslant 0.$$

Положим

$$W_{0r}(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{0r}(n)s^n, \qquad W_0(s)=W_{00}(s),$$

где $0\leqslant s<1$, $r\in\mathfrak{N}$. Обозначим через $f_n(s)$ n-ю итерацию функции $f(s)$, $|s|\leqslant 1$, $n=1, 2, \dots$ Введем производящие функции

$$g(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad \Psi_n(s)=\mathrm{M}s^{Z_n}=\sum_{j\in\mathfrak{N}} p_{0j}(n)s^j, \quad G_r(s)=\sum_{k=1}^{\infty} {}_0p_{0r}(k)s^k,$$

где $0\leqslant s\leqslant 1$, $r\in\mathfrak{N}$, $n=0, 1, \dots$

Основной целью данной работы является доказательство следующих теорем.

Теорема 1. *При* $n \to \infty$

$$F(n) \sim \frac{1}{A_0 n},$$

где A_0 *— положительная постоянная.*

Теорема 2. *При* $n \to \infty$

$$p_{0r}(n) \sim \frac{A_r}{\ln n},$$

где A_r *— положительные постоянные,* $r \in \mathfrak{N}$.

Теорема 3. *При* $n \to \infty$

$$\mathrm{M}Z_n \sim B\frac{n}{\ln n}, \tag{8}$$

$$\mathrm{D}Z_n \sim 2B^2\frac{n^2}{\ln n}. \tag{9}$$

Теорема 4. *Для* $x \in [0, 1]$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\ln Z_n}{\ln n} < x\right\} = x.$$

Замечание. Теорема 4 является аналогом предельной теоремы, полученной Фостером для процесса Гальтона — Ватсона с зависящей от состояния иммиграцией (см. [1]).

Отметим также, что основой для доказательства теоремы 4 служит полученное в п. 2 представление (17) для производящей функции $\Psi_n(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1,\ n = 0, 1, \ldots)$. В случае $m = 1$ аналогичное представление приведено в [1], [2] для процесса Гальтона — Ватсона с зависящей от состояния иммиграцией.

2. Изучение производящих функций, связанных с процессом $\{Z_n, n = 0, 1, \ldots\}$. Очевидно, справедлива

Лемма 1. *Пусть* $\Phi(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n y^n, 0 \leqslant y < 1,$ *и* $\beta_n = o(1/n)$, $n \to \infty$. *Тогда при* $y \to 1-$

$$\Phi(y) = o\left(\ln\frac{1}{1-y}\right), \quad \Phi'(y) = o\left(\frac{1}{1-y}\right), \quad \Phi''(y) = o\left(\frac{1}{(1-y)^2}\right).$$

Из (4), (5) следует, что существует такое $k \geqslant 1$, что $p_k > 0$. Поэтому $\mathfrak{N} \neq \{0\}$.

Лемма 2. *Множество* $\mathfrak{N}$ *состоит из одного класса сообщающихся состояний.*

Доказательство. Поскольку $Z_0 = 0$, то $\mathfrak{N}$ совпадает с множеством состояний, достижимых из 0. Следовательно, для любого $r \in \mathfrak{N}$ существует такое $k_r \geqslant 0$, что

$$p_{0r}(k_r) > 0.$$

Кроме того, ввиду (2), (4)

$$p_{j0}(1) \geqslant q_m \{f(0)\}^{\max(0, j-m)} > 0, \quad j \in \mathfrak{N}. \tag{10}$$

Поэтому

$$p_{jr}(k_r + 1) \geqslant p_{j0}(1) p_{0r}(k_r) > 0, \quad j, r \in \mathfrak{N}. \tag{11}$$

Следствие. *Для* $r \in \mathfrak{N}$

$$0 < G_r(1) < \infty. \tag{12}$$

Доказательство. Согласно лемме 2 состояние 0 достижимо из любого состояния $r \in \mathfrak{N}$. Отсюда (см. [16], стр. 77)

$$G_r(1) < \infty, \quad r \in \mathfrak{N}.$$

В свою очередь, из (11) при $j = 0$, очевидно, следует, что

$$G_r(1) > 0, \quad r \in \mathfrak{N}.$$

Лемма 3. *Производящие функции* $\Psi_n(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ *связаны рекуррентным соотношением*

$$\Psi_{n+1}(s) = \Psi_n(f(s))\, g(f(s)) + \sum_{k=1}^{m} q_k \Big[\Psi_n(f(s)) - \sum_{r=0}^{k-1} p_{0r}(n) f^r(s)\Big] f^{-k}(s) + \\ + \sum_{k=1}^{m} q_k \sum_{r=0}^{k-1} p_{0r}(n), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \Psi_0(s) = 1. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество таких $r \in \{-m, \ldots, \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$, что $\mathbf{P}\{\zeta_0 = r\} > 0$. Учитывая независимость $\xi_i^{(k)}$, ζ_k $(i = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, \ldots)$, имеем для любых $r \in \mathfrak{M}$, $n = 0, 1, \ldots$

$$\mathbf{M}(s^{Z_{n+1}} \mid \zeta_n = r) = \begin{cases} \mathbf{M} s^{\xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_{Z_n + r}^{(n)}}, & r > 0, \\ \sum\limits_{k=-r+1}^{\infty} p_{0k}(n)\, \mathbf{M} s^{\xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_{k+r}^{(n)}} + \sum\limits_{k=0}^{-r} p_{0k}(n), & r = -m, \ldots, 0. \end{cases}$$

Следовательно, при $r \in \mathfrak{M}$, $n = 0, 1, \ldots$

$$\mathbf{M}(s^{Z_{n+1}} \mid \zeta_n = r) = \\ = \begin{cases} \Psi_n(f(s)) f^r(s), & r \geqslant 0, \\ \Big[\Psi_n(f(s)) - \sum\limits_{k=0}^{-r-1} p_{0k}(n) f^k(s)\Big] f^r(s) + \sum\limits_{k=0}^{-r-1} p_{0k}(n), & -m \leqslant r < 0. \end{cases} \tag{14}$$

Поскольку при $0 \leqslant s \leqslant 1$, $n = 0, 1, \ldots$

$$\Psi_{n+1}(s) = \mathbf{M} s^{Z_{n+1}} = \sum_{r \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}(s^{Z_{n+1}} \mid \zeta_n = r)\, \mathbf{P}\{\zeta_n = r\},$$

нетрудно видеть, что из (14) следует (13). Лемма доказана.

Положим

$$g_1(s) = g(s) + \sum_{k=1}^{m} q_k s^{-k}, \quad \varkappa_r(s) = \sum_{k=r+1}^{m} q_k (s^{r-k} - 1),$$

где $0 < s \leqslant 1$, $r = 0, \ldots, m-1$. Очевидно, при $0 < s \leqslant 1$

$$0 < g_1(s) < \infty, \quad 0 \leqslant \varkappa_r(s) < \infty, \quad r = 0, \ldots, m-1. \tag{15}$$

Кроме того, в силу (1) имеем (см. [17], стр. 20)

$$f_n(s) \geqslant f(s) \geqslant f(0), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Отсюда, учитывая (2), (15), получаем

$$0 < g_1(f_n(s)) < \infty, \quad 0 \leqslant \varkappa_r(f_n(s)) < \infty, \tag{16}$$

где $0 \leqslant s \leqslant 1$, $r = 0, \ldots, m-1$ и $n = 1, 2, \ldots$

Лемма 4. *Для* $0 \leqslant s \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$

$$\Psi_n(s) = c_n(s) - \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{n} h_k^{(r)}(s)\, p_{0r}(n-k), \tag{17}$$

где $c_n(s) = g_1(f_1(s))g_1(f_2(s)) \dots g_1(f_n(s))$,

$$h_n^{(r)}(s) = \varkappa_r(f_n(s))c_{n-1}(s), \quad n > 1, \qquad h_1^{(r)}(s) = \varkappa_r(f(s)), \quad r = 0, \dots$$
$$\dots, m-1.$$

Доказательство. Представим (13) в виде

$$\Psi_{n+1}(s) = \Psi_n(f(s))\, g_1(f(s)) - \sum_{k=0}^{m-1} \varkappa_k(f(s))\, p_{0k}(n), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{18}$$

$$\Psi_0(s) = 1, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

Отсюда, очевидно, следует (17).

Лемма 5. *При* $0 \leqslant s < 1$, $n = 1, 2, \dots$

$$c_n(s) = c(s)\left(1 - \frac{L}{(1-s)^{-1} + nB}\right) + \lambda_n(s), \tag{19}$$

$$h_n^{(r)}(s) = \frac{c(s)}{(1-s)^{-1} + nB} \sum_{k=r+1}^{m} q_k(k-r) + \lambda_n^{(r)}(s), \tag{20}$$

где

$$0 < c(s) = \prod_{k=1}^{\infty} g_1(f_k(s)) < \infty, \quad L = \frac{g_1''(1-)}{2}, \quad B = \frac{f''(1-)}{2} \tag{21}$$

и при $n \to$

$$\lambda_n(s) = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \lambda_n^{(r)}(s) = o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{22}$$

равномерно по $0 \leqslant s < 1$, $r = 0, \dots, m-1$.

Доказательство. Поскольку выполнены условия (1) — (3), при $0 \leqslant s < 1$, $n = 1, 2, \dots$, имеем (см. [6], [18])

$$f_n(s) = 1 + \frac{1 + \delta_n(s)}{(1-s)^{-1} + nB}, \quad \text{где} \lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leqslant s < 1} \delta_n(s) = 0. \tag{23}$$

Далее, так как ввиду (5), (6) $g_1'(1-) = 0$, $L = g_1''(1-)/2 < \infty$, то

$$g_1(s) = 1 + L(s-1)^2 + o((s-1)^2), \quad s \to 1-. \tag{24}$$

Из (23) следует, что при $n \to \infty$

$$f_n^{-k}(s) = 1 + \frac{k}{(1-s)^{-1} + nB} + o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{25}$$

равномерно по $0 \leqslant s < 1$, $k = 1, \dots, m$. Учитывая (23) — (25), заключаем, что равномерно по $0 \leqslant s < 1$

$$g_1(f_n(s)) = 1 + \frac{L}{((1-s)^{-1} + nB)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{26}$$

$$\varkappa_r(f_n(s)) = \frac{1}{(1-s)^{-1} + nB} \sum_{k=r+1}^{m} q_k(k-r) + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{27}$$

где $r = 0, \dots, m-1$, $n \to \infty$. Из (16), (26), очевидно, вытекает (21).

Используя (16), (26), имеем

$$c_n(s)=\prod_{k=1}^{n} g_1(f_k(s))=c(s)\prod_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{g_1(f_k(s))}=$$

$$=c(s)\exp\left\{-\sum_{k=n+1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{L}{((1-s)^{-1}+kB)^2}+\varepsilon_k(s)\right)\right\}=$$

$$=c(s)\exp\left\{-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{L}{((1-s)^{-1}+kB)^2}+\tilde{\varepsilon}_n(s)\right\}=$$

$$=c(s)\left(1-\frac{L}{(1-s)^{-1}+nB}\right)+\lambda_n(s),\quad 0\leqslant s<1,$$

где при $n\to\infty$ равномерно по $0\leqslant s<1$

$$\varepsilon_n(s)=o\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad \tilde{\varepsilon}_n^{(s)}=o\left(\frac{1}{n}\right),\quad \lambda_n(s)=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

В свою очередь, из (19), (27) следует (20). Лемма доказана.

Положим $c_0=1$, $c_n=c_n(0)$, $h_n^{(r)}=h_n^{(r)}(0)$ $(r=0,\ldots,m-1;\ n=1,2,\ldots)$. Введем производящие функции

$$U(y)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ny^n,\quad H_r(y)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n^{(r)}y^n,\quad r=0,\ldots,m-1,\quad 0\leqslant y<1.$$

Используя лемму 5, нетрудно показать, что справедлива

Лемма 6. *Для* $0\leqslant y<1$

$$U(y)=\frac{c}{1-y}+\frac{cL}{B}\ln(1-y)+\alpha(y),\tag{28}$$

$$H_r(y)=\frac{c}{B}\ln\frac{1}{1-y}\sum_{k=r+1}^{m}q_k(k-r)+\alpha_r(y),\tag{29}$$

где $0<c<\infty$, $\alpha(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_ny^n$, $\alpha_r(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{(r)}y^n$,

и при $n\to\infty$

$$\lambda_n=o\left(\frac{1}{n}\right),\tag{30}$$

$$\lambda_n^{(r)}=o\left(\frac{1}{n}\right),\quad r=0,\ldots,m-1.\tag{31}$$

Положим

$$H(y)=1+H_0(y)+\sum_{r=1}^{m-1}G_r(y)H_r(y),\quad 0\leqslant y<1.$$

Условимся считать, что $\sum_{r=1}^{m-1}\cdot=0$, если $m=1$.

Лемма 7. *Для* $0\leqslant y<1$

$$W_0(y)H(y)=U(y).\tag{32}$$

Доказательство. Умножив обе части равенства (17) на y^n $(0<y<1)$ и просуммировав по n при $s=0$, получаем

$$W_0(y)(H_0(y)+1)+\sum_{r=1}^{m-1}W_{0r}(y)H_r(y)=U(y).\tag{33}$$

Далее, для $0 \neq r \in \mathfrak{R}$ имеем (см. [16], стр. 75)

$$p_{0r}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} p_{00}(k)\, {}_0p_{0r}(n-k), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{34}$$

Следовательно, $W_{0r}(y) = W_0(y) G_r(y), 0 \leqslant y < 1$, $0 \neq r \in \mathfrak{R}$. Утверждение леммы следует теперь из (33).

Лемма 8. *Для* $^1/_2 \leqslant y < 1$

$$G_r'(y) \leqslant b_r G_0'(y), \tag{35}$$

$$G_r''(y) \leqslant b_r G_0''(y), \tag{36}$$

где $0 < b_r < \infty$, $r \in \mathfrak{R}$.

Доказательство. Очевидно, ${}_0p_{0r}(n) {}_0p_{r0}(1) \leqslant {}_0p_{00}(n+1)$, $0 \neq r \in \mathfrak{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ Следовательно, учитывая (10), получаем

$${}_0p_{0r}(n) \leqslant \frac{{}_0p_{00}(n+1)}{{}_0p_{r0}(1)} = \frac{{}_0p_{00}(n+1)}{p_{r0}(1)}, \quad 0 \neq r \in \mathfrak{R}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{37}$$

Отсюда легко следуют (35), (36). Лемма доказана.

Положим

$$A_0 = B\Big(\sum_{k=1}^{m} kq_k + \sum_{r=1}^{m-1} G_r(1) \sum_{k=r+1}^{m} (k-r) q_k\Big)^{-1}. \tag{38}$$

В силу (3), (4), (7), (12)

$$0 < A_0 < \infty. \tag{39}$$

Лемма 9. *При* $y \to 1-$

$$W_0(y) \sim \frac{A_0}{(1-y)\ln((1-y)^{-1})}, \tag{40}$$

$$G_0'(y) \sim \frac{1}{A_0} \ln \frac{1}{1-y}. \tag{41}$$

Доказательство. Используя (28) — (31) и лемму 1, нетрудно видеть, что из (32) вытекает (40). Далее (см. [16], стр. 87),

$$G_0(y) = 1 - \frac{1}{W_0(y)}, \quad 0 \leqslant y < 1. \tag{42}$$

Поскольку $U(y) > 0$, $0 \leqslant y < 1$, то ввиду (32), (42)

$$G_0'(y) = -\frac{H'(y)}{U(y)} + \frac{H(y)U'(y)}{U^2(y)}, \quad 0 \leqslant y < 1. \tag{43}$$

Учитывая (12), (28) — (31), (35) и лемму 1, выводим, что при $y \to 1-$

$$\frac{H'(y)}{U(y)} = o(G_0'(y)), \tag{44}$$

$$\frac{H(y)U'(y)}{U^2(y)} \sim \frac{1}{A_0} \ln \frac{1}{1-y}. \tag{45}$$

Из (43) — (45) следует (41).

Лемма 10. *При* $y \to 1-$

$$G_0''(y) \sim \frac{1}{A_0(1-y)}.$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (43) по y, получаем

$$G_0''(y) = -\frac{H''(y)}{U(y)} + 2H'(y)\frac{U'(y)}{U^2(y)} - \left(\frac{1}{U(y)}\right)'' H(y), \quad 0 \leqslant y < 1. \tag{46}$$

Используя (12), (28) — (31) и лемму 1, нетрудно показать, что

$$\left(\frac{1}{U(y)}\right)'' H(y) = O\left(\ln^2 \frac{1}{1-y}\right), \quad y \to 1-. \tag{47}$$

Кроме того, учитывая (12), (28) — (31) и лемму 1, имеем

$$\frac{2U'(y)}{U^2(y)}\left[H_0'(y) + \sum_{r=1}^{m-1} G_r(y) H_r'(y)\right] - \frac{1}{U(y)}\left[H_0''(y) + \sum_{r=1}^{m-1} G_r(y) H_r''(y)\right] = \\ = \frac{1+o(1)}{A_0(1-y)}, \quad y \to 1-. \tag{48}$$

Ввиду (28) — (31), (35), (36), (41) и леммы 1 заключаем, что при $y \to 1-$

$$\frac{U'(y)}{U^2(y)} \sum_{r=1}^{m-1} G_r'(y) H_r(y) = O\left(\ln^2 \frac{1}{1-y}\right), \tag{49}$$

$$\frac{1}{U(y)} \sum_{r=1}^{m-1} G_r''(y) H_r'(y) = O\left(\ln \frac{1}{1-y}\right), \tag{50}$$

$$\frac{1}{U(y)} \sum_{r=1}^{m-1} G_r''(y) H_r(y) = o(G_0''(y)). \tag{51}$$

Из (46) — (51) следует утверждение леммы.

3. Доказательство теоремы 1. Ввиду тауберовой теоремы (см. [19], стр. 514) из (41) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} k_0 p_{00}(k) \sim \frac{1}{A_0} \ln n, \quad n \to \infty. \tag{52}$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{1 - G_0(y)}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) y^n, \quad 0 \leqslant y < 1. \tag{53}$$

Кроме того, согласно (40) и (42)

$$\frac{1 - G_0(y)}{1-y} = \frac{1}{(1-y) W_0(y)} \sim \frac{1}{A_0} \ln \frac{1}{1-y}, \quad y \to 1-. \tag{54}$$

Используя (53), (54) и тауберову теорему (см. [19], стр. 514), получаем

$$\sum_{k=0}^{n} F(k) \sim \frac{1}{A_0} \ln n, \quad n \to \infty. \tag{55}$$

Но для $n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=0}^{n} F(k) = \sum_{k=1}^{n} {}_0p_{00}(k) k + (n+1) F(n). \tag{56}$$

Из (52), (55) и (56) следует, что

$$F(n) = o\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad n \to \infty. \tag{57}$$

Учитывая (52), лемму 10 и тауберову теорему (см. [19], стр. 514), имеем

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\,{}_0p_{00}(k) \sim \frac{1}{A_0} n, \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует (см. [19], стр. 343), что существует $\lim\limits_{n\to\infty} F(n)n = \mu$, где $0 < \mu \leqslant \infty$. Покажем, что $\mu < \infty$. Действительно, если $\mu = \infty$, то $F(x)$ медленно меняется при $x \to \infty$ (см. [19], стр. 343). Поэтому в силу известного представления для медленно меняющихся функций (см. [19], стр. 342) получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n)\,n}{\ln n} = \infty,$$

что противоречит (57). Таким образом, $F(n) \sim \mu/n$, $n \to \infty$, где $0 < \mu < < \infty$. Учитывая (55), заключаем, что $\mu = 1/A_0$.

4. **Доказательство теоремы 2.** Используя теорему 1 и результат Эриксона (см. [20], стр. 266), получаем

$$p_{00}(n) \sim \Big(\sum_{k=0}^{n} F(k)\Big)^{-1}, \quad n \to \infty.$$

Поэтому ввиду (55)

$$p_{00}(n) \sim \frac{A_0}{\ln n}, \quad n \to \infty. \tag{58}$$

Согласно (34) имеем

$$p_{0r}(n) = \sum_{k=1}^{n} {}_0p_{0r}(k)\, p_{00}(n-k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{[n/2]} {}_0p_{0r}(k)\, p_{00}(n-k) + \sum_{k=[n/2]+1}^{n} {}_0p_{0r}(k)\, p_{00}(n-k), \quad n > 1, \quad r \neq 0. \tag{59}$$

В силу (37) и теоремы 1

$$\sum_{k=[n/2]+1}^{n} {}_0p_{0r}(k)\, p_{00}(n-k) = O\Big(\sum_{k=[n/2]}^{n} {}_0p_{0r}(k)\Big) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty. \tag{60}$$

Вследствие (58)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{00}(n-k)}{p_{00}(n)} = 1$$

равномерно по $0 \leqslant k \leqslant n/2$. Учитывая (12), получаем

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} {}_0p_{0r}(k)\, p_{00}(n-k) = p_{00}(n)\, G_r(1)\,(1 + o(1)), \quad n \to \infty. \tag{61}$$

Из (58) — (61) следует, что $p_{0r}(n) \sim A_r/\ln n$, $n \to \infty$, где

$$A_r = G_r(1) A_0, \quad r \in \mathfrak{N}. \tag{62}$$

Ввиду (12), (39) получаем $0 < A_r < \infty$, $r \in \mathfrak{N}$.

5. Доказательство теоремы 3. Дифференцируя соотношение (18) по s и учитывая (1), (5), получаем $\Psi_0'(1-)=0$,

$$\Psi'_{n+1}(1-)=\Psi'_n(1-)+\sum_{r=0}^{m-1}p_{0r}(n)\sum_{k=r+1}^{m}(k-r)q_k,\quad n=0,1,\ldots$$

Следовательно, для $n=1,2,\ldots$

$$\mathbf{M}Z_n=\Psi'_n(1-)=\sum_{r=0}^{m-1}\Big(\sum_{u=1}^{m-r}uq_{r+u}\Big)\sum_{k=0}^{n-1}p_{0r}(k). \tag{63}$$

В силу (38), (62) и теоремы 2

$$\sum_{r=0}^{m-1}p_{0r}(n)\sum_{k=r+1}^{m}(k-r)q_k\sim\frac{B}{\ln n},\quad n\to\infty. \tag{64}$$

Из (63), (64), очевидно, следует (8).

Дифференцируя соотношение (18) дважды и учитывая (1), (3), (5), (6), имеем $\Psi_0''(1-)=0$, а при $n\geqslant 0$

$$\Psi''_{n+1}(1-)=\Psi''_n(1-)+\Psi'_n(1-)f''(1-)+g_1''(1-)-$$
$$-\sum_{r=0}^{m-1}p_{0r}(n)\sum_{k=r+1}^{m}(k-r)(k-r+1)q_k+f''(1-)\sum_{r=0}^{m-1}p_{0r}(n)\sum_{k=r+1}^{m}(k-r)q_k.$$

Отсюда, из (63), (64) и теоремы 2 выводим, что

$$\Psi''_n(1-)\sim 2B^2\frac{n^2}{\ln n},\quad n\to\infty. \tag{65}$$

Поскольку

$$\mathbf{D}Z_n=\Psi''_n(1-)+\mathbf{M}Z_n-(\mathbf{M}Z_n)^2,$$

то из (8), (65) вытекает (9).

6. Доказательство теоремы 4. Для произвольного $x\in[0,1]$ рассмотрим преобразование Лапласа

$$\mathbf{M}\exp(-Z_nt/n^x)=\Psi_n(\exp(-t/n^x)),\quad t\in[0,\infty),\ n=1,\ldots$$

Полагая в (17) $s=\exp(-t/n^x)$ и используя (19) — (22), (64), получаем при $t>0$, $x\in[0,1]$, $n\to\infty$

$$\Psi_n(\exp(-t/n^x))=c(\exp(-t/n^x))-$$
$$-c(e^{-t/n^x})\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left[\frac{1}{1-e^{-t/n^x}}+kB\right]^{-1}+\gamma_k\right)\left(\frac{B}{\ln(n-k)}+d_{n-k}\right)+o(1), \tag{66}$$

где $\gamma_k=o(1/k)$, $d_k=o(1/\ln k)$, $k\to\infty$. Поскольку

$$\lim_{s\to 1-}g_1(f_k(s))=g_1(1-)=1,\ k=1,2,\ldots,$$

то, учитывая (26), имеем для $x\in(0,1]$, $t\geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty}c_n(\exp(-t/n^x))=1. \tag{67}$$

С помощью формулы для частичной суммы гармонического ряда (см. [21], стр. 270), нетрудно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{[n/2]}\left[\frac{1}{(1-e^{-t/n^x})B}+k\right]^{-1}\frac{1}{\ln(n-k)}=1-x,\quad x\in[0,1],\ t>0. \tag{68}$$

Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=[n/2]+1}^{n-1}\left[\frac{1}{(1-e^{-t/n^{x}})B}+k\right]^{-1}\frac{1}{\ln(n-k)}=0,\quad x\in[0,1],\ t>0. \tag{69}$$

Вследствие (68), (69) для $x\in[0,1]$, $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left[\frac{1}{1-e^{-t/n^{x}}}+kB\right]^{-1}+\gamma_k\right)\left(\frac{B}{\ln(n-k)}+d_{n-k}\right)=1-x. \tag{70}$$

Из (66), (67), (70), вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_n(\exp(-t/n^{x}))=x,\quad x\in[0,1],\quad t\in(0,\infty).$$

Следовательно, согласно теореме непрерывности (см. [19], стр. 496)

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{Z_n}{n^{x}}<\beta\right\}=x$$

для всех $\beta>0$, $x\in[0,1]$. Отсюда, очевидно, следует утверждение теоремы.

Поступила в редакцию
5.10.78

ЛИТЕРАТУРА

[1] **J. I. Foster,** A limit theorem for a branching process with state-dependent immigration, Ann. Math. Statist., **42**, 5 (1971), 1773—1776.

[2] **A. G. Pakes,** A branching process with a state dependent immigration component, Adv. Appl. Prob., **3**, 2 (1971), 301—314.

[3] **Nakagawa Tetsuo, Sato Masamichi,** A Galton—Watson process with state-dependent immigration, Res. Repts. Nagaoka Tech. Coll., **9**, 4 (1974), 177—182.

[4] **C. R. Heathcote,** A branching process allowing immigration, J. Roy. Statist. Soc., **B 27**, 1 (1965), 138—143.

[5] **A. G. Pakes,** Futher results on the critical Galton—Watson process with immigration, J. Austral. Math. Soc., **13**, 3 (1972), 277—290.

[6] **E. Seneta,** An explicit limit theorem for the critical Galton—Watson process with immigration, J. Roy. Statist. Soc., **B 32**, 1 (1970), 149—152.

[7] **A. G. Pakes,** On the critical Galton—Watson process with immigration, J. Austral. Math. Soc., **12**, 4 (1971), 476—482.

[8] **A. G. Pakes,** Some new limit theorems for the critical branching process allowing immigration, Stoch. Proc. Appl., **4**, 2 (1976), 175—185.

[9] **E. Seneta,** The stationary distribution of a branching process allowing immigration: A remark on the critical case, J. Roy. Statist. Soc., **B 30**, 1 (1968), 176—179.

[10] **А. М. Зубков,** Периоды жизни ветвящегося процесса с иммиграцией, Теория вероятн. и ее применен., **XVII**, 1 (1972), 179—188.

[11] **В. А. Ватутин,** Критический ветвящийся процесс Гальтона—Ватсона с эмиграцией, Теория вероятн. и ее примен., **XXII**, 3 (1977), 482—497.

[12] **F. T. Bruss,** Branching processes with random absorbing processes, J. Appl. Prob., **15**, 1 (1978), 54—64.

[13] **Б. А. Севастьянов, А. М. Зубков,** Регулируемые ветвящиеся процессы, Теория вероятн. и ее примен., **XIX**, 1 (1974), 15—25.

[14] **А. М. Зубков,** Аналогии между процессами Гальтона—Ватсона и φ-ветвящимися процессами, Теория вероятн. и ее примен., **XIX**, 2 (1974), 319—339.

[15] **Н. М. Янев,** Условия вырождения φ-ветвящихся процессов со случайным φ, Теория вероятн. и ее примен., **XX**, 2 (1975), 433—440.

[16] К.-Л. Чжун, Однородные цепи Маркова, М., изд-во «Мир», 1964.
[17] Т. Харрис, Теория ветвящихся случайных процессов, М., изд-во «Мир», 1966.
[18] H. Kesten, P. Ney, F. Spitzer, The Galton—Watson branching process with mean one and finite variance, Теория вероятн. и ее примен., XI, 4 (1966), 579—611.
[19] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М., изд-во «Мир», 1967.
[20] K. B. Erickson, Strong renewal theorems with infinite mean, Trans. Amer. Math. Soc., 151, 1 (1970), 263—291.
[21] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, М., изд-во «Наука», 1969.

LIMIT THEOREMS FOR A CRITICAL GALTON — WATSON PROCESS WITH MIGRATION

S. V. NAGAEV, L. V. HAN (NOVOSIBIRSK)

(*Summary*)

The critical Galton—Watson process with immigration and emigration is investigated. We consider the population of particles which develop according to the critical Galton—Watson process with the offspring generating function $f(s)$, and at each moment $n = 0, 1, \ldots$ either k $(k = 0, 1, \ldots)$ particles immigrate in the population with the probability p_k or j $(j = 1, \ldots, m)$ particles of those present at time n emigrate from the population with probability q_j, where m is a fixed natural number,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k + \sum_{k=1}^{m} q_k = 1, \quad q_m > 0.$$

Let Z_n $(n = 0, 1, \ldots)$ be the number of particles at time n. We suppose that

$$Z_0 = 0, \quad f'(1-) = 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} kp_k - \sum_{k=1}^{m} kq_k = 0.$$

The following results are obtained. If

$$f(0) > 0, \quad B = {}^1/_2 f''(1-) < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k < \infty,$$

then for some $A_0 \in (0, \infty)$

$$\mathbf{P}\{Z_n = 0\} \sim \frac{A_0}{\log n}, \quad \mathrm{M}Z_n \sim \frac{Bn}{\log n}, \quad \mathrm{D}Z_n \sim \frac{2B^2n^2}{\log n} \quad (n \to \infty),$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\log Z_n}{\log n} < x\right\} = x, \quad x \in [0, 1].$$