# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОДНОСТОРОННИХ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

*НАГАЕВ С. В.*

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Положим $F(x) = \mathbf{P}(X_1 < x)$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Нас будут интересовать вероятности односторонних больших уклонений $S_n \geqslant x \geqslant cn$, $c > 0$ (на эту задачу мое внимание обратил В. М. Золотарев в связи с одной работой А. А. Боровкова).

В дальнейшем через $h(x)$ мы будем обозначать функцию медленно, меняющуюся при $x \to \infty$.

**Теорема 1.** *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и при* $x \to \infty$

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha} h(x), \tag{1}$$

*где* $\alpha > 1$.

*Тогда при* $n \to \infty$ *и* $x \geqslant cn$

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant x) \sim n(1 - F(x)), \tag{2}$$

*где* $c$ — *любая положительная постоянная* ($a_n \sim b_n$ *означает, что* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$).

Близкий результат получен недавно С. Г. Ткачуком (см. [3]), который вместо условия $\mathbf{E}X_1 = 0$ накладывает ограничение

$$F(-x) = cx^{-\alpha} h(x)(1 + o(1)), \quad x \to \infty,$$

где $c \geqslant 0$ и $0 \leqslant \alpha < 2$. При этих условиях (2) справедливо, если $(x - a_n)/b_n \to \infty$, где $a_n$ и $b_n$ таковы, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{(S_n - a_n)/b_n < x\} = G(x),$$

где $G(x)$ — некоторая функция распределения.

В работе А. В. Нагаева [1] представление (2) было получено в предположении, что $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = 1$, $\alpha > 2$ и $x/\ln x \geqslant \sqrt{n}$.

**Теорема 2.** *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и*

$$1 - F(x) \leqslant x^{-\alpha} h(x). \tag{3}$$

*Тогда* $\forall c > 0$ *при* $n \to \infty$ *и* $x \geqslant cn$

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant x) \leqslant (1 + \varepsilon_n) n x^{-\alpha} h(x), \tag{4}$$

*где* $\varepsilon_n \to 0$.

Доказательству сформулированных выше теорем мы предпошлем две леммы.

**Лемма 1.** *Для любых* $x$ *и* $y$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_n \geqslant x) = n\mathbf{P}(S_n \geqslant x, X_n \geqslant y, \max_{1\leqslant k\leqslant n-1} X_k < y) + \mathbf{P}(S_n \geqslant x, \bigcup_{1\leqslant i<k\leqslant n}\{X_i \geqslant y, X_k \geqslant y\}) +\\ + \mathbf{P}(S_n \geqslant x, \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k < y) = n\mathbf{P}_{1n} + \mathbf{P}_{2n} + \mathbf{P}_{3n}.\end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство этой леммы почти очевидно и потому мы его опускаем. Заметим также, что представление (5) является отправной точкой в работах [1] и [3].

Положим

$$\mu(u) = \int\limits_{|v|<u} v\, dF(v), \qquad \gamma_t(u) = \int\limits_{|v|<u} |v|^t\, dF(v).$$

**Лемма 2.** *Для любых* $u > 0$, $v > 0$ *и* $1 \leqslant t \leqslant 2$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_n \geqslant u) \leqslant \exp\{u/v - ((u - n\mu(v))/v +\\ + n\gamma_t(v)v^{-t}) \ln(uv^{t-1}/n\gamma_t(v) + 1)\} + n(1 - F(v)).\end{aligned} \tag{6}$$

Лемма 2 является простым следствием теоремы 2 из работы [2].

Доказательство теоремы 1. Мы воспользуемся представлением (5), связав $x$ и $y$ соотношением $x = y \ln^3 x$. Исследуем отдельно вероятности $P_{in}$, $i = \overline{1, 3}$.

Начнем с $P_{1n}$. Положим

$$x' = x \max [1/\ln x, \ \gamma_{3/2}^{1/2}(y)/y^{1/4}, \quad | \mu (y) |^{1/2}].$$

Кроме того, выберем последовательность $z_n > 0$ так, чтобы при $n \to \infty$

$$z_n/n \to 0 \tag{7}$$

и

$$P (| S_{n-1} | > z_n) \to 0 \tag{8}$$

(существование такой последовательности обеспечивается законом больших чисел). Далее,

$$P_{1n} = \int_{-\infty}^{\infty} P (X_1 \geqslant \max [y, x - u]) \, dP (S_{n-1} < u, \max_{1 \leqslant k \leqslant n-1} X_k < y) =$$

$$= \int_{u \leqslant -z_n} + \int_{-z_n < u < x'} + \int_{u \geqslant x'} = I_1 + I_2 + I_3. \tag{9}$$

Вследствие (8)

$$\lim_{n \to \infty} P (S_{n-1} \leqslant -z_n, \max_{1 \leqslant k \leqslant n-1} X_k < y) = 0. \tag{10}$$

Поэтому

$$I_1 = o (1 - F (x + z_n)) = o (1 - F (x)), \quad n \to \infty. \tag{11}$$

Оценим теперь $I_3$. Ясно, что

$$P (S_{n-1} \geqslant x', \max_{1 \leqslant k \leqslant n-1} X_k < y) \leqslant P (S'_{n-1} \geqslant x'), \tag{12}$$

где

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} X'_i, \quad X'_i = \begin{cases} X_i, & X_i < y, \\ 0, & X_i \geqslant y. \end{cases}$$

Для оценки $P (S'_{n-1} \geqslant x')$ воспользуемся леммой 2, положив в ней $t = 3/2$, $u = x'$, $v = y$.

Так как $E | X_1 | < \infty$,

$$\lim_{y \to \infty} \gamma_{3/2} (y)/y^{1/2} = 0. \tag{13}$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} x' y^{1/2} / n \gamma_{3/2} (y) = \infty. \tag{14}$$

Поскольку в условиях теоремы $EX_1 = 0$,

$$\lim_{y \to \infty} \mu (y) = 0. \tag{15}$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} n \mu (y)/x' = 0, \tag{16}$$

так как по определению $x'$

$$n \, | \mu (y) | / x' \leqslant | \mu (y) |^{1/2}/c.$$

Из (6) в силу (14) и (16) вытекает, что при достаточно больших $n$

$$P (S'_n \geqslant x') \leqslant \exp \{-x'/y\} \leqslant \exp \{-\ln^2 x\}. \tag{17}$$

Поскольку

$$I_3 \leqslant P (S_{n-1} \geqslant x', \max_{1 \leqslant k \leqslant n-1} X_k < y),$$

из (12) и (17) следует, что

$$I_3 = o (1 - F (x)), \quad n \to \infty. \tag{18}$$

Перейдем теперь к оценке $I_2$. Нетрудно видеть, что при $n \to \infty$

$$(1 - F(x))/(1 - F(x + z_n)) \to 1.$$

С другой стороны,

$$(1 - F(x))/(1 - F(x - x')) \to 1, \tag{19}$$

так как вследствие (13) и (15) $x/x' \to \infty$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-z_n<u<x'} |(1 - F(x - u))/(1 - F(x)) - 1| = 0.$$

Так как при достаточно больших $n$

$$\mathrm{P}(X_1 \geqslant \max[y, x - u]) = \mathrm{P}(X_1 \geqslant x - u),$$

это означает, что

$$I_2 = (1 - F(x))\mathrm{P}(-z_n < S_{n-1} < x', \max_{1\leqslant k\leqslant n-1} X_k < y)\,(1 + o(1)), \quad n \to \infty. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n-1} X_k \leqslant y) = 1 + O(nh(y)/y^{\alpha}) = 1 + o(1), \; n \to \infty. \tag{21}$$

Из (10), (12), (17) и (21) следует, что

$$\mathrm{P}(-z_n < S_{n-1} < x', \max_{1\leqslant k\leqslant n-1} X_k < y) = 1 + o(1), \quad n \to \infty. \tag{22}$$

Сравнивая (20) и (22), мы заключаем, что

$$I_2 = (1 - F(x))\,(1 + o(1)), \quad n \to \infty. \tag{23}$$

Из (9), (11), (18) и (23) вытекает

$$P_{1n} = (1 - F(x))\,(1 + o(1)), \quad n \to \infty. \tag{24}$$

Остается оценить $P_{2n}$ и $P_{3n}$. Нетрудно показать, что

$$P_{2n} < \binom{n}{2}(1 - F(y))^2.$$

Следовательно,

$$P_{2n} = O(n^2h^2(y)/y^{2\alpha}) = o(n(1 - F(x)), \quad n \to \infty. \tag{25}$$

Далее, в силу (12)

$$P_{3n} \leqslant \mathrm{P}(S_n' \geqslant x). \tag{26}$$

Так как $x > x'$ при достаточно больших $n$, из (17) и (26) следует

$$P_{3n} = o(n(1 - F(x))), \quad n \to \infty. \tag{27}$$

Комбинируя (5), (24), (25) и (27), мы приходим к асимптотическому представлению (2).

Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы 2 мало отличается от доказательства теоремы 1, но несколько проще последнего.

Исходным пунктом по-прежнему служит представление (5).

Вероятность $P_{1n}$ в данном случае достаточно представить в виде

$$P_{1n} = \int_{u<x'} + \int_{u\geqslant x'} = I_4 + I_3.$$

Нетрудно видеть, что при достаточно больших $n$

$$I_4 \leqslant 1 - F(x - x').$$

Так как (ср. (19))

$$h(x)(x - x')^{\alpha}/h(x - x')x^{\alpha} \to 1,$$

то при достаточно больших $n$

$$I_4 < (1 + \varepsilon_n)x^{-\alpha}h(x).$$

Что касается $I_3$, $P_{2n}$ и $P_{3n}$, то последние оцениваются точно так же, как при доказательстве теоремы 1, с заменой, разумеется, $1 - F(x)$ на $x^{-\alpha}h(x)$.

### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Нагаев А. В.*, Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения при нарушении условия Крамера, Изв. АН УзССР, сер. физ.- матем. наук, 6 (1969), 17—22.

[2] *Фук Д. Х., Нагаев С. В.*, Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., XVI, 4 (1971), 660—675.

[3] *Ткачук С. Г.*, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения устойчивого закона, Канд. дисс., Ташкент, 1977.


*Поступила в редакцию*
*11.12.78*

---

## ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF ONE-SIDED LARGE DEVIATION PROBABILITIES

*S. V. NAGAEV (NOVOSIBIRSK)*


*(Summary)*

Let $X_1, X_2, \ldots$ be i. i. d. random variables,

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad F(x) = \mathbf{P}\{X_1 < x\}, \quad S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

We prove that if for $x \to \infty$

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha} h(x), \quad \alpha > 1,$$

where $h(x)$ is a slowly varying function, then

$$\mathbf{P}\{S_n \geqslant x\} \sim n(1 - F(x)) \quad \text{for } n \to \infty \text{ and } \liminf_{n\to\infty} x/n > 0.$$


---

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СТЬЮДЕНТИЗОВАННОГО ДВУМЕРНОГО РАЗМАХА

*ПАГУРОВА В. И., РОДИОНОВ К. Д., РОДИОНОВА М. В.*

Рассматриваются оценки сверху и снизу для «верхних хвостов» распределения стьюдентизованного размаха в выборке из двумерной круговой нормальной совокупности. Полученный результат можно применить для аппроксимации критических значений статистики критерия обнаружения выбросов и/или неоднородности дисперсий.

**1. Постановка задачи.** Пусть $(X_i, Y_i)$, $i = 1, \ldots, n$,— независимые одинаково распределенные двумерные векторы, каждый из которых подчиняется двумерному круговому нормальному распределению с плотностью

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu_x)^2 + (y-\mu_y)^2]\right\}, \quad |x| < \infty, \quad |y| < \infty,$$

параметры $\mu_x$, $\mu_y$ и $\sigma^2$ неизвестны. Введем величины

$$R = \max_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} [(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2]^{1/2},$$

$$S^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2\right] \Big/ [2(n-1)],$$