РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, СДЕЛАННЫХ НА ЗАСЕДАНИЯХ СЕМИНАРА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ ПРИ КИЕВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. Т. Г. ШЕВЧЕНКО

1981

Заседание 6 февраля

Нагаев С. В., О вероятностях больших уклонений для гауссовского распределения в банаховом пространстве.

Пусть B — сепарабельное банахово пространство, X — гауссовский случайный вектор со значениями в этом пространстве и $EX = 0$. Символом $|X|$ будем обозначать норму X.

В работе [1] было установлено, что

$$P(|X| \geqslant t) \leqslant 1 - \Phi(at/b) \tag{1}$$

для любых a и b, удовлетворяющих условию

$$P(|X| < b) = \Phi(a) > 1/2,$$

где Φ — стандартный гауссовский закон. Доказательство (1) основано на изопериметрическом неравенстве на сфере в R^n, из которого следует экстремальное свойство полупространства по отношению к гауссовской мере в классе выпуклых множеств в R^n.

Используя близкий метод, Судаков и Цирельсон [4] показали, что при $t \to \infty$

$$P(|X| < t) = \Phi((t - d + o(1))/c), \tag{2}$$

где $c > 0$ и $d \geqslant 0$ — некоторые постоянные.

В работе Ферника [2] находим оценку

$$\mathbf{P}(|X| > t) < \mathbf{P}(|X| \leqslant t_0) \exp\{-t^2\gamma/(24t_0)\}, \tag{3}$$

где $\gamma = \mathbf{P}(|X| \leqslant t_0)\mathbf{P}(|X| > t_0)$, t_0 — произвольное положительное число. Изящный прием, посредством которого Ферник выводит (3), опирается на свойство инвариантности стандартного гауссовского распределения в R^2 при повороте.

Наконец, третий подход был предложен А. В. Скороходом [3], который получил, правда, более слабую в смысле зависимости от t оценку, нежели (1) и (3), а именно

$$\mathbf{P}(|X| > t) < \exp\{-\eta t\}, \tag{4}$$

где $\eta > 0$ — некоторая постоянная.

Позднее обнаружилось, что при помощи простых рассуждений, опирающихся на безграничную делимость нормального закона, из (4) можно получить оценку вида

$$\mathbf{P}(|X| > t) < \exp(-\eta_1 t^2) \tag{5}$$

(см., например, [5, с. 80]). Более того, метод Скорохода допускает модификацию, которая позволяет сразу получить оценку вида (5), минуя промежуточную стадию (4). Помимо этого удается найти и нижнюю грань для постоянной η_1.

Теорема. *Пусть* λ_0 *таково, что* $\mathbf{P}(|X| \geqslant \lambda_0) = \alpha < 1/2$. *Тогда при* $t \geqslant \lambda_0$ *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(|X| \geqslant t) < \exp\{-\beta^2 t^2/(4\lambda_0^2) + (\beta + \beta^2/2)\, t/\lambda_0\},$$

где $\beta \geqslant -\ln(2\alpha + e^{-1}(1 - 2\alpha))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Landau H. J., Shepp L. A.* On the supremum of a Gaussien process.— Sankhya, Ser. A., 1970, v. 32, № 4, p. 369—378.
2. *Fernique X.* Intégrabilité des vecteurs gaussiens.— C. R. Acad. Sci. Paris, ser. A., 1970, v. 270, № 25, p. 1698—1699.
3. *Скороход А. В.* Замечание о гауссовских мерах в банаховом пространстве.— Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, № 3, с. 519—520.
4. *Судаков В. Н., Цирельсон Б. С.* Экстремальные свойства полупространств для сферически инвариантных мер.— Записки научн. семинаров ЛОМИ, 1974, т. 41, с. 14—24.
5. *Hoffman — Jørgensen J.* Probability in B-spaces.— Aarhus Universitet Lecture Notes Series, No. 48, 1977, 186 p.