МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 32, № 4 (1982)

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ КРИТИЧЕСКОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА С ИММИГРАЦИЕЙ

М. Х. Асадуллин, С. В. Нагаев

1. Дискретное время. Рассмотрим следующую модель ветвящегося процесса с иммиграцией. Пусть ξ_0, ξ_1, ξ_2 ... — неотрицательные целочисленные случайные величины. Случайную величину ξ_i будем интерпретировать как число частиц, поступивших извне в некоторую популяцию в момент времени i. Каждая из поступивших в момент i частиц дает начало некоторому ветвящемуся процессу $Y_i^{(j)}(t)$, $1 \leqslant j \leqslant \xi_i$. Предположим, что процессы $Y_i^{(j)}(t)$ взаимно независимы и для любых i, j процесс $Y_i^{(j)}(t)$ имеет то же распределение, что и $Y_0^{(1)}(t-i)$, где $Y_0^{(1)}(t)$ — ветвящийся процесс, начинающийся с одной частицы в момент времени 0.

Пусть $Z(n)$ — общее число частиц в популяции в момент времени n. Если первоначально частиц в популяции нет, то

$$Z(n)=\sum\nolimits_{i=0}^{n}\sum\nolimits_{j=1}^{\xi_i} Y_i^{(j)}(n). \qquad (1)$$

Нашей целью является изучение асимптотического поведения распределения $Z(n)$ при $n\to\infty$.

Наиболее простым является случай, когда $Y_i^{(j)}(n)$ — процесс Гальтона — Ватсона, а процесс иммиграции задается последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Результаты, касающиеся асимптотического поведения $Z(n)$ в этом случае, можно найти, например, в [1] (глава VI, раздел 7).

В работе [2] предполагается, что $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ образуют стационарную в широком смысле последовательность, удовлетворяющую условию $\operatorname{Cov}(\xi_0, \xi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, а процесс $Y_i^{(j)}(t)$ принадлежит к некоторому классу, содержащему критические процессы Беллмана-Харриса с конечными вторыми моментами времени жизни частиц и числа частиц, получающихся при делении одной частицы.

В настоящей работе рассматривается более общая схема с точки зрения ограничений на входной процесс.

Будем говорить, что последовательность случайных величин $\{\xi_i\}_{i\geqslant 0}$ удовлетворяет условию (A), если существует случайная величина ξ такая, что $n^{-1}\mathsf{E}\left|\sum_{i=0}^{n}(\xi_i-\xi)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

В дальнейшем изложении существенную роль будет иметь следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Если последовательность* $\{\xi_i\}_{i\geqslant 0}$ *удовлетворяет условию* (A), *то*

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\xi_i}{n-i+ns^{-1}} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathsf{P}}{\longrightarrow}} \xi\ln(1+s),$$

где $s>0$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\xi_i}{n-i+ns^{-1}} - \xi\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n-i+ns^{-1}} =$$

$$= n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}S_i(c_i-c_{i+1}) + sn^{-1}S_n, \qquad (2)$$

где $c_i = \dfrac{n}{n-i+ns^{-1}}$, $\quad S_i=\sum_{j=0}^{i}(\xi_j-\xi)$.

Заметим, что равномерно по i, $0\leqslant i\leqslant n-1$

$$|c_i-c_{i+1}|\leqslant s^2n^{-1}.$$

Отсюда

$$\mathsf{E}\left|n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}S_i(c_i-c_{i+1})+n^{-1}sS_n\right|\leqslant$$

$$\leqslant n^{-1}\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}|c_i-c_{i+1}|\sum_{i=0}^{n-1}\mathsf{E}|S_i|+sn^{-1}\mathsf{E}|S_n|\leqslant$$

$$\leqslant s^2n^{-2}\sum_{i=0}^{n-1}\mathsf{E}|S_i|+sn^{-1}\mathsf{E}|S_n|. \qquad (3)$$

Так как

$$n^{-2}\sum_{i=0}^{n-1}\mathsf{E}|S_i|\leqslant n^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}i^{-1}\mathsf{E}|S_i|+n^{-2}\mathsf{E}|S_0|$$

и по условию (A)

$$i^{-1}\mathsf{E}\,|S_i| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

то

$$n^{-2}\sum\nolimits_{i=0}^{n-1}\mathsf{E}\,|S_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ввиду неравенства (3), это означает, что

$$\mathsf{E}\,\Big|n^{-1}\sum\nolimits_{i=0}^{n-1}S_i\,(c_i-c_{i+1})+sn^{-1}S_n\Big| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Возвращаясь к представлению (2), мы получаем, что

$$\sum\nolimits_{i=0}^{n}\frac{\xi_i}{n-i+ns^{-1}}-\xi\sum\nolimits_{i=0}^{n}\frac{1}{n-i+ns^{-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} 0.$$

С другой стороны,

$$\sum\nolimits_{i=0}^{n}\frac{1}{n-i+ns^{-1}}=\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=0}^{n}\frac{1}{(n-i)/n+s^{-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(1+s).$$

Следовательно,

$$\sum\nolimits_{i=0}^{n}\frac{\xi_i}{n-i+ns^{-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \xi\ln(1+s),$$

что и требовалось доказать.

Положим $f_n(z)=\mathsf{E}z^{Y_0^{(1)}(n)}$. В дальнейшем C будет обозначать постоянную, не обязательно одну и ту же.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выполнено условие* (A) *и*

$$1-f_n(z)=\frac{1-z}{1+\gamma n(1-z)}(1+o(1)),\qquad n\to\infty,\tag{4}$$

равномерно относительно z, $0\leqslant z\leqslant 1$. γ — *постоянная. Тогда* $(\gamma n)^{-1}Z(n)$ *сходится по распределению к случайной величине* $\mathscr{W}$, *причем выполняется соотношение*

$$\mathsf{E}\exp(-s\mathscr{W})=\psi((1+s)^{-1/\gamma}),\qquad s\geqslant 0,$$

где $\psi(z)=\mathsf{E}z^{\xi}$, *а* ξ — *случайная величина, фигурирующая в условии* (A).

Условие (4) накладывалось и в работе [2]. Наряду с критическими процессами Беллмана-Харриса (см. [3], теорема (1.1)) этому условию удовлетворяют критические процессы Севастьянова ([4], стр. 264) и Крампа-Мода-Ягерса с непрерывным ([5], стр. 102) и дискретным ([6], стр. 14) временем.

Доказательство. Обозначим $\Phi_n(s) = \mathsf{E}\exp(-sZ(n))$. Из (1) в силу независимости процессов $Y_i^{(j)}(n)$ следует, что

$$\Phi_n(s) = \mathsf{E}\prod_{i=0}^{n} \varphi_{n-i}^{\xi_i}(s), \qquad (5)$$

где $\varphi_i(s) = \mathsf{E}\exp(-sY_0^{(1)}(i))$.

Положим в (4) $z = e^{-s}$, $s \geqslant 0$. Тогда

$$\varphi_n(s) - 1 = -\frac{1-e^{-s}}{1+\gamma n(1-e^{-s})}(1+o(1))$$

при $n \to \infty$ равномерно относительно $s \geqslant 0$. Отсюда, при $n \to \infty$

$$\varphi_n(s) - 1 = -\frac{1}{\gamma n + s^{-1}} + \frac{\beta_n(s)}{\gamma n + s^{-1}} + O(s^2), \qquad (6)$$

причем $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{s\geqslant 0}|\beta_n(s)| = 0$.

С другой стороны, из разложения $\ln x = x - 1 + O((x-1)^2)$ следует

$$\ln\prod_{i=0}^{n}\varphi_{n-i}^{\xi_i}(s) = \sum_{i=0}^{n}\xi_i(\varphi_{n-i}(s)-1) + O\left(\sum_{i=0}^{n}\xi_i(\varphi_{n-i}(s)-1)^2\right). \qquad (7)$$

Из (6) и (7) получаем

$$\ln\prod_{i=0}^{n}\varphi_{n-i}^{\xi_i}(s/(\gamma n)) = -\sum_{i=0}^{n}\frac{\xi_i}{\gamma(n-i+ns^{-1})} + \sum_{i=0}^{n}\frac{\xi_i\beta_{n-i}(s/(\gamma n))}{\gamma(n-i+ns^{-1})} + O\left(\frac{s^2}{n^2}\sum_{i=0}^{n}\xi_i\right). \qquad (8)$$

Последовательность $\{\xi_i\}_{i\geqslant 0}$ удовлетворяет условию (A), следовательно, по лемме 1

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\xi_i}{n-i+ns^{-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \xi\ln(1+s). \qquad (9)$$

Учитывая, что $|\beta_i(s)| \leqslant C$, $i \geqslant 0$, имеем

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\xi_i\beta_{n-i}\left(\frac{s}{\gamma n}\right)\Big/(n-i+ns^{-1})\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-[\sqrt{n}]}\frac{\xi_i}{n-i+ns^{-1}}\sup_{i>[\sqrt{n}]}\sup_{s\geqslant 0}\left|\beta_i\left(\frac{s}{\gamma n}\right)\right| + \frac{C}{n}\sum_{i=n-[\sqrt{n}]+1}^{n}\xi_i. \qquad (10)$$

Далее,

$$n^{-1}\sum_{i=n-[\sqrt{n}]+1}^{n}\xi_i=([\sqrt{n}]/n)\,\xi+n^{-1}S_n-n^{-1}S_{n-[\sqrt{n}]},$$

где $S_n=\sum_{i=0}^{n}(\xi_i-\xi)$.

Принимая во внимание условие (A), мы получаем

$$n^{-1}\sum_{i=n-[\sqrt{n}]+1}^{n}\xi_i\xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}}0.$$

Отсюда, ввиду (9) и (10) следует, что

$$\sum_{i=0}^{n}\xi_i\beta_{n-i}\left(\frac{s}{\gamma n}\right)\Big/(n-i+ns^{-1})\xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}}0. \tag{11}$$

Из условия (A) также следует, что

$$n^{-2}\sum_{i=0}^{n}\xi_i\xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}}0. \tag{12}$$

Из (8), (9), (11) и (12) вытекает, что для любого $s\geqslant 0$ фиксированного

$$\ln\prod_{i=0}^{n}\varphi_{n-i}^{\xi_i}(s/(\gamma n))\xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}}-\frac{\xi}{\gamma}\ln(1+s). \tag{13}$$

Так как произведение $\Pi_{i=0}^{n}\varphi_{n-i}^{\xi_i}(s)$ равномерно ограничено, то в силу (5) из последнего соотношения следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(s/(\gamma n))=\mathsf{E}\mathsf{P}\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n}\varphi_{n-i}^{\xi_i}(s/(\gamma n))=$$
$$=\mathsf{E}\left((1+s)^{-\xi/\gamma}\right)=\psi\left((1+s)^{-1/\gamma}\right),$$

что равносильно утверждению теоремы 1 (символ $\mathsf{P}\lim$ означает предел по вероятности).

2. Непрерывное время. Пусть $X(t)\equiv X(t,\ \omega)$, $\omega\in\Omega$, $t\geqslant 0$, — неотрицательный целочисленный случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathfrak{A},\ \mathsf{P})$, причем траектории $X(t)$ непрерывны справа, не убывают по t и ограничены для любого конечного t. Процесс $X(t)$ будем интерпретировать как число частиц, иммигрировавших в некоторую популяцию за время t. Пусть τ_i, $i\geqslant 1$,— момент i-го скачка траектории $X(t)$, а ξ_i — величина этого скачка. Очевидно, $X(t)=$ $=\sum_{\tau_i\leqslant t}\xi_i$.

Новым в этом описании по сравнению со случаем дискретного времени, рассмотренного в пункте 1, является то, что моменты τ_i — случайные, а случайные величины ξ_i — строго положительные.

Каждая из поступивших в момент τ_i частиц дает начало некоторому ветвящемуся процессу $Y_i^{(j)}(t)$, $1 \leqslant j \leqslant \xi_i$. Как и в пункте 1, мы будем предполагать, что процессы $Y_i^{(j)}(t)$ взаимно независимы и для любых i, j процесс $Y_i^{(j)}(t)$ имеет то же распределение, что и $Y_0^{(1)}(t-\tau_i)$, где $Y_0^{(1)}(t)$ — ветвящийся процесс, начинающийся с одной частицы в момент времени 0.

Общее число частиц в популяции в момент времени t будет

$$Z(t) = \sum\nolimits_{\tau_i \leqslant t} \sum\nolimits_{j=1}^{\xi_i} Y_i^{(j)}(t). \tag{14}$$

В случае, когда процесс $X(t)$ сложный пуассоновский, а процессы $Y_i^{(j)}(t)$ марковские, предельные теоремы для $Z(t)$ были получены Б. А. Севастьяновым (см. [7], глава VII).

Дальнейшее развитие теории критических ветвящихся процессов с иммиграцией связано в основном с рассмотрением более общих процессов иммиграции, чем процессы с независимыми приращениями. В [8, 9] доказана сходимость $t^{-1}Z(t)$ к предельному распределению в предположении, что $Y_0^{(1)}(t)$ — критический, зависящий от возраста ветвящийся процесс, $\{\xi_i\}_{i\geqslant 1}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и с вероятностью единица $t^{-1}\eta(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \zeta$, где $\eta(t) = \max\{n\colon \tau_n \leqslant t\}$, ζ — некоторая случайная величина. В [8], кроме того, требуется существование всех моментов числа потомков одной частицы. В [9] (теорема (7.1.5)) предполагаются конечными второй момент числа частиц, получающихся при делении одной частицы, и первый момент времени жизни частицы.

В настоящей работе также рассматривается процесс Беллмана-Харриса с иммиграцией, но на входной процесс накладываются более слабые ограничения, чем в [8], [9], в том смысле, что сходимость с вероятностью единица заменяется на сходимость по вероятности и, кроме того, не предполагается, что случайные величины ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$ независимые.

Пусть $G(t) = \mathsf{P}(\eta \leqslant t)$ — распределение времени жизни частицы. Будем предполагать, что $G(0) = 0$.

Производящую функцию числа частиц, получающихся при делении одной частицы, обозначим через $g(z)$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, а производящую функцию ветвящегося процесса Беллмана-Харриса $Y_0^{(1)}(t)$ через $F(t, z) = \mathsf{E}z^{Y_0^{(1)}(t)}, 0 \leqslant z \leqslant 1$.

Известно, что условие (4), которое постулировалось в предыдущем разделе, для критического процесса Беллмана-Харриса выполняется при $g''(1) < \infty$ и $\lim\limits_{t\to\infty} t^2(1 - G(t)) = 0$ (см. [3], теорема (1.1)). Мы, однако, воспользуемся другим представлением для $1 - F(t, z)$ (см. ниже лемму 2), которое справедливо при более слабых ограничениях. Заметим, что это представление использовалось ранее в [9] (теорема 7.1.5)).

Будем говорить, что процесс $X(t)$ удовлетворяет условию (A′), если для некоторого $h > 0$ существует случайная величина ξ такая, что $\mathsf{E}|n^{-1}X(nh) - \xi h| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, где n — целое.

Заметим, что условие (A′) эквивалентно условию (A) для последовательности $\{\xi_i^h\}_{i\geqslant 1}$, где $\xi_i^h = X(ih) - X((i-1)h)$, $i \geqslant 1$. Легко показать, что в случае, когда $\mathsf{E}\xi$ обращается в бесконечность, условие (A′) менее ограничительно, чем условие $\mathsf{E}|t^{-1}X(t) - \xi| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Следующий результат показывает, что в том случае, когда процесс размножения является процессом Беллмана-Харриса, асимптотическое поведение суммарного процесса $Z(t)$ определяется прореженным процессом $X(nh)$, $n \geqslant 0$. Другими словами, имеет значение лишь общее число частиц, поступивших в промежуток $[nh, (n+1)h)$ независимо от того, в какие именно моменты времени они поступают.

ТЕОРЕМА 2. *Если $Y_0^{(1)}(t)$ — критический процесс Беллмана-Харриса и $g''(1) = \sigma^2/2 < \infty$, $\mu = \int_0^\infty t\,dG(t) < \infty$, а процесс иммиграции $X(t)$ удовлетворяет условию (A′), то процесс $((\sigma^2/(/2\mu)\,t)^{-1}Z(t)$ сходится по распределению к случайной величине W, причем выполняется*

$$\mathsf{E}\exp(-sW) = \psi((1+s)^{-2\mu/\sigma^2}), \qquad s \geqslant 0,$$

где $\psi(z) = \mathsf{E}z^{\xi}$, а ξ — случайная величина из условия (A′).

Доказательство. Пусть

$$\Phi(t, s) = \mathsf{E}\exp(-s/(\gamma t)\,Z(t)), \qquad \gamma = \sigma^2/(2\mu).$$

Из (14) в силу независимости процессов $Y_i^{(j)}(t)$ получаем

$$\Phi(t, s) = \mathsf{E}\prod_{\tau_i \leqslant t} f^{\xi_i}(t-\tau_i, s/(\gamma t)), \tag{15}$$

где $f(t, v) = F(t, e^{-v}) = \mathsf{E}\exp(-v \cdot Y_0^{(1)}(t))$.

Введем целое n такое, что $t = nh + \delta$, $0 \leqslant \delta < h$. Очевидно,

$$X(t) = \sum_{\tau_i \leqslant t} \xi_i = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^h + \eta_n^h, \quad t > 2h,$$

где $\xi_i^h = X(ih) - X((i-1)h)$, $i \geqslant 1$, $\eta_n^h = X(t) - X((n-1)h)$.

Используя это представление, имеем при $t > 2h$

$$\prod_{\tau_i \leqslant t} f^{\xi_i}\left(t-\tau_i, \frac{s}{\gamma t}\right) = \prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{\xi_i^h} f\left(t-\tau_{ij}, \frac{s}{\gamma t}\right) \cdot$$
$$\cdot \prod_{j=1}^{\eta_n^h} f\left(t-\tau'_{nj}, \frac{s}{\gamma t}\right) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{\xi_i^h} f'\left((n-i)h + x_{ij}, \frac{s}{\gamma t}\right) \cdot \prod_{j=1}^{\eta_n^h} f\left(t-\tau'_{nj}, \frac{s}{\gamma t}\right), \tag{16}$$

где τ_{ij} (τ'_{nj}) — момент поступления j-й частицы из числа частиц, поступивших в промежуток времени $[(i-1)h, ih)$ ($[(n-1)h, t]$), $x_{ij} = t - (n-i)h - \tau_{ij}$, $0 \leqslant x_{ij} \leqslant 2h$ (здесь и далее мы полагаем, что $\prod_{j=1}^{0} = 1$).

Известно, что для критического процесса Беллмана-Харриса $z \leqslant F(t, z) \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ и, кроме того, $F(t, z)$ монотонно возрастает по t при фиксированном z (см., например, [10], лемма 4.5). Отсюда мы получаем

$$\prod_{i=1}^{n-1} f^{\xi_i^h}\left((n-i)h, \frac{s}{\gamma t}\right) \cdot \exp\left(-\frac{s}{\gamma t}\eta_n^h\right) \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{\xi_i^h} f\left((n-i)h + x_{ij}, \frac{s}{\gamma t}\right) \cdot \prod_{j}^{\eta^h} f\left(t-\tau'_{nj}, \frac{s}{\gamma t}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{i=1}^{n-1} f^{\xi_i^h}\left((n-i+2)h, \frac{s}{\gamma t}\right). \tag{17}$$

Рассмотрим разложение

$$\ln \prod_{i=1}^{n-1} f^{\xi_i^h}\left((n-i)h, \frac{s}{\gamma t}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^h \cdot \ln f\left((n-i)h, \frac{s}{\gamma t}\right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^h \cdot \left(1 - f\left((n-i)h, \frac{s}{\gamma t}\right)\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^h O\left(\left(1 - f\left((n-i)h, \frac{s}{\gamma t}\right)\right)^2\right). \quad (18)$$

Для дальнейшего нам потребуется

ЛЕММА 2. *Если $F(t, z)$ — производящая функция критического процесса Беллмана-Харриса и $g''(1) = \sigma^2/2 < < \infty$, $\mu = \int_0^\infty t\, dG(t) < \infty$, то существуют $\alpha(t)$, $\beta(t)$ такие, что при $t \to \infty$*

$$1 - F(t, z) = \frac{1-z}{1 + \gamma t(1-z)}(1 + \beta(t)) + (1-z)\alpha(t), \ \gamma = \frac{\sigma^2}{2\mu},$$

причем $\alpha(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\beta(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *равномерно относительно* z, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Доказательство. Воспользуемся известными неравенствами для производящей функции критического процесса Беллмана-Харриса (см. [3], лемма (1.6))

$$1 - g_m(z) - (1-z)G_m(t) \leqslant 1 - F(t, z) \leqslant$$

$$\leqslant 1 - g_m(z) + (1-z)(1 - G_m(t)) \quad (19)$$

для $t \geqslant 0$, $m = 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, $g_m(z) = = \underbrace{g(\ldots g}_{m}(z)\ldots)$, $G_m(t) = G^{*m}(t)$ — m-кратная свертка $G(t)$.

Пусть η_i, $i = 1, 2, \ldots$ независимые случайные величины с функцией распределения $G(t)$. Для любого $\varepsilon > 0$ и $m = m(t, \varepsilon) = [(t/\mu)(1-\varepsilon)]$ выполняется

$$\alpha_1(t, \varepsilon) = 1 - G_m(t) = \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^m \eta_i > t\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^m \eta_i - m\mu > t - m\mu\right) < \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^m \eta_i - m\mu > \varepsilon t\right) <$$

$$< \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^m \eta_i - m\mu > m\varepsilon'\right),$$

где $\varepsilon' = \varepsilon\mu/(1-\varepsilon)$.

Отсюда, в силу закона больших чисел,

$$\alpha_1(t, \varepsilon) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

для любого фиксированного ε, $0 < \varepsilon < 1/2$.

Выберем последовательность $\varepsilon_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ так, чтобы

$$\alpha_1(t) \equiv \alpha_1(t, \varepsilon_t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \tag{20}$$

Известно, что (см., например, [3], лемма (1.9))

$$1 - g_m(z) = \frac{1-z}{1+(\sigma^2/2)\, m\, (1-z)} (1 + \delta(m)), \qquad m \to \infty,$$

где $\delta(m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ равномерно относительно z, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Следовательно, для $m_t \equiv m(t, \varepsilon_t)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - g_{m_t}(z)}{1-z} \cdot (1 + \gamma t (1-z)) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1+\gamma t (1-z)}{1+(\sigma^2/2)\, m_t\, (1-z)} (1 + \delta(m_t)) = 1. \tag{21}$$

Из (19) — (21) мы получаем

$$1 - F(t, z) \leqslant \frac{1-z}{1+\gamma t (1-z)} (1 + \beta_1(t)) + (1-z)\, \alpha_1(t),$$

где $\alpha_1(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, $\beta_1(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ равномерно относительно z, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

По левому неравенству в (19) аналогичные рассуждения показывают, что

$$\frac{1-z}{1+\gamma t (1-z)} (1 + \beta_2(t)) - (1-z)\, \alpha_2(t) \leqslant 1 - F(t, z),$$

где $\alpha_2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, $\beta_2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ равномерно относительно z, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Из двух последних неравенств следует утверждение леммы 2.

Продолжим доказательство теоремы. По определению $f(t, v) = F(t, e^{-v})$. Поэтому, в силу леммы 2 и (18),

$$\ln \prod_{i=1}^{n-1} f^{\xi_i^h}\left((n-i)h, \frac{s}{\gamma t}\right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^h \frac{1 - e^{-s/(\gamma t)}}{1 + \gamma (n-i) h (1 - e^{-s/(\gamma t)})} (1 + \beta((n-i)h)) -$$

$$- \sum_{1}^{n-1} \xi_i^h \cdot (1 - e^{-s/(\gamma t)})\, \alpha((n-i)h) + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^h O\left(\left(\frac{s}{\gamma n h}\right)^2\right), \tag{22}$$

где $\alpha(nh) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\beta(nh) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Аналогично выводу (13) в теореме 1 мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^h \cdot \frac{1-e^{-s/(\gamma t)}}{1+\gamma(n-i)h(1-e^{-s/(\gamma t)})}(1+\beta((n-i)h)) \xrightarrow[t\to\infty]{P} \to \frac{\xi}{\gamma}\ln(1+s). \quad (23)$$

Пусть $\Theta(n)$ — целое число такое, что $1 \leqslant \Theta(n) \leqslant n - 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^h \cdot (1-e^{-s/(\gamma t)})\alpha((n-i)h) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^h \cdot \frac{s}{\gamma nh} \cdot \alpha((n-i)h) = \frac{s}{\gamma h}\left(\sum_{i=1}^{\Theta(n)} \xi_i^h \cdot \frac{1}{n} \cdot \alpha((n-i)h) + \sum_{i=\Theta(n)+1}^{n-1} \xi_i^h \cdot \frac{1}{n} \cdot \alpha((n-i)h)\right) < \frac{s}{\gamma h}\left(\frac{1}{n}\max_{1\leqslant i\leqslant \Theta(n)} \cdot |\alpha((n-i)h)| \sum_{i=1}^{\Theta(n)} \xi_i^h + \frac{C}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^h - \sum_{i=1}^{\Theta(n)}\xi_i^h\right)\right).$$

Выберем $\Theta(n)$ так, чтобы $\Theta(n)/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ и $n(1 - \Theta(n)/n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Тогда из последнего неравенства и условия (A′) следует

$$\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^h \cdot (1-e^{-s/(\gamma t)})\alpha((n-i)h) \xrightarrow[t\to\infty]{P} 0. \quad (24)$$

Для последовательности $\{\xi_i^h\}_{i\geqslant 1}$ выполнено условие (A). Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^h \cdot O((s/(\gamma nh)^2) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0. \quad (25)$$

В силу (22) — (25) мы получаем

$$\ln \prod_{i=1}^{n-1} f^{\xi_i^h}((n-i)h, s/(\gamma t)) \xrightarrow[t\to\infty]{P} -(\xi/\gamma)\ln(1+s). \quad (26)$$

Аналогично

$$\ln \prod_{i=1}^{n-1} f^{\xi_i^h}((n-i+2)h, s/(\gamma t)) \xrightarrow[t\to\infty]{P} -(\xi/\gamma)\ln(1+s). \quad (27)$$

Из условия (A′) и неравенства

$$t^{-1}\eta_n^h \leqslant (nh)^{-1}\sum_{i=1}^{n+1}(\xi_i^h - \xi h) - (nh)^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_i^h - \xi h) + 2n^{-1}\xi$$

следует, что

$$t^{-1}\cdot\eta_n^h \xrightarrow[t\to\infty]{\mathsf{P}} 0. \tag{28}$$

В силу (16), (17), (26) — (28)

$$\mathsf{P}\cdot\lim_{t\to\infty}\prod\nolimits_{\tau_i\leqslant t} f^{\xi_i}\left(t-\tau_i, \frac{s}{\gamma t}\right) = (1+s)^{-\xi/\gamma}. \tag{29}$$

Так как произведение $\Pi_{\tau_i\leqslant t} f^{\xi_i}(t-\tau_i, s/(\gamma t))$ равномерно ограничено, то из (15) и (29) следует

$$\lim_{t\to\infty}\Phi(t,s) = \mathsf{EP}\cdot\lim_{t\to\infty}\prod\nolimits_{\tau_i\leqslant t} f^{\xi_i}\left(t-\tau_i, \frac{s}{\gamma t}\right) =$$
$$= \mathsf{E}\left((1+s)^{-\xi/\gamma}\right) = \psi\left((1+s)^{-1/\gamma}\right),$$

что эквивалентно утверждению теоремы 2.

Авторы благодарят В. А. Ватутина за замечания, которые способствовали улучшению рукописи.

Институт математики
СО АН СССР

Поступило
3.XII.1979

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Athreya K. B., Ney P. E., Branching processes, Berlin, Springer-Verlag, 1972.

[2] Нагаев С. В., Предельная теорема для ветвящихся процессов с иммиграцией, Теория вероятн. и ее примен. 20, № 1 (1975), 178—180.

[3] Goldstein M. I., Critical age-dependent branching processes: single and multitype, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Geb., 17 (1971), 74—88.

[4] Севастьянов Б. А., Предельные теоремы для ветвящихся процессов с превращениями, зависящими от возраста частиц, Теория вероятн. и ее примен., 13, № 2 (1968), 241—265.

[5] Holte J. M., A generalization of Goldstein's comparison lemma and the exponential limit law in critical Crump-Mode-Jagers branching processes, Adv. Appl. Probab., 8, № 1 (1976), 88—104.

[6] Топчий В. А., Интегральная теорема для критических ветвящихся процессов Крампа-Мода-Ягерса с дискретным временем, Препр. Инст. Матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1977.

[7] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., «Наука», 1971.

[8] Durham S. D., Limiting distributions for the general branching process with immigration, J. Appl. Probab. 11 (1974), 809—813.

[9] Jagers P., Branching processes with biological applications, London, J. Wiley & Sons, 1975.

[10] Нагаев С. В., Переходные явления для зависящих от возраста ветвящихся процессов с дискретным временем. II., Сиб. матем. ж., 15, № 3 (1974), 570—579.