МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 34, № 2 (1983)

О ВЕРОЯТНОСТЯХ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. В. Нагаев

Пусть $\{X_k\}_1^n$ — независимые случайные величины со значениями в сепарабельном банаховом пространстве E, $S_k = \sum_1^k X_j$, $S = S_n, S^j = S - X_j$. Символ $|x|$ ($|f|$) будет означать норму $x \in E$ ($f \in E^*$), где E^* — сопряженное пространство. Положим $B^2 = \sum_1^n \mathsf{E}|X_j|^2$, $A_t = \sum_1^n \mathsf{E}|X_j|^t$.

Целью настоящей заметки является получение оценок снизу для $\mathsf{P}(|S| \geqslant u)$ и $\mathsf{E}|S|^t$.

Предложение. *Для любого* $\alpha > 0$

$$\mathsf{P}(|S| \geqslant u) = \sum_1^n (\inf \mathsf{P}(f(S^k) \geqslant (1-\alpha)u) - \\ - \sum_1^n \mathsf{P}(|X_j| \geqslant \alpha u)) \mathsf{P}(|X_k| \geqslant \alpha u), \qquad (1)$$

где нижняя грань берется по всем $f \in E^*$ *с* $|f| = 1$.

Доказательство. Очевидно,

$$[|S| \geqslant u] \supset \bigcup_1^n [|X_j| \geqslant \alpha u] \cap [|S| \geqslant u]. \qquad (2)$$

Далее,

$$[|x| \geqslant \alpha u] \cap [f_x(y) \geqslant (1-\alpha) u] \subset [f_x(x+y) \geqslant \\ \geqslant u] \cap [|x| \geqslant \alpha u] \subset [|x+y| \geqslant u] \cap [|x| \geqslant \alpha u], \qquad (3)$$

где f_x — линейный функционал, удовлетворяющий условиям $|f_x| = 1$, $f_x(x) = |x|$. Следовательно,

$$\int_{|x|\geqslant \alpha u} \mathsf{P}(f_x(S^k) \geqslant (1-\alpha)u, \max_{i<k}|X_i| < \alpha u) P_k(\mathrm{d}x) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}(|S| \geqslant u, |X_k| \geqslant \alpha u, \max_{i<k}|X_i| < \alpha u), \quad (4)$$

где P_k — распределение случайной величины X_k.

С другой стороны,

$$\mathsf{P}(f_x(S^k) \geqslant (1-\alpha)u, \max_{i<k}|X_i| < \alpha u) \geqslant$$
$$\geqslant \mathsf{P}(f_x(S^k) \geqslant (1-\alpha)u) - \sum_1^n \mathsf{P}(|X_j| \geqslant \alpha u). \quad (5)$$

Из (2), (4) и (5) следует (1).

Чтобы оценить $\mathsf{P}(f(S^k) \geqslant (1-\alpha)u)$ снизу, можно использовать различные вероятностные неравенства для одномерных случайных величин. Например, применяя неравенство Кантелли, мы получаем

Следствие. *Пусть* $\mathsf{E}X_j = 0, j = 1, \ldots, n$. *Тогда для всех* $\alpha > 1$

$$\mathsf{P}(|S| \geqslant u) \geqslant \left(1 - B^2u^{-2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{B^2u^{-2} + (\alpha-1)^2}\right)\right) \cdot$$
$$\cdot \sum_1^n \mathsf{P}(|X_j| \geqslant \alpha u). \quad (6)$$

В одномерном случае неравенства типа (6) получено в [1].

Если случайные величины X_j имеют симметричное распределение, то для всех f, k

$$\mathsf{P}(f(S^k) \geqslant 0, \max_{i<k}|X_i| < u) \geqslant \frac{1}{2}\mathsf{P}(\max_{i<k}|X_i| < u).$$

Полагая теперь в (1) и (4) $\alpha = 1$, мы приходим к неравенству

$$\mathsf{P}(|S| \geqslant u) \geqslant \frac{1}{2}\mathsf{P}(\max_i |X_i| \geqslant u). \quad (7)$$

Это неравенство получено в [2] (одномерный вариант см. в [3, стр. 188]).

Замечание. Метод, использованный нами при выводе (6), позволяет легко получить бесконечномерный вариант неравенства Леви

$$\mathsf{P}(M \geqslant u) \leqslant 2\mathsf{P}(|S| \geqslant u),$$

где $M = \max_k | S_k |$, а слагаемые X_j симметрично распределены (см. [4 — 6]). Действительно,
$[| S | \geqslant u] \supset \bigcup_1^n [| S_k | \geqslant u] \cap [M_{k-1} < u] \cap [| S | \geqslant u]$,
где $M_k = \max_{j \leqslant k} | S_j |$. Далее,

$$\mathsf{P}(| S | \geqslant u, | S_k | \geqslant u, M_{k-1} < u) =$$
$$= \int_{|x| \geqslant u} \mathsf{P}\left(\left| x + \sum_{k+1}^n X_j \right| \geqslant u\right) Q_j(u, dx) \geqslant$$
$$\geqslant \int_{|x| \geqslant u} \mathsf{P}\left(f_x\left(\sum_{k+1}^n X_j\right) \geqslant 0\right) Q_j(u, dx) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \mathsf{P}(M_{k-1} < u, | S_k | \geqslant u),$$

где $Q_j(u, B) = \mathsf{P}(M_{k-1} < u, | S_k | \in B)$. Мы использовали здесь (3) с $\alpha = 1$. Таким образом,

$$\mathsf{P}(| S | \geqslant u) \geqslant \frac{1}{2} \sum_1^n \mathsf{P}(M_{k-1} < u, | S_k | \geqslant u) = \frac{1}{2} \mathsf{P}(M \geqslant u). \tag{8}$$

Выведем теперь с помощью (6) оценку снизу для $\mathsf{E} | S |^t$, $t > 2$. Положим $\gamma = \mathsf{E} | S |^2/B^2$, $\gamma_0 = \min [\gamma^{t/2}, 2^{-5} t]$.

ТЕОРЕМА. *Если* $\mathsf{E}X_j = 0, j = 1, \ldots, n$, *то для всех* $t > 2$

$$\mathsf{E} | S |^t \geqslant \gamma_0 \max [2^{2-t} t^{-1} A_t, B^t]. \tag{9}$$

Доказательство. Положим для краткости $Q(u) = \mathsf{P}(| S | \geqslant u)$, $Q_j(u) = \mathsf{P}(| X_j | \geqslant u)$. Очевидно,

$$\mathsf{E} | S |^t = t \int_0^\infty u^{t-1} Q(u) du \geqslant t \int_B^\infty u^{t-1} Q(u) du. \tag{10}$$

Полагая в (6) $\alpha = 2$, получаем, что для всех $u \geqslant B$

$$Q(u) \geqslant \frac{1}{4} \sum_1^n Q_j(2u).$$

Следовательно,

$$\int_B^\infty u^{t-1} Q(u) du \geqslant 2^{-t-2} \sum_1^n \int_{2B}^\infty u^{t-1} Q_j(u) du. \tag{11}$$

Далее,

$$\int_{2B}^{\infty} u^{t-1} Q_j(u)\,\mathrm{d}u = t^{-1}\mathsf{E}\,|X_j|^t - \int_0^{2B} u^{t-1} Q_j(u)\,\mathrm{d}u. \tag{12}$$

Очевидно,

$$\int_0^{2B} u^{t-1} Q_j(u)\,\mathrm{d}u \leqslant (2B)^{t-2}\int_0^{\infty} u Q_j(u)\,\mathrm{d}u. \tag{13}$$

Из (10) — (13) следует

$$\mathsf{E}\,|S|^t \geqslant 2^{-t-2}A_t - 2^{-5}tB^t. \tag{14}$$

С другой стороны,

$$\mathsf{E}\,|S|^t \geqslant (\mathsf{E}\,|S|^2)^{t/2} = \gamma^{t/2}B^t. \tag{15}$$

Если $A_t \geqslant 2^{t-2}tB^t$, то ввиду (14)

$$\mathsf{E}\,|S|^t \geqslant A_t/2^{t+3} \geqslant \max\,[A_t/2^{t+3},\ tB^t/2^5].$$

Если $A_t \leqslant 2^{t-2}tB^t$, то вследствие (15)

$$\mathsf{E}\,|S|^t \geqslant \gamma^{t/2}\max\,[2^{2-t}t^{-1}A_t,\ B^t].$$

Из двух последних неравенств следует (9).

Если E имеет котип 2, то существует постоянная $c\,(E)$ такая, что

$$\gamma_0 \geqslant \min\,[c\,(E),\ 2^{-5}t].$$

В частности, если E — гильбертово пространство, то $c\,(E) = 1$ и, следовательно, $\gamma_0 = 2^{-5}t$.

Для сравнения приведем неравенство для одномерного случая, полученное в [7]:

$$\mathsf{E}\,|S|^t \geqslant \frac{1}{2^t}\max\,[A_t,\ B^t].$$

Это неравенство, между прочим, используется в [8] при изучении сумм независимых случайных величин со значениями в L_p, $p \geqslant 2$.

Верхние границы для $\mathsf{E}\,|S|^t$ выводятся в [9] и [10].

Институт математики
СО АН СССР

Поступило
26.X.1981

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Nagaev S. V., Large deviations of sums of independent random variables, Ann. Prob., 7, № 5 (1979), 745—789.

[2] D'Acosta A., Samur J. D., Infinitely divisible probability measures, Studia Math., 46, № 2 (1979), 143—160.

[3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., «Мир», 1967.

[4] Кахан Ж.-П., Случайные функциональные ряды, М., «Мир», 1973.

[5] Булдыгин В. В., О неравенстве Леви для случайных величин со значениями в банаховом пространстве, Теория вероятн. и ее примен., 19, № 1 (1974), 154—158.

[6] Булдыгин В. В., Сходимость случайных элементов в топологических пространствах, Киев, «Наукова думка», 1980.

[7] Rosenthal H. P., On the subspaces of L_p $(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables, Israel J. Math., 8, № 3 (1970), 273—303.

[8] Gine E., Mandrekar V., Zinn J., On sums of independent random variables with values in L_p $(2 \leqslant p < \infty)$, Lecture Notes in Math., 709, Berlin, Springer — Verlag, (1979), 111—124.

[9] Пинелис И. Ф., О распределении сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве, Теория вероятн. и ее примен., 23, № 2 (1978), 630—637.

[10] D'Acosta A., Inequalities for B-value random vectors with applications to the strong law of large numbers, Ann. Prob., 9, № 1 (1981), 157—161.