С. В. Нагаев

# ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

## § 1. Введение

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $V(x)$, причем $Vx_i < \infty$. Без ограничения общности можно считать, что $Mx_i = 0$ и $Vx_i = 1$.

Пусть класс $D_\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, функций комплексного переменного определяется следующим образом:
$f(z) \in D_\alpha$, если ее можно представить в форме

$$\begin{aligned} &cz^\alpha (1+\psi(z)) \quad \text{при} \quad \alpha < 1, \\ &cz \ln z (1+\psi(z)) \quad \text{при} \quad \alpha = 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\psi(z)$ — ветвь многозначной функции, имеющей точку разветвления в 0, причем $\psi(z)$ аналитична в некотором круге $|z| \leqslant A$, из которого удален отрезок $[0, A]$ и $\lim\limits_{z \to 0} \psi(z) = 0$ (для $z^\alpha$ и $\ln z$ выбираются главные ветви).

Пусть $s$ и $p$ — целые неотрицательные числа.

Мы скажем, что функция распределения $F(x)$ принадлежит классу $D^{sp}_{\alpha\beta}$, если

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{itx} dF(x) = \sum_{k=0}^{s} \beta_k^+ (it)^k + \varphi_\alpha^+ (it)(it)^s, \\ &\int_{-\infty}^0 e^{itx} dF(x) = \sum_{k=0}^{p} \beta_k^- (it)^k + \varphi_\beta^- (-it)(it)^p, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\varphi_\alpha^+(z) \in D_\alpha$ и $\varphi_\beta^-(z) \in D_\beta$, причем

$$\frac{d^s}{dz^s} z^{-\alpha} \varphi_\alpha^+ (z) = o(|z|^{-s}) \quad \text{и} \quad \frac{d^p}{dz^p} z^{-\beta} \varphi_\beta^- (z) = o(|z|^{-p})$$

$F(x) \in D^{sp}_{\alpha\beta}$, например, если

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{|x|^{p+\beta}}, & x < -1, \\ c, & |x| \leqslant 1, \\ 1 - \dfrac{1-c}{x^{s+\alpha}}, & x > 1, \end{cases} \tag{3}$$

где $0 < c < 1$ — некоторая постоянная. Заметим, что если $F(x) \in D^{sp}_{\alpha\beta}$, то условие (А) Крамера [1], которое фигурирует и в работе Рихтера [2], заведомо не выполняется, поскольку из него следует аналитичность функции $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{zx} dF(x)$ в некоторой полосе $|\operatorname{Re} z| < \delta$.

**Теорема 1.** *Пусть $V(x) \in D_{\alpha\beta}^{sp}$, $s \geqslant 2$, $p \geqslant 2$ и существует $n_0$ такое, что функция распределения суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n_0}$ абсолютно непрерывна и ее производная ограничена.*

*Тогда*

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + o(1)) + \\ + \frac{\Gamma(s+\alpha+1) \operatorname{Im} [c^+ (1 - e^{2\pi i \alpha})]}{2\pi n^{\frac{s+\alpha-2}{2}} x^{s+\alpha+1}} (1 + o(1)) \tag{4}$$

*при* $\alpha < 1$,

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + o(1)) - \frac{\Gamma(s+2) \operatorname{Re} c^+}{n^{\frac{s-1}{2}} x^{s+3}} (1 + o(1)) \tag{5}$$

*при* $\alpha = 1$, *если* $\alpha + s \leqslant \beta + p$ *и* $x \to \infty$, $x = o(\sqrt{n})$ *и*

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + o(1)) + \\ + \frac{\Gamma(p+\beta+1) \operatorname{Im} [c^- (1 - e^{2\pi i \beta})]}{2\pi n^{\frac{p+\beta-2}{2}} |x|^{p+\beta+1}} (1 + o(1)) \tag{6}$$

*при* $\beta < 1$,

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + o(1)) - \frac{\Gamma(p+2) \operatorname{Re} c^-}{n^{\frac{p-1}{2}} |x|^{p+3}} (1 + o(1)), \tag{7}$$

*при* $\beta = 1$, *если* $x \to -\infty$, $|x| = o(\sqrt{n})$ *и* $\beta + p \leqslant \alpha + s$. *Здесь* $p_n(x)$ — *плотность случайной величины*; $z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} x_i$, $c^+$ *и* $c^-$ — *постоянные в представлении* (1) *для* $\varphi_\alpha^+(z)$ *и* $\varphi_\beta^-(z)$.

**Теорема 2.** *Пусть случайные величины $x_i$ имеют решетчатое распределение с максимальным шагом $h$ и*

$$V(x) \in D_{\alpha\beta}^{sp}, \quad s \geqslant 2, \quad p \geqslant 2.$$

*Тогда*

$$\frac{\sqrt{n}}{h} P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + o(1)) - \\ - \frac{\Gamma(s+\alpha+1) \operatorname{Im} [c^+ (1 - e^{2\pi i \alpha})]}{2\pi n^{\frac{s+\alpha-2}{2}} x_{nk}^{s+\alpha+1}} (1 + o(1)) \tag{8}$$

*при* $\alpha < 1$,

$$\frac{\sqrt{n}}{h} P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}} (1 + o(1)) - \frac{\Gamma(s+2) \operatorname{Re} c^+}{n^{\frac{s-1}{2}} x_{nk}^{s+3}} (1 + o(1)) \tag{9}$$

*при* $\alpha = 1$, *если* $\alpha + s \leqslant \beta + p$ *и* $x \to \infty$, $x = o(\sqrt{n})$, и

$$\frac{\sqrt{n}}{h} P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}} (1 + o(1)) +$$
$$+ \frac{\Gamma(p+\beta+1) \operatorname{Im}[c^-(1-e^{2\pi i\alpha})]}{2\pi n^{\frac{p+\beta-2}{2}} |x_{nk}|^{p+\beta+2}} (1 + o(1)) \tag{10}$$

*при* $\beta < 1$,

$$\frac{\sqrt{n}}{h} P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}} (1 + o(1)) - \frac{\Gamma(p+2) \operatorname{Re} c^-}{n^{\frac{p-1}{2}} |x_{nk}|^{p+3}} (1 + o(1)) \tag{11}$$

*при* $\beta = 1$, *если* $x \to -\infty$, $x = o(\sqrt{n})$, $\alpha + s > \beta + p$, *где*

$$P_n(k) = \Pr\left(\sum_1^n x_i = an + kh\right),$$
$$x_{nk} = \frac{an + kh}{\sqrt{n}}.$$

Доказательства теорем 1 и 2 аналогичны. Поэтому мы приведем лишь доказательство теоремы 1.

## § 2. Доказательство теоремы 1

Обозначим через $f^+(z)$ и $f^-(z)$ соответственно

$$\sum_{k=0}^{s} \beta_k^+ z^k + \varphi_\alpha^+(z) z^s \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{p} \beta_k^- z^k + \varphi_\beta^-(z) z^p.$$

Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — ветви функции $f^+(z) + f^-(z)$, совпадающие с $f(t)$ соответственно при $z = it$, $t > 0$, и $z = it$, $t < 0$, где

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dV(x).$$

Обозначим через $K_i(z)$ $\ln f_i(z)$, $i = 1, 2$, беря в качестве логарифма его главное значение.

Пусть $s + \alpha = p + \beta$. Нетрудно видеть, что тогда

$$K_i(z) = \frac{z^2}{2} + \sum_{k=3}^{s} \frac{\gamma_k}{k!} z^s + \varphi_i(z) z^s \tag{12}$$

в некотором круге $|z| \leqslant a$.

Здесь $\gamma_k$ — семиинварианты случайной величины $x_i$,

$$\varphi_i(z) = \left(f_i(z) - \sum_{k=0}^{s} (B_k^+ + B_k^-) z^k\right)(1 + \chi_i(z)),$$

где $\chi_i(z)$ — ветвь некоторой многозначной функции с точкой разветвления в 0, аналитическая в круге $|z| \leqslant a$, из которого удален отрезок $[0, a]$, если $i = 1$, и отрезок $[-a, 0]$, если $i = 2$, причем

$$\chi_i^{(s)}(z) = o(|z|^{-s}). \tag{13}$$

Рассмотрим функцию $w = \tau z - K_1(z)$, $\tau > 0$. Последняя аналитична и однолистна в некотором секторе

$$|z| \leqslant r(\tau), \quad |\arg z| \leqslant \frac{3}{4}\pi.$$

В самом деле $w(z)$ аналитична в секторе $|z| \leqslant A$, $|\arg z| \leqslant \frac{3}{4}\pi$. Далее,

$$w(z_1) - w(z_2) = \tau(z_1 - z_2) - \frac{z_1^2 - z_2^2}{2} - \\ - \sum_{k=3}^{s} \frac{\gamma_k}{k!}\left(z_1^k - z_2^k\right) + \int_L \frac{d}{dz}\left[\varphi_1(z) z^s\right] dz, \tag{14}$$

где интеграл берется по контуру, лежащему в области $|z| \leqslant A$, $|\arg z| \leqslant \frac{3}{4}\pi$ и соединяющему точки $z_1$ и $z_2$.

Очевидно, всегда можно выбрать $L$ таким образом, что длина его не превосходит $\sqrt{2}|z_2 - z_1|$ и

$$\max_{z \in L} |z| = \max(|z_1|, |z_2|).$$

Следовательно,

$$w(z_1) - w(z_2) = (z_1 - z_2)\left(\tau - \frac{z_1 + z_2}{2} - \\ - \sum_{k=3}^{s} \frac{\gamma_k}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} z_1^l z_2^{k-l-1} + c(z_1 z_2) \max{}^{s-1}(|z_1|, |z_2|)\right), \tag{15}$$

где $c(z_1, z_2) \to 0$ при $\max(|z_1|, |z_2|) \to 0$.

Из (15) вытекает, что для достаточно малых $\tau$ можно положить

$$r(\tau) = (1 - \varepsilon)\tau, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{16}$$

Используя (12) нетрудно показать, что при отображении посредством $w(z)$ образ окружности $|z| = \tau(1 - \varepsilon)$ для достаточно малых $\tau$ лежит вне круга $|w| \leqslant \frac{\tau^2}{2}(1 - 2\varepsilon)$.

Если $|\arg z| = \frac{3}{4}\pi$ и $|z| \leqslant \tau(1 - \varepsilon)$, то при достаточно малых $\tau$

$$\operatorname{Re} w = -\frac{\tau|z|}{\sqrt{2}} - \operatorname{Re} K_1(z) < 0. \tag{17}$$

Следовательно, образ контура, ограничивающего область однолистности функции $w(z)$, охватывает полукруг $\frac{1}{1-2\varepsilon}|w| \leqslant \frac{\tau^2}{2}$, $\operatorname{Re} w \geqslant 0$ и, таким образом, последний целиком содержится в области определения функции $z(w)$, обратной $w(z)$.

Очевидно,

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\tau - K_1'(z)},$$

$$\frac{d^2z}{dw^2} = \frac{K_1''(z)}{\left[\tau - K_1'(z)\right]^2} \frac{dz}{dw}. \tag{18}$$

Поскольку существуют

$$\lim_{w \to 0} \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\tau}$$

и

$$\lim_{w \to 0} \frac{d^2z}{dw^2} = \frac{1}{\tau^3}, \tag{19}$$

то

$$z(w)=\frac{w}{\tau}+o\left(\frac{w^2}{\tau^3}\right). \tag{20}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\mathrm{Im}\,[\tau z-K_1(z)]=0 \tag{21}$$

в области однолистности функции $w(z)$. Очевидно, решение этого уравнения можно записать в форме

$$z=z(t), \tag{22}$$

где $t\geqslant 0$ ($z(t)$ — функция, обратная $w(z)$).

Пусть $z_1$ — точка пересечения кривой (21) с окружностью $|z|=\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\tau$; $z_2$ — решение уравнения

$$K_1'(z)=\tau. \tag{23}$$

Нетрудно видеть, что

$$z_2=\tau+\sum_{k=2}^{s}\frac{c_k}{k!}\tau^k+\psi(\tau)\tau^s, \tag{24}$$

где

$$c_k=\lim_{\tau\to 0+}\frac{d^k K_1'^{-1}(\tau)}{d\tau^k},\quad \mathrm{Im}\,c_k=0$$

и

$$\lim_{\tau\to 0+}\psi(\tau)=0. \tag{25}$$

Здесь $K_1'^{-1}(u)$ — функция, обратная $K_1'(z)$. Как и $z(w)$, $K_1'^{-1}(u)$ аналитична в некотором полукруге $|u|<a_1$, $\mathrm{Re}\,u\geqslant 0$, однако в отличие от $z(w)$ $a_1$ не зависит от $\tau$. Существование пределов (25) следует из (13).

Обозначим $z_3$, $z_4$, $z_5$ соответственно точку пересечения прямых $\mathrm{Im}\,z=\mathrm{Im}\,z_1$ и $\mathrm{Re}\,z=\mathrm{Re}\,z_2$, точку пересечения прямой $\mathrm{Re}\,z=\mathrm{Re}\,z_2$ и окружности $|z|=a$ и точку пересечения прямых $\mathrm{Im}\,z=\mathrm{Im}\,z_4$ и $\mathrm{Re}\,z=0$.

Пусть $C$ — контур, состоящий из кривой $\mathrm{Im}\,[\tau z-K_1(z)]=0$, $|z|<\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\tau$ и отрезков $[z_1, z_3]$, $[z_3, z_4]$, $[z_4, z_5]$.

Для всех $n\geqslant 2n_0$ ([2], стр. 219)

$$p_n(x)=\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f^n(t)\,e^{-i\sqrt{n}tx}\,dt. \tag{26}$$

Очевидно,

$$i\int_0^{\infty}f^n(t)e^{-i\sqrt{n}tx}\,dt=\int_C e^{n(K_1(z)-\tau z)}\,dz+i\int_{-iz_5}^{\infty}f^n(t)\,e^{-i\sqrt{n}tx}\,dt, \tag{27}$$

где $\tau=\frac{x}{\sqrt{n}}$. В условиях теоремы $\tau\to 0$.

Пусть $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$, $I_5$ — интегралы от функции $e^{n(K_1(z)-\tau z)}$ соответственно по кривой $\mathrm{Im}(\tau z-K_1(z))=0$ и отрезкам $[z_1, z_3]$, $[z_3, z_2]$, $[z_2, z_4]$ и $[z_4, z_5]$.

Легко, видеть, что

$$I_1=\int_0^{t_1}e^{-nt}z'(t)\,dt, \tag{28}$$

где $t_1=w(z_1)$.

В силу (18)

$$\operatorname{Im} z'(t) = \frac{\operatorname{Im} z(t) + \sum\limits_{k=3}^{s} \frac{\gamma_k}{(k-1)!} \operatorname{Im} z^{k-1}(t) + s \operatorname{Im}\left[z^{s-1}(t)\,\varphi_1(z(t))\right] + \operatorname{Im}\left[z^s(t)\,\varphi_1'(z(t))\right]}{\left|\tau - K_1'(z(t))\right|^2}. \tag{29}$$

Далее,

$$|\operatorname{Im} z^k| < 2^{k-1} |z|^{k-1} |\operatorname{Im} z|, \tag{30}$$

$$\frac{1}{|\tau - K_1'(z(t))|^2} = \frac{1}{\tau^2}\left(1 + O\left(\frac{|z|}{\tau}\right)\right). \tag{31}$$

Из (21) и (22) находим

$$\operatorname{Im} z(t) = \frac{\operatorname{Im}[z^s(t)\,\varphi_1(z(t))]}{\tau - \frac{1}{\operatorname{Im} z(t)}\left[\frac{1}{2}\operatorname{Im} z^2(t) + \sum\limits_{k=3}^{s} \frac{\gamma_k}{k!}\operatorname{Im} z^k(t)\right]}. \tag{32}$$

Отсюда, принимая во внимание (30), получаем, что при достаточно малых $\tau$

$$|\operatorname{Im} z(t)| < \frac{2{,}5}{\varepsilon\tau} |\operatorname{Im}[z^s(t)\,\varphi_1(z(t))]|. \tag{33}$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im} z'(t) = \frac{s}{\tau^2}\operatorname{Im}[z^{s-1}(t)\,\varphi_1(z(t))] + \\ + \frac{1}{\tau^2}\operatorname{Im}[z^s(t)\,\varphi_1'(z(t))] + O\left(\frac{|z^s(t)\,\varphi_1(z(t))|}{\tau^3}\right). \tag{34}$$

Далее,

$$\operatorname{Im}[z^{s-1}\varphi_1(z)] = \operatorname{Re} z^{s-1}\operatorname{Im}\varphi_1(z) + \operatorname{Re}\varphi_1(z)\operatorname{Im} z^{s-1}, \\ \operatorname{Im}[z^s\varphi_1'(z)] = \operatorname{Re} z^s \operatorname{Im}\varphi_1'(z) + \operatorname{Re}\varphi_1'(z)\operatorname{Im} z^s. \tag{35}$$

Вследствие (20)

$$\operatorname{Re} z^{s-1}(t) = \frac{t^{s-1}}{\tau^{s-1}} + O\left(\frac{t^s}{\tau^{s+1}}\right), \tag{36}$$

$$\operatorname{Im}\varphi_1(z(t)) = \operatorname{Im}\varphi_1\left(\frac{t}{\tau}\right) + O\left(\frac{t^{1+\alpha}}{\tau^{2+\alpha}}\right). \tag{37}$$

В силу (30) и (33)

$$|\operatorname{Im} z^{s-1}(t)| < \frac{2^{s+1}}{\varepsilon\tau} |z(t)|^{2s-1} |\varphi_1(z(t))|. \tag{38}$$

Очевидно,

$$\operatorname{Im}\varphi_1\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{t^\alpha}{\tau^\alpha}\operatorname{Im}(c^+ + c_1^-) + o\left(\frac{t^\alpha}{\tau^\alpha}\right), \quad c_1^- = c^- e^{\pi i\alpha}, \\ \operatorname{Im}\varphi_1'\left(\frac{t}{\tau}\right) = \alpha\frac{t^{\alpha-1}}{\tau^{\alpha-1}}\operatorname{Im}(c^+ + c_1^-) + o\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\tau^{\alpha-1}}\right), \tag{39}$$

$$\varphi_1(z(t)) = O\left(\frac{t^\alpha}{\tau^\alpha}\right). \tag{40}$$

Из (34) — (40) следует

$$\operatorname{Im} z'(t) + (s+\alpha)\frac{t^{s+\alpha-1}}{\tau^{s+\alpha+1}}\operatorname{Im}(c^+ + c_1^-) + \\ + o\left(\frac{t^{s+\alpha-1}}{\tau^{s+\alpha+1}}\right) + O\left(\frac{t^{s+\alpha}}{\tau^{s+\alpha+3}}\right). \tag{41}$$

Очевидно, $t_1 > \frac{\tau^2}{2}(1-\varepsilon)$ для достаточно малых $\tau$ и, следовательно, $nt_1 \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$\frac{1}{\tau^{s+\alpha+1}} \int_0^{t_1} t^{s+\alpha-1} e^{-nt} dt = \frac{\Gamma(s+\alpha)}{n^{\frac{s+\alpha-1}{2}} x^{s+\alpha+3}} (1+o(1)),$$
$$\frac{1}{\tau^{s+\alpha+3}} \int_0^{t_1} t^{s+\alpha} e^{-nt} dt = \frac{\Gamma(s+\alpha+1)}{n^{\frac{s+\alpha-1}{2}} x^{s+\alpha+3}} (1+o(1)). \tag{42}$$

Из (28), (41) и (42) заключаем, что

$$\operatorname{Im} I_1 = \frac{\Gamma(s+\alpha+1) \operatorname{Im}\left(c^{+} + c_{\Gamma}^{-}\right)}{n^{\frac{s+\alpha-1}{2}} x^{s+\alpha+1}} (1+o(1)). \tag{43}$$

Рассмотрим теперь $I_2$. На отрезке $[z_1, z_3]$ при достаточно малых $\tau$

$$\operatorname{Re}(\tau z - K_1(z)) > \frac{\tau^2}{2}(1-\varepsilon),$$
$$|\operatorname{Im}(\tau z - K_1(z))| < \tau |\operatorname{Im} z_1|. \tag{44}$$

В силу (33) при достаточно малых $\tau$

$$|\operatorname{Im} z_1| < \tau^{s-1+\frac{\alpha}{2}}, \tag{45}$$

и, следовательно,

$$|\operatorname{Im} I_2| < n\tau^{s+1+\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{n\tau^2}{2}(1-\varepsilon)}. \tag{46}$$

Если

$$\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{n\tau^2}{2}(1-\varepsilon)} \geqslant \frac{1}{n^{\frac{s+\alpha-1}{2}} x^{s+\alpha+1}}, \tag{47}$$

то при достаточно больших $nx < n^{\delta}$, где $\delta$ сколь угодно мало, и

$$|\operatorname{Im} I_2| \leqslant \frac{x^{s+\frac{\alpha}{2}+1} \left[n^{\frac{s+\alpha-2}{2}} x^{s+\alpha+1}\right]^{\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}}}{n^{\frac{s-1}{2}+\frac{\alpha}{4}}} e^{-\frac{n\tau^2(1+\varepsilon)}{2}}. \tag{48}$$

Можно выбрать $\varepsilon$ так, что для $x$, удовлетворяющих (47)

$$|\operatorname{Im} I_2| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}(1+\varepsilon)}\right). \tag{49}$$

Если же

$$\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{n\tau^2}{2}(1-\varepsilon)} < \frac{1}{n^{\frac{s+\alpha-1}{2}} x^{s+\alpha+1}},$$

то в силу (46)

$$\operatorname{Im} I_2 = o(|\operatorname{Im} I_1|). \tag{50}$$

Так как $f^{2n_0}(t)$ является характеристической функцией абсолютно непрерывного распределения, то

$$\lim_{t\to\infty} f^{2n_0}(t) = 0,$$

и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha_1 > 0$, что при $|t| \geqslant \varepsilon$

$$|f^n(t)| < e^{-\alpha_1 n}. \tag{51}$$

Вследствие непрерывности $f_1(z)$ в верхней полуплоскости отсюда следует существование такого $\eta > 0$, что при $|z| < A$, $|\operatorname{Re} z| < \eta$ и $\operatorname{Im} z \geqslant \varepsilon$

$$|f^n(z)| < e^{-\alpha_2 n}, \tag{52}$$

где $\alpha_1 > 0$ — некоторая постоянная.

Используя (52), нетрудно показать, что (ср. [2], стр. 221)

$$I_4 = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\, i e^{n(K(z_2)-\tau z_2)}(1 + o(1)). \tag{53}$$

В силу (25) можно выбрать $\delta_1$ таким образом, что при $x \leqslant n^{\delta_1}$

$$I_4 = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\, i e^{-\frac{x^2}{2}}(1 + o(1)). \tag{54}$$

С другой стороны, при $x > n^{\delta_1}$, очевидно,

$$I_4 = o(|\operatorname{Im} I_1|). \tag{55}$$

Далее, при достаточно малых $\tau$

$$|I_3| < \left| e^{n(K(z_2)-\tau z_2)} \int\limits_{\operatorname{Im} z_3}^{\operatorname{Im} z_2} e^{-\frac{nt^2}{4}} dt \right|. \tag{56}$$

В силу (24) и (33) можно выбрать $\delta_2$ так, что при $x \leqslant n^{\delta_2}$

$$\sqrt{n} \operatorname{Im} z_2 \to 0$$

и

$$\sqrt{n} \operatorname{Im} z_3 \to 0,$$

и, следовательно,

$$I_3 = o(|I_4|). \tag{57}$$

Очевидно,

$$I_3 = o(|\operatorname{Im} I_1|) \tag{58}$$

для $x \geqslant n^{\delta_2}$.

В силу (53)

$$I_5 = o(|I_4|),$$

$$\int\limits_{-iz_5}^{\infty} f^n(t) e^{-i\sqrt{n}tx} dt = o(|I_4|). \tag{59}$$

Сопоставляя полученные для $I_1 - I_5$ оценки, находим окончательно, что

$$\operatorname{Re} \int\limits_0^{\infty} f^n(t) e^{-i\sqrt{n}tx} dt = \frac{\operatorname{Im}\left(c^+ + c_1^-\right)\Gamma(s+\alpha+1)}{n^{\frac{s+\alpha-1}{2}} x^{s+\alpha+1}} \times$$

$$\times (1 + o(1)) + \sqrt{\frac{\pi}{2n}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1 + o(1)) \tag{60}$$

для $x \to \infty$, $x = o(\sqrt{n})$.

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{0} f^n(t)\,e^{-i\sqrt{n}tx}\,dx=$$

$$=-\frac{\mathrm{Im}\left(c^+e^{2\pi i\alpha}+c_1^-\right)\Gamma(s+\alpha+1)}{n^{\frac{s+\alpha-1}{2}}\,x^{s+\alpha+1}}(1+o(1))+\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}(1+o(1)) \qquad (61)$$

при $x\to\infty$, $x=o(\sqrt{n})$.

Из (26) и (61) следует утверждение теоремы для случая $s+\alpha=$ $=p+\beta$, $\alpha<1$, $\beta<1$ и $x\to\infty$.

В остальных случаях доказательство вполне аналогично.


## Summary

The paper contains two local limit theorems for large deviations. Random variables are supposed to be mutually independent and to have a common distribution function which belongs to a certain family of distributions satisfying the Cramer's condition:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy}dV(y)<\infty$$

for $|h|<A$ (see [1]).


ЛИТЕРАТУРА


1. H. Gramer. Sur un nouveau théorème limité de la théorie des probabilités. Actuel sci. et ind., n⁰ 736. Paris, 1938 (УМН, X, 166—178, 1944).
2. В. Рихтер. Локальные предельные теоремы для больших уклонений. Теория вероятн. и ее применение. 11, 3, 214—229, 1957.
3. H. E. Daniels. Saddlepoint approximations in statistics. Ann. math. statist., 25, 631—650, 1954.