ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Том 50 **И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ** Выпуск 3

2005

НАГАЕВ С. В., ВАХТЕЛЬ В. И.***

О ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ КРИТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА[1)]

В работе приводится доказательство локальной предельной теоремы для критического процесса Гальтона–Ватсона при минимальных моментных ограничениях, т.е. при условии существования конечного второго момента числа прямых потомков отдельной особи.

Ключевые слова и фразы: процесс Гальтона–Ватсона, процесс Беллмана–Харриса, функция концентрации, локальная теорема, дробно-линейная производящая функция.

1. Введение. Пусть Z_n процесс Гальтона–Ватсона. Всюду, если не оговорено противное, предполагается, что $Z_0 = 1$. Положим $p_k = \mathbf{P}\{Z_1 = k\}$, $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$. Мы будем рассматривать только критический случай, т.е. $f'(1) = 1$. Предположим, что у величины Z_1 существует конечный второй момент, и обозначим $B = f''(1) = \mathbf{D}Z_1$. Положим $d =$ н.о.д.$\{k\colon p_k > 0\}$. Через $f_k(s)$ будем обозначать k-ю итерацию функции $f(s)$. Очевидно, $f_k(s)$ является производящей функцией Z_k.

Основной целью настоящей работы является вывод локальной предельной теоремы для процесса Гальтона–Ватсона при минимальных моментных ограничениях, т.е. при существовании лишь второго момента у числа прямых потомков одной особи.

Первая работа, в которой доказываются локальные теоремы для ветвящихся процессов, принадлежит, по-видимому, В. М. Золотареву [1]. В этой работе исследуется асимптотическое поведение $\mathbf{P}\{Z_t = k\}$ при фиксированном k для марковского ветвящегося процесса с непрерывным временем. Для процесса Гальтона–Ватсона этот вопрос изучался в [2], а для критических процессов Беллмана–Харриса в работе В. А. Ватутина [3].

* Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev@math.nsc.ru

** Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstr. 39, D-10117 Berlin, Germany; e-mail: vakhtel@wias-berlin.de

1) Первый автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (проект 02-01-01252) и INTAS (проект 99-01317); второй автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 02-01-01252, 02-01-00358) и INTAS (проект 00-265).

В предположении о существовании четвертого момента числа прямых потомков В. П. Чистяков [4] вывел асимптотику $\mathbf{P}\{Z_t = k\}$ при $t, k \to \infty$ для марковского ветвящегося процесса с непрерывным временем. В [4] также упоминается, что для дискретного времени аналогичный результат получен Н. В. Смирновым. Однако с момента появления работы В. П. Чистякова ни формулировка, ни доказательство не были опубликованы. В совместной работе Г. Кестена, П. Нея и Ф. Спицера [2] формулируется следующий результат: если k и n стремятся к бесконечности так, что их отношение остается ограниченным, то

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \exp\left(\frac{2kd}{Bn}\right) \mathbf{P}\{Z_n = kd\} = \frac{4d}{B^2}. \tag{1.1}$$

Авторы работы [2] указывают, что это соотношение верно без каких-либо избыточных моментных ограничений, т.е. достаточно лишь выполнения условия $B < \infty$, но доказательство (1.1) было ими проведено при более ограничительном условии

$$\mathbf{E} Z_1^2 \ln(1 + Z_1) < \infty. \tag{1.2}$$

Они также отмечают, что это предположение делается ради простоты изложения. Однако в монографии К. В. Атрейя и П. Нея [5] говорится, что к моменту выхода книги доказательство локальной предельной теоремы без условия (1.2) нигде не опубликовано.

Почти одновременно с [2] появилась работа С. В. Нагаева и Р. Мухамедхановой [6], в которой при условии существования четвертого момента случайной величины Z_1 доказывается равенство

$$\frac{B^2 n^2}{4} \mathbf{P}\{Z_n = k\} = \exp\left(-\frac{2k}{Bn}\right) + \alpha_{kn} + O(k^{-1} \ln n), \tag{1.3}$$

где $\alpha_{kn} \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по всем k. Из этой формулы можно вывести (1.1), только если $k^{-1} \ln n$ стремится к нулю. С другой стороны, из (1.3) следует, что соотношение (1.1) будет оставаться верным, если k/n стремится к бесконечности достаточно медленно.

Для критических процессов Беллмана–Харриса с дискретным временем В. А. Топчий [7] доказал аналог (1.1). В этой работе предполагается, что для вложенного процесса Гальтона–Ватсона выполнено (1.2).

Сформулируем теперь результаты, доказываемые в настоящей работе.

Теорема. *Если $B < \infty$, а k и n стремятся к бесконечности так, что отношение k/n остается ограниченным, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B^2 n^2}{4d} \left(1 + \frac{2d}{Bn}\right)^{k+1} \mathbf{P}\{Z_n = kd\} = 1. \tag{1.4}$$

Очевидно, что, заменяя в левой части этого соотношения множитель $(1+2d/(Bn))^k$ на эквивалентное выражение $\exp(2kd/(Bn))$, мы получим в точности (1.1). Причина именно такой формулировки состоит в том, что мы приближаем распределение процесса Z_n геометрическим распределением с параметром $2/(Bn)$ вместо экспоненциального. Такой подход представляется более естественным, так как в этом случае оба распределения сосредоточены на множестве целых неотрицательных чисел. Кроме того, аппроксимация геометрическим распределением является, вообще говоря, более точной. Так, например, для критического процесса с дробно-линейной производящей функцией

$$\mathbf{P}\{Z_n = k\} = \frac{4}{B^2n^2}\Big(1+\frac{2}{Bn}\Big)^{-k-1}$$

при любом $k \geqslant 1$. Тем самым (1.4) выполняется для всех k, а соотношение (1.1) — только при $k = o(n^2)$.

Доказательство теоремы основывается на следующем утверждении, которое представляет и самостоятельный интерес.

Предложение. *Если* $B < \infty$, *то существует константа* $C = C(f)$ *такая, что*

$$\sup_{n,k\geqslant 1} n^2\mathbf{P}\{Z_n = k\} \leqslant C. \tag{1.5}$$

Наш подход к доказательству локальной предельной теоремы существенно отличается от подхода, использовавшегося Г. Кестеном, П. Неем и Ф. Спицером, хотя некоторые их результаты нами используются.

В работе [2] показано, что в случае $d > 1$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{Z_n = kd\} = \frac{1}{d}\,\mathbf{P}\{Z_n^* = k\} + O(n^{-3}), \tag{1.6}$$

где Z_n^* — вспомогательный процесс Гальтона–Ватсона с производящей функцией числа прямых потомков $[f(s^{1/d})]^d$. Из равенства (1.6) следует, что достаточно доказать теорему и предложение при $d = 1$. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что $d = 1$.

Символами $c, c_1, c_2, \ldots$ будем обозначать постоянные, которые зависят лишь от распределения $\{p_k\}$. Так как остаточный член в (1.4) в данной статье не оценивается, то форма зависимости постоянных от $\{p_k\}$ не имеет значения. В связи с этим нижний индекс у констант будет появляться только в тех случаях, когда его отсутствие может привести к недоразумениям.

Для любой аналитической в нуле функции $\rho(s)$ символом $a_l[\rho(s)]$ будем обозначать коэффициент при s^l в разложении Тейлора этой функции в окрестности нуля. Положим $\|\rho(s)\|_1 = \sum_{l=0}^{\infty} |a_l[\rho(s)]|$.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Существует константа c такая, что для всех n, $k \geqslant 1$*

$$\mathbf{P}\{1 \leqslant Z_n \leqslant k\} \leqslant c\,\frac{k}{n^2}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Для любого $s \in (0,1)$ имеем

$$s^k\mathbf{P}\{1 \leqslant Z_n \leqslant k\} \leqslant \sum_{i=1}^{k}\mathbf{P}\{Z_n = i\}\,s^i \leqslant \mathbf{E}\{s^{Z_n};\, Z_n > 0\} = f_n(s) - f_n(0).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{1 \leqslant Z_n \leqslant k\} \leqslant s^{-k}(f_n(s) - f_n(0)).$$

Полагая в этом неравенстве $s = f_k(0)$, получаем

$$\mathbf{P}\{1 \leqslant Z_n \leqslant k\} \leqslant (f_k(0))^{-k}(f_{n+k}(0) - f_n(0)). \tag{2.2}$$

Известно (см., например, [2, с. 582]), что в случае конечного второго момента справедливо соотношение

$$Q_k := \mathbf{P}\{Z_k > 0\} = 1 - f_k(0) = \frac{2}{Bk}(1 + o(1)). \tag{2.3}$$

Из (2.3) вытекает существование константы c такой, что

$$1 - f_k(0) \leqslant \frac{c}{k} \tag{2.4}$$

для всех $k \geqslant 1$. Таким образом,

$$(f_k(0))^{-k} \leqslant \left(1 - \frac{c}{k}\right)^{-k} < c_1. \tag{2.5}$$

Так как $f_k''(s)$ возрастает по s, то

$$f_k(s) - s = f_k(s) - 1 - f_k'(1)(s-1) < \frac{f_k''(1)}{2}(1-s)^2 = \frac{Bk}{2}(1-s)^2.$$

Полагая в этом неравенстве $s = f_n(0)$ и используя оценку (2.4), заключаем, что

$$f_{n+k}(0) - f_n(0) \leqslant \frac{Bk}{2}(1 - f_n(0))^2 \leqslant c\,\frac{k}{n^2}. \tag{2.6}$$

Комбинируя (2.2), (2.5) и (2.6), приходим к требуемому неравенству. Лемма 1 доказана.

Используя тождество $a = b - ab(a^{-1} - b^{-1})$, получаем следующее представление:

$$1 - f_n(s) = \left(\frac{1}{1-s} + \frac{Bn}{2}\right)^{-1} - h_n(s)\, g_n(s), \tag{2.7}$$

где

$$h_n(s) = \frac{1}{1 - f_n(s)} - \frac{1}{1-s} - \frac{Bn}{2},$$

$$g_n(s) = (1 - f_n(s))\left(\frac{1}{1-s} + \frac{Bn}{2}\right)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} g_{n,i} s^i.$$

Положим

$$u(s) = \frac{1}{1-f(s)} - \frac{1}{1-s} = \sum_{i=0}^{\infty} u_i s^i, \qquad \mu_k(s) = u(f_k(s)).$$

Лемма 2. *При* $n \to \infty$

$$\|h_n(s)\|_1 = o(n). \tag{2.8}$$

Доказательство. Из теоремы 1 работы [2] следует, что

$$a_0[h_n(s)] = \frac{1}{1 - f_n(0)} - 1 - \frac{Bn}{2} = o(n). \tag{2.9}$$

Очевидно,

$$a_l[h_n(s)] = a_l\left[\frac{1}{1 - f_n(s)} - \frac{1}{1-s}\right], \qquad l \geqslant 1. \tag{2.10}$$

Замечая, что $\mu_k(s) = [1 - f(f_k(s))]^{-1} - [1 - f_k(s)]^{-1}$, получаем

$$\frac{1}{1-f_n(s)} - \frac{1}{1-s} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1 - f_{k+1}(s)} - \frac{1}{1 - f_k(s)}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1 - f(f_k(s))} - \frac{1}{1 - f_k(s)}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k(s). \tag{2.11}$$

По лемме 6 из [2] $\sum_{j\geqslant 0} |u_j| < \infty$. Следовательно,

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_l[\mu_k(s)]| = \sum_{l=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty} u_j a_l[f_k^j(s)]\right|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |u_j| \sum_{l=1}^{\infty} a_l[f_k^j(s)] = \sum_{j=1}^{\infty} |u_j|\,(1 - f_k^j(0)).$$

Здесь мы воспользовались равенствами

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l[f_k^j(s)] = \mathbf{P}(Z_k > 0 \mid Z_0 = j) = 1 - f_k^j(0).$$

Так как $f_k(0) \to 1$ при $k \to \infty$ и $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j| < \infty$, то из предыдущей оценки заключаем, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_l[\mu_k(s)]| \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{\infty} |a_l[\mu_k(s)]| = o(n). \tag{2.12}$$

Оценка (2.8) вытекает из (2.9), (2.12) и неравенства

$$\|h_n(s)\|_1 \leqslant |a_0[h_n(s)]| + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{\infty} |a_l[\mu_k(s)]|.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Равномерно по s из единичного круга*

$$1 - f_n(s) = \left(\frac{1}{1-s} + \frac{Bn}{2}\right)^{-1} (1 + o(1)). \tag{2.13}$$

Доказательство. Из представления (2.7) имеем

$$1 - f_n(s) = \left(\frac{1}{1-s} + \frac{Bn}{2}\right)^{-1} (1 - h_n(s)(1 - f_n(s))).$$

Из равенства $\|1 - f_n(s)\| = 2Q_n$ и оценок (2.4), (2.8) заключаем, что

$$\|h_n(s)(1 - f_n(s))\|_1 \leqslant \|h_n(s)\|_1 \|1 - f_n(s)\|_1 = o(1).$$

Замечая, что из сходимости к нулю по норме $\|\cdot\|_1$ следует равномерная в единичном круге сходимость к нулю, получаем желаемый результат.

Лемма 4. *Пусть $\rho(s)$ — вероятностная производящая функция, $\rho'(1) < \infty$. Тогда для любого $a > 0$*

$$a_l[\rho(s)] \leqslant \left(\frac{96}{95}\right)^2 \frac{1}{al} \int_{-a}^{a} |\rho'(e^{it})|\, dt. \tag{2.14}$$

Доказательство. Очевидно, $\rho'(s)/\rho'(1)$ является вероятностной производящей функцией. Известна следующая оценка для функции концентрации [8, с. 56]:

$$\sup_x \mathbf{P}\{X = x\} \leqslant \left(\frac{96}{95}\right)^2 \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} |\phi(t)|\, dt,$$

где $\phi(t)$ — характеристическая функция величины X, $a > 0$. Применяя эту оценку к случайной величине с распределением, соответствующим производящей функции $\rho'(s)/\rho'(1)$, имеем

$$\sup_l a_l\left[\frac{\rho'(s)}{\rho'(1)}\right] \leqslant \left(\frac{96}{95}\right)^2 \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left|\frac{\rho'(e^{it})}{\rho'(1)}\right| dt.$$

Отсюда, замечая, что для любого $l \geqslant 1$

$$a_l[\rho(s)] = \frac{1}{l}\, a_{l-1}[\rho'(s)],$$

получаем утверждение леммы.

Лемма 5. *При* $|s| \leqslant 1$, $s \to 1$ *справедливо равенство*

$$\ln f'(s) = -B(1-s) + o(1-s). \tag{2.15}$$

Здесь и далее $\ln s$ обозначает главную ветвь логарифма.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя соотношение $\ln(1+x) = x + O(x^2)$, имеем

$$\ln f'(s) = \ln\left(1 + (f'(s)-1)\right) = (f'(s)-1) + O((f'(s)-1)^2). \tag{2.16}$$

Далее, из условия $B < \infty$ заключаем, что

$$f'(s) - 1 = B(s-1) + o(s-1).$$

Применяя это равенство к обоим слагаемым в правой части (2.16), получаем

$$\ln f'(s) = -B(1-s) + o(1-s) + O((1-s)^2).$$

Отсюда вытекает (2.15). Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N = N(\varepsilon)$ *такое, что для всех* s *из единичного круга*

$$|f_n'(s)| \leqslant \exp\left(-B(1-\varepsilon)\sum_{j=N}^{n-1}\operatorname{Re}(1-f_j(s)) + \varepsilon\sum_{j=N}^{n-1}|\operatorname{Im}(1-f_j(s))|\right). \tag{2.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что

$$f_n'(s) = \prod_{j=0}^{n-1} f'(f_j(s)).$$

Так как $|f'(f_j(s))| \leqslant 1$ каково бы ни было $j \geqslant 0$, то для любого N справедлива оценка

$$|f_n'(s)| \leqslant \left|\prod_{j=N}^{n-1} f'(f_j(s))\right| = \left|\exp\left(\sum_{j=N}^{n-1}\ln f'(f_j(s))\right)\right|$$
$$= \exp\left(\sum_{j=N}^{n-1}\operatorname{Re}\ln f'(f_j(s))\right). \tag{2.18}$$

Согласно лемме 5,

$$\ln f'(s) = -(B + \alpha(s))(1 - s), \qquad \alpha(s) \to 0 \quad \text{при} \quad s \to 1.$$

Отсюда при $|s| \leqslant 1$ вытекает оценка

$$\operatorname{Re} \ln f'(s) \leqslant -(B - |\operatorname{Re} \alpha(s)|) \operatorname{Re}(1 - s) + |\operatorname{Im} \alpha(s)| |\operatorname{Im}(1 - s)|. \tag{2.19}$$

Из неравенств $|1 - f_j(s)| \leqslant 2(1 - f_j(0))$ и (2.4) следует, что $f_j(s) \to 1$ при $j \to \infty$ равномерно по всем s из единичного круга. Следовательно, мы можем выбрать N так, что

$$|\operatorname{Re} \alpha(f_j(s))| \leqslant \varepsilon B, \qquad |\operatorname{Im} \alpha(f_j(s))| \leqslant \varepsilon$$

для всех $j \geqslant N$. Применяя эти неравенства для оценки правой части в (2.19), получаем

$$\operatorname{Re} \ln f'(f_j(s)) \leqslant -B(1 - \varepsilon) \operatorname{Re}(1 - f_j(s)) + \varepsilon |\operatorname{Im}(1 - f_j(s))|.$$

Отсюда и из (2.18) следует утверждение леммы.

Положим

$$\varphi(x) = \frac{2(Bx + 1)}{(Bx + 1)^2 + c^2},$$

где c — произвольная постоянная.

Лемма 7. *Для любого* $k \geqslant 1$

$$\left| \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(j) - \frac{1}{B} \ln\left(1 + \frac{(Bk + 1)^2}{c^2}\right) \right| \leqslant 1. \tag{2.20}$$

Доказательство. Воспользуемся известной формулой Эйлера (см., например, [9, с. 281])

$$\sum_{j=0}^{k-1} \varphi(j) = \int_0^k \varphi(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{B_\nu}{\nu!} [\varphi^{(\nu-1)}(k) - \varphi^{(\nu-1)}(0)]$$
$$- \frac{B_n}{n!} \int_0^1 [B_n(t) - B_n] \sum_{j=0}^{n-1} \varphi^{(n)}(j + 1 - t)\, dt.$$

Здесь B_ν и $B_\nu(t)$ — соответственно числа и полиномы Бернулли. Полагая в этом равенстве $n = 1$, получаем

$$\sum_{j=0}^{k-1} \varphi(j) = \int_0^k \varphi(t)\, dt - \int_0^1 t \sum_{j=0}^{k-1} \varphi'(j + 1 - t)\, dt. \tag{2.21}$$

Нетрудно видеть, что

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{2B(c^2 - (Bx + 1)^2)}{(c^2 + (Bx + 1)^2)^2} \right| \leqslant \frac{2B}{(Bx + 1)^2}.$$

С помощью этого неравенства получаем оценку

$$\left|\int_0^1 t\sum_{j=0}^{k-1}\varphi'(j+1-t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi'(j+1-t)|$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\frac{B}{(Bj+1)^2}\leqslant \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=1. \qquad (2.22)$$

Из (2.21) и (2.22) заключаем

$$\left|\sum_{j=0}^{k-1}\varphi(j)-\int_0^k\varphi(t)\,dt\right|\leqslant 1.$$

Отсюда, замечая, что

$$\int_0^k\varphi(t)\,dt=\frac{1}{B}\ln(c^2+(Bn+1)^2)-\frac{1}{B}\ln c^2=\frac{1}{B}\ln\left(1+\frac{(Bn+1)^2}{c^2}\right),$$

получаем желаемый результат. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Для любого $\varepsilon>0$ существуют N и положительные константы $a=a(\varepsilon,N)$, $b=b(\varepsilon,N)$ такие, что при всех $|t|\leqslant\pi/2$*

$$\sum_{j=N}^{n-1}\mathrm{Re}\,(1-f_j(e^{it}))\geqslant\frac{(1-\varepsilon)}{B}\ln\left(1+(Bn+1)^2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{t}{2}\right)-a, \qquad (2.23)$$

$$\sum_{j=N}^{n-1}|\mathrm{Im}\,(1-f_j(e^{it}))|\leqslant\frac{\varepsilon}{B}\ln\left(1+(Bn+1)^2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{t}{2}\right)+b. \qquad (2.24)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Из леммы 3 следует, что существует N такое, что для всякого $j\geqslant N$ справедливы соотношения

$$\mathrm{Re}\,(1-f_j(s))\geqslant(1-\varepsilon)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-s}+\frac{Bj}{2}\right)^{-1}-\varepsilon\left|\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-s}+\frac{Bj}{2}\right)^{-1}\right|, \qquad (2.25)$$

$$|\mathrm{Im}\,(1-f_j(s))|\leqslant\varepsilon\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-s}+\frac{Bj}{2}\right)^{-1}+(1+\varepsilon)\left|\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-s}+\frac{Bj}{2}\right)^{-1}\right|. \qquad (2.26)$$

Таким образом, для доказательства леммы необходимо оценить сумму действительной и мнимой частей $((1-s)^{-1}+Bj/2)^{-1}$.

Положим $s=e^{it}$. Пользуясь соотношением

$$\frac{1}{1-s}=\frac{1}{(1-\cos t)-i\sin t}=\frac{1}{2}+\frac{i\sin t}{2(1-\cos t)}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{t}{2},$$

получаем

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-s}+\frac{Bj}{2}\right)^{-1}=\frac{2(Bj+1)}{(Bj+1)^2+\mathrm{ctg}^2(t/2)},$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-s}+\frac{Bj}{2}\right)^{-1}=-2\,\frac{\mathrm{tg}(t/2)}{1+(Bj+1)^2\,\mathrm{tg}^2(t/2)}.$$

Полагая в предыдущей лемме $c=\mathrm{ctg}(t/2)$ и замечая, что $0<\varphi(x)\leqslant 2$ для всех $x\geqslant 0$, имеем

$$\left|\sum_{j=N}^{n-1}\varphi(j)-\frac{1}{B}\ln\left(1+(Bn+1)^2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{t}{2}\right)\right|\leqslant 1+\sum_{j=0}^{N-1}\varphi(j)\leqslant 2N+1. \tag{2.27}$$

Очевидно, что функция

$$\psi(x)=\left|\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-s}+\frac{Bx}{2}\right)^{-1}\right|=\frac{2|\,\mathrm{tg}(t/2)|}{1+(Bx+1)^2\,\mathrm{tg}^2(t/2)}$$

убывает. Поэтому

$$\sum_{j=N}^{n-1}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-s}+\frac{Bj}{2}\right)^{-1}\right|\leqslant\int_0^\infty\psi(x)\,dx\leqslant\frac{2}{B}\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{B}. \tag{2.28}$$

Комбинируя (2.25), (2.27) и (2.28), мы получаем (2.23). Соответственно неравенство (2.24) следует из (2.26), (2.27) и (2.28). Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Для всех $n,k\geqslant 1$ имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}\{Z_n=k\}\leqslant\frac{c}{nk}. \tag{2.29}$$

Доказательство. Из лемм 6 и 8 следует оценка

$$|f_n'(e^{it})|\leqslant c(\varepsilon)\left(\frac{1}{n|\,\mathrm{tg}(t/2)|}\right)^{2((1-\varepsilon)^2-\varepsilon/B)}.$$

Применяя очевидное неравенство $|\mathrm{tg}\,x|>|x|$, получаем

$$|f_n'(e^{it})|\leqslant c(\varepsilon)\left(\frac{2}{n|t|}\right)^{2((1-\varepsilon)^2-\varepsilon/B)}.$$

Отсюда, выбирая ε удовлетворяющим равенству $(1-\varepsilon)^2-\varepsilon/B=\frac{3}{4}$, мы получаем оценку

$$|f_n'(e^{it})|\leqslant c(n|t|)^{-3/2}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{1/n<|t|<\pi/2}|f_n'(e^{it})|\,dt\leqslant\frac{c}{n^{3/2}}\int_{1/n<|t|<\pi/2}\frac{dt}{|t|^{3/2}}<\frac{c_1}{n}. \tag{2.30}$$

Очевидно, $|f_n'(e^{it})| \leqslant 1$. Поэтому

$$\int_{|t|<1/n} |f_n'(e^{it})|\,dt \leqslant \frac{2}{n}. \tag{2.31}$$

Полагая в неравенстве леммы 4 $e_n = f_n$, $a = \pi/2$ и учитывая (2.30), (2.31), приходим к требуемому неравенству. Лемма 9 доказана.

Нам понадобится следующая оценка для функции концентрации суммы независимых случайных величин (см., например, [8, с. 75]).

Лемма 10. *Пусть $S_k = X_1 + \dots + X_k$ — сумма независимых, одинаково распределенных случайных величин. Тогда*

$$Q(S_k, \lambda) \leqslant \frac{A}{\sqrt{k}} Q(X_1, \lambda)(1 - Q(X_1, \lambda))^{-1}, \tag{2.32}$$

где A — некоторая абсолютная постоянная.

Пусть $\{\xi_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, распределение которых задается равенствами $\mathbf{P}\{\xi_i^{(n)} = j\} = \mathbf{P}(Z_n = j \mid Z_n > 0)$, $j \geqslant 1$. Положим $S_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(n)}$.

Лемма 11. *Существует постоянная c такая, что при любом $k \geqslant 2$ справедлива оценка*

$$\sup_{l \geqslant 1} \mathbf{P}\{S_k^{(n)} = l\} \leqslant \frac{c}{n\sqrt{k}}. \tag{2.33}$$

Заметим, что в лемме 9 работы [2] получена аналогичная (2.33) оценка. При доказательстве этого результата авторы опирались на доказанную ими локальную предельную теорему для критического процесса Гальтона–Ватсона, которую мы использовать не будем. Наоборот, оценка (2.33) будет являться важной составляющей доказательства теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 9 и соотношения (2.3) заключаем, что при $j \geqslant l/2$ справедлива оценка

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(n)} = j\} = \frac{\mathbf{P}\{Z_n = j\}}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} \leqslant \frac{c}{j} \leqslant \frac{c_1}{l}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{S_2^{(n)} = l\} = \sum_{j=1}^{l-1} \mathbf{P}\{\xi_1^{(n)} = j\} \mathbf{P}\{\xi_1^{(n)} = l - j\}$$

$$\leqslant 2 \sup_{i \geqslant l/2} \mathbf{P}\{\xi_1^{(n)} = i\} \sum_{j \leqslant l/2} \mathbf{P}\{\xi_1^{(n)} = j\} \leqslant \frac{c}{l} \mathbf{P}\left\{\xi_1^{(n)} \leqslant \frac{l}{2}\right\}. \tag{2.34}$$

Согласно определению, $\mathbf{P}\{\xi_1^{(n)} \leqslant i\} = \mathbf{P}\{1 \leqslant Z_n \leqslant i\}/\mathbf{P}\{Z_n > 0\}$. Применяя (2.1) и (2.3), получаем

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(n)} \leqslant i\} \leqslant \frac{ci}{n}. \tag{2.35}$$

Из (2.34) и (2.35) вытекает оценка

$$\sup_{l\geqslant 1} \mathbf{P}\{S_2^{(n)} = l\} \leqslant \frac{c}{n}. \tag{2.36}$$

Предположим теперь, что $k = 2m$, $m > 1$. Тогда величину $S_k^{(n)}$ можно представить в виде суммы m независимых одинаково распределенных случайных величин $X_i^{(n)}$, причем их распределение совпадает с распределением $S_2^{(n)}$. Применяя предыдущую лемму, имеем

$$Q(S_k^{(n)}, \lambda) \leqslant \frac{A}{\sqrt{m}} Q(S_2^{(n)}, \lambda)(1 - Q(S_2^{(n)}, \lambda))^{-1}.$$

Учитывая (2.36), получаем при достаточно больших значениях n неравенство

$$\sup_{l\geqslant 1} \mathbf{P}\{S_{2m}^{(n)} = l\} \leqslant \frac{c}{n\sqrt{2m}} \left(1 - \frac{2c_1}{n}\right)^{-1} \leqslant \frac{c_2}{n\sqrt{2m}}, \tag{2.37}$$

тем самым лемма доказана для четных значений k. Если же $k = 2m+1$, то надо воспользоваться очевидной оценкой $Q(S_{2m+1}^{(n)}, \lambda) \leqslant Q(S_{2m}^{(n)}, \lambda)$ и применить соотношение (2.37).

Положим $l_0 = \min\{l \geqslant 1 \colon p_l > 0\}$.

Лемма 12. *Если* $l_0 > 1$, *то* $\mathbf{P}\{Z_n = l\} = 0$ *для всех* $1 \leqslant l < l_0$ *и* $n \geqslant 1$. *Кроме того, для любого* l_0

$$\mathbf{P}\{Z_n = l_0\} = p_{l_0} \prod_{i=1}^{n-1} f'(f_i(0)) > 0. \tag{2.38}$$

Доказательство. Если произошло событие $\{Z_n > 0\}$, то в $(n-1)$-м поколении была частица с ненулевым числом потомков. По определению l_0 число потомков этой частицы не может быть меньше l_0. Это означает, что события $\{Z_n > 0\}$ и $\{Z_n \geqslant l_0\}$ совпадают и, следовательно, $\mathbf{P}\{Z_n = l\} = 0$ для любого $1 \leqslant l < l_0$.

Из определения l_0 следует, что для любого $i \geqslant l_0$ имеет место равенство

$$\mathbf{P}(Z_n = l_0 \mid Z_{n-1} = i) = i p_0^{i-1} p_{l_0}. \tag{2.39}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{Z_n = l_0\} &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(I(Z_n = l_0) \mid Z_{n-1})) \\ &= p_{l_0} \mathbf{E}(Z_{n-1} f^{Z_{n-1}-1}(0)) = p_{l_0} f'_{n-1}(f(0)).\end{aligned}$$

Отсюда вытекает второе утверждение леммы.

Лемма 13. *Имеет место неравенство*

$$\lim_{n\to\infty} n^2\mathbf{P}\{Z_n = l_0\} > 0. \tag{2.40}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В работе [2] доказано, что для любого фиксированного j

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B}{2}\, n^2\mathbf{P}\{Z_n = j\} = \mu(j) < \infty, \tag{2.41}$$

причем последовательность $\mu(j)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu(l)\, P(l,j) = \mu(j), \qquad j \geqslant 1,$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu(l)\, p_0^l = 1.$$

Здесь $P(l,j)$ — переходные вероятности процесса Z_n, т.е.

$$P(l,j) = \mathbf{P}(Z_1 = j \mid Z_0 = l).$$

Поскольку в силу леммы 12 $\mathbf{P}\{Z_n = l\} = 0$ при всех n и $1 \leqslant l < l_0$, то и $\mu(l) = 0$ для любого $1 \leqslant l < l_0$.

Покажем, что $\mu(l_0) > 0$. Перепишем (2.39) следующим образом:

$$P(i, l_0) = i p_0^{i-1} p_{l_0}.$$

Следовательно,

$$\mu(l_0) = \sum_{i=l_0}^{\infty} \mu(i)\, i p_0^{i-1} p_{l_0} \geqslant l_0\, \frac{p_{l_0}}{p_0} \sum_{i=l_0}^{\infty} \mu(i)\, p_0^i = l_0\, \frac{p_{l_0}}{p_0} > 0.$$

Полагая в (2.41) $j = l_0$, получим желаемый результат. Лемма 13 доказана.

Лемма 14. *Для любых $1 \leqslant j < k$ имеет место неравенство*

$$\prod_{i=j}^{k-1} f'(f_i(0)) \leqslant c\, \frac{j^2}{k^2}, \tag{2.42}$$

c — некоторая постоянная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.38) и (2.40) следует, что

$$\prod_{i=j}^{k-1} f'(f_i(0)) = \frac{\mathbf{P}\{Z_k = l_0\}}{\mathbf{P}\{Z_j = l_0\}} \sim \frac{j^2}{k^2}$$

при $j,\, k \to \infty$. Отсюда вытекает желаемая оценка.

Лемма 15. *Для любых* $j \geqslant 3$, $q \in (0,1)$ *выполнено неравенство*

$$\sum_{i=j}^{\infty} C_i^j q^{i-j} p_i = \frac{1}{j!} f^{(j)}(q) \leqslant \frac{2B}{j^2 q(1-q)^{j-2}}. \tag{2.43}$$

Доказательство. Очевидно,

$$\sum_{i=j}^{\infty} C_i^j q^{i-j} p_i = \frac{1}{j!} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{i!}{(i-j)!} q^{i-j} p_i = \frac{1}{j!} \sum_{i=j}^{\infty} \left(\frac{(i-2)!}{(i-j)!} q^{i-j} \right) i(i-1)\, p_i.$$

Отсюда, пользуясь тождеством Абеля, имеем

$$j! \sum_{i=j}^{\infty} C_i^j q^{i-j} p_i = \sum_{i=j}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{i} k(k-1)\, p_k \right) q^{i-j} \left(\frac{(i-2)!}{(i-j)!} - \frac{(i-1)!}{(i+1-j)!}\, q \right)$$
$$- (j-2)! \sum_{k=1}^{j-1} k(k-1)\, p_k.$$

Далее,

$$\frac{(i-2)!}{(i-j)!} q^{i-j} - \frac{(i-1)!}{(i+1-j)!} q^{i+1-j} < \frac{(i-1)!}{(i+1-j)!} q^{i-j} (1-q).$$

С другой стороны, для всякого i справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{i} k(k-1)\, p_k \leqslant B.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=j}^{\infty} C_i^j q^{i-j} p_i < \frac{B(1-q)}{j!} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{(i-1)!}{(i+1-j)!} q^{i-j}$$
$$< \frac{B(1-q)}{j!\, q} \sum_{i=j-1}^{\infty} \frac{(i-1)!}{(i+1-j)!} q^{i+1-j}.$$

Замечая, что

$$\frac{d^{j-2}}{dq^{j-2}} q^{i-1} = \frac{(i-1)!}{(i+1-j)!} q^{i+1-j},$$

приходим к тождеству

$$\sum_{i=j-1}^{\infty} \frac{(i-1)!}{(i+1-j)!} q^{i+1-j} = \frac{d^{j-2}}{dq^{j-2}} (1-q)^{-1} = (j-2)!\, (1-q)^{-j+1}.$$

В итоге имеем неравенство

$$\sum_{i=j}^{\infty} C_i^j q^{i-j} p_i < \frac{B}{j(j-1)\, q(1-q)^{j-2}}.$$

Остается заметить, что $1/(j(j-1)) < 2/j^2$.

Лемма 16. *Для любого $k < n$ справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{Z_n = k\} = \mathbf{P}\{Z_k = k\} \prod_{i=k}^{n-1} f'(f_i(0)) + \sum_{j=k}^{n-1} r_j(k) \prod_{i=j+1}^{n-1} f'(f_i(0)), \qquad (2.44)$$

где

$$r_j(k) = \sum_{i=2}^{\infty} Q_j^i \mathbf{P}\{S_i^{(j)} = k\} \sum_{l=i}^{\infty} C_l^i (1 - Q_j)^{l-i} p_l.$$

Доказательство. Используя марковское свойство процесса, имеем

$$\mathbf{P}\{Z_n = k\} = \sum_{l=1}^{\infty} p_l \mathbf{P}(Z_{n-1} = k \mid Z_0 = l).$$

Процесс, начинающийся с l частиц в нулевом поколении, можно представить в виде суммы независимых процессов, каждый из которых начинается с одной частицы. Очевидно, вероятность того, что к моменту времени n выродится $l - i$ слагаемых, равна $C_l^i Q_{n-1}^i (1 - Q_{n-1})^{l-i}$. Распределение каждого невыродившегося слагаемого совпадает с распределением $\xi_1^{(n-1)}$. Поэтому

$$\mathbf{P}(Z_{n-1} = k \mid Z_0 = l) = \sum_{i=1}^{l} C_l^i Q_{n-1}^i (1 - Q_{n-1})^{l-i} \mathbf{P}\{S_i^{(n-1)} = k\}. \qquad (2.45)$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{Z_n = k\} = Q_{n-1} \mathbf{P}\{S_1^{(n-1)} = k\} \sum_{l=1}^{\infty} l (1 - Q_{n-1})^{l-1} p_l$$
$$+ \sum_{i=2}^{\infty} Q_{n-1}^i \mathbf{P}\{S_i^{(n-1)} = k\} \sum_{l=i}^{\infty} C_l^i (1 - Q_{n-1})^{l-i} p_l.$$

Так как

$$Q_{n-1} \mathbf{P}\{S_1^{(n-1)} = k\} = \mathbf{P}\{Z_{n-1} = k\}$$

и

$$\sum_{l=1}^{\infty} l (1 - Q_{n-1})^{l-1} p_l = f'(f_{n-1}(0)),$$

то первое слагаемое в этом представлении равно $\mathbf{P}\{Z_{n-1} = k\} f'(f_{n-1}(0))$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{Z_n = k\} = \mathbf{P}\{Z_{n-1} = k\} f'(f_{n-1}(0)) + r_{n-1}(k).$$

Повторяя эту процедуру $n - k - 1$ раз, приходим к (2.44). Лемма 16 доказана.

Лемма 17. *Для любых* $1 \leqslant k \leqslant j$ *имеет место оценка*

$$r_j(k) \leqslant \frac{c}{j^2}\left(\mathbf{P}\{S_2^{(j)} = k\} + \frac{k}{j^2}\right). \tag{2.46}$$

Доказательство. Согласно определению,

$$r_j(k) = Q_j^2 \mathbf{P}\{S_2^{(j)} = k\} \sum_{l=2}^{\infty} C_l^2 (1 - Q_j)^{l-2} p_l$$
$$+ \sum_{i=3}^{\infty} Q_j^i \mathbf{P}\{S_i^{(j)} = k\} \sum_{l=i}^{\infty} C_l^i (1 - Q_j)^{l-i} p_l. \tag{2.47}$$

Полагая в лемме 15 $q = 1 - Q_j$, получаем для любого $i \geqslant 3$ неравенство

$$\sum_{l=i}^{\infty} C_l^i (1 - Q_j)^{l-i} p_l \leqslant \frac{2B}{i^2 Q_j^{i-2}(1 - Q_j)}.$$

Отсюда, замечая, что $\mathbf{P}\{S_i^{(j)} = k\} = 0$ при $i > k$, мы приходим к оценке

$$\sum_{i=3}^{\infty} Q_j^i \mathbf{P}\{S_i^{(j)} = k\} \sum_{l=i}^{\infty} C_l^i (1 - Q_j)^{l-i} p_l \leqslant \frac{2BQ_j^2}{(1 - Q_j)} \sum_{i=3}^{k} \frac{\mathbf{P}\{S_i^{(j)} = k\}}{i^2}. \tag{2.48}$$

Применяя (2.4), заключаем, что

$$\frac{Q_j^2}{(1 - Q_j)} \leqslant \frac{c}{j^2}. \tag{2.49}$$

Из (2.33) и (2.35) вытекает равномерная по $i \geqslant 3$ оценка

$$\mathbf{P}\{S_i^{(j)} = k\} = \sum_{l=1}^{k-1} \mathbf{P}\{S_{i-1}^{(j)} = l\} \, \mathbf{P}\{\xi_1^{(j)} = k - l\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\{\xi_1^{(j)} < k\} \sup_l \mathbf{P}\{S_{i-1}^{(j)} = l\} \leqslant \frac{ck}{j^2}. \tag{2.50}$$

Используя (2.49) и (2.50) для оценки правой части в (2.48), получаем неравенство

$$\sum_{i=3}^{\infty} Q_j^i \mathbf{P}\{S_i^{(j)} = k\} \sum_{l=i}^{\infty} C_l^i (1 - Q_j)^{l-i} p_l \leqslant \frac{ck}{j^4}. \tag{2.51}$$

Оценим теперь первое слагаемое в правой части равенства (2.47). Нетрудно видеть, что

$$\sum_{l=2}^{\infty} C_l^2 (1 - Q_j)^{l-2} p_l = \frac{f''(1 - Q_j)}{2} < \frac{B}{2}.$$

Отсюда, используя (2.4), получаем оценку

$$Q_j^2 \mathbf{P}\{S_2^{(j)} = k\} \sum_{l=2}^{\infty} C_l^2 (1 - Q_j)^{l-2} p_l < \frac{c\mathbf{P}\{S_2^{(j)} = k\}}{j^2}. \tag{2.52}$$

Утверждение леммы следует из (2.47), (2.51) и (2.52).

Лемма 18. *Пусть ξ_n — случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами n и p. Тогда справедливы неравенства*

$$(np)^{-1/2} < \mathbf{E}\{\xi_n^{-1/2};\ \xi_n > 0\} < A(np)^{-1/2}, \tag{2.53}$$

$$np(1-p)^{n-1} < \mathbf{E}\{\xi_n^{-1/2};\ \xi_n > 0\} < np. \tag{2.54}$$

Постоянная A не превосходит 2.73.

В лемме 13 работы [10] выводится неравенство

$$\mathbf{E}\{\xi_n^{\beta};\ \xi_n > 0\} \leqslant c(\beta)(np)^{\beta}, \qquad \beta \leqslant 1.$$

Доказательство верхней оценки в (2.53) почти дословно повторяет доказательство этой оценки. Единственным новым элементом является численная оценка постоянной $A = c(-\frac{1}{2})$.

Доказательство. Функция $x^{-1/2}$ является выпуклой. Отсюда по неравенству Иенсена

$$\mathbf{E}\{\xi_n^{-1/2};\ \xi_n > 0\} > (\mathbf{E}\{\xi_n;\ \xi_n > 0\})^{-1/2} = (np)^{-1/2}.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{E}\{\xi_n^{-1/2};\ \xi_n > 0\} < \mathbf{P}\left\{\xi_n < \frac{np}{2}\right\} + \left(\frac{np}{2}\right)^{-1/2}.$$

По неравенству Беннета–Хёффдинга [8, с. 77]

$$\mathbf{P}\left\{\xi_n < \frac{np}{2}\right\} < \exp\left\{-\frac{np}{2}\Big[(3-2p)\ln\big(1 + (2(1-p))^{-1}\big) - 1\Big]\right\}.$$

Нетрудно видеть, что $\min_{0 \leqslant p \leqslant 1} (3-2p)\ln(1 + (2(1-p))^{-1})$ достигается при $p = 0$ и равен $3\ln\frac{3}{2}$.

Так как $\sup_{x \geqslant 0} \sqrt{x}e^{-\alpha x} = (2e\alpha)^{-1/2}$, то $e^{-\alpha x} \leqslant (2e\alpha)^{-1/2}x^{-1/2}$. Полагая в этой оценке $x = np$, $\alpha = (3\ln\frac{3}{2} - 1)/2$, получаем

$$\mathbf{P}\left\{\xi_n < \frac{np}{2}\right\} < \exp\left\{-\frac{np}{2}\left(3\ln\frac{3}{2} - 1\right)\right\} < 1.31(np)^{-1/2}.$$

Таким образом, (2.53) доказано. При этом постоянная A в этой оценке не превосходит $1.31 + \sqrt{2} < 2.73$.

Очевидно,

$$\mathbf{E}\{\xi_n^{-1/2};\ \xi_n > 0\} < \mathbf{E}\xi_n, \qquad \mathbf{E}\{\xi_n^{-1/2};\ \xi_n > 0\} > \mathbf{P}\{\xi_n = 1\}.$$

Из этих оценок вытекает (2.54). Лемма 18 доказана.

3. Доказательство предложения. Если $k \geqslant n$, то, применяя (2.29), получаем

$$\mathbf{P}\{Z_n = k\} \leqslant \frac{c}{n^2}. \tag{3.1}$$

Пусть теперь $k < n$. Из (2.42) и (3.1) следует, что

$$\mathbf{P}\{Z_k = k\} \prod_{i=k}^{n-1} f'(f_i(0)) \leqslant \frac{c}{n^2}. \tag{3.2}$$

Используя (2.42) и (2.46), имеем

$$r_j(k) \prod_{i=j+1}^{n-1} f'(f_i(0)) \leqslant \frac{c}{n^2}\left(\mathbf{P}\{S_2^{(j)} = k\} + \frac{k}{j^2}\right). \tag{3.3}$$

Комбинируя (2.44), (3.2) и (3.3), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{Z_n = k\} &\leqslant \frac{c}{n^2}\left(1 + \sum_{j=k}^{n} \mathbf{P}\{S_2^{(j)} = k\} + \sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j^2}\right) \\ &\leqslant \frac{c_1}{n^2}\left(1 + \sum_{j=k}^{n} \mathbf{P}\{S_2^{(j)} = k\}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь мы воспользовались тем, что для всякого $k \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j^2} \leqslant \frac{1}{k} + k \int_k^\infty \frac{dx}{x^2} \leqslant 2.$$

Оценивая величины $\mathbf{P}\{S_2^{(j)} = k\}$ с помощью (2.36), имеем

$$\mathbf{P}\{Z_n = k\} \leqslant \frac{c}{n^2}\left(1 + \sum_{k}^{n} j^{-1}\right) \leqslant \frac{c_1(1 + \ln(n/k))}{n^2}.$$

Отсюда, применяя (2.3), заключаем

$$\sup_{l \geqslant k/2} \mathbf{P}\{\xi_1^{(j)} = l\} \leqslant \frac{c\,(1 + \ln(2j/k))}{n}. \tag{3.5}$$

Из (2.35) и (3.5) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_2^{(j)} = k\} &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}\{\xi_1^{(j)} = i\}\, \mathbf{P}\{\xi_1^{(j)} = k - i\} \\ &\leqslant 2 \sup_{i \geqslant k/2} \mathbf{P}\{\xi_1^{(j)} = i\}\, \mathbf{P}\left\{\xi_1^{(j)} \leqslant \frac{k}{2}\right\} \leqslant c\, \frac{\ln(2j/k) + 1}{j^2}. \end{aligned}$$

Применяя полученное неравенство к правой части (3.4), приходим к оценке

$$\mathbf{P}\{Z_n = k\} \leqslant \frac{c}{n^2}\left(1 + \sum_{j=k}^{n} k\,\frac{\ln(2j/k)+1}{j^2}\right). \tag{3.6}$$

В силу убывания при $t > 0$ функции $t^{-2}(1+\ln(2t))$ имеем

$$\frac{1+\ln(2j/k)}{(j/k)^2}\,\frac{1}{k} \leqslant \int_{(j-1)/k}^{j/k} \frac{1+\ln(2t)}{t^2}\,dt.$$

Следовательно, для любых n и k

$$\sum_{j=k}^{n} k\,\frac{\ln(2j/k)+1}{j^2} = \sum_{j=k}^{n} \frac{1+\ln(2j/k)}{(j/k)^2}\,\frac{1}{k} \leqslant \frac{1+\ln 2}{k} + \int_{1}^{n/k} \frac{1+\ln(2t)}{t^2}\,dt < \infty.$$

Из (3.6) и последнего неравенства вытекает желаемый результат.

4. Доказательство теоремы.

Лемма 19. *Для всех $n \geqslant 1$ имеют место неравенства*

$$g_{n,0} \leqslant \frac{c}{n^2}, \tag{4.1}$$

$$\sup_{i\geqslant 1} |g_{n,i}| \leqslant \frac{c}{n^3}, \tag{4.2}$$

где $g_{n,i} = a_i(g_n(s))$.

Доказательство. Мы воспользуемся тождеством

$$\left(\frac{1}{1-s} + \frac{Bn}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{1+Bn/2} - \frac{1}{(1+Bn/2)^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{Bn}\right)^{-j+1} s^j.$$

Положим $q = (1+2/(Bn))^{-1}$. Тогда предыдущее равенство запишется в виде

$$\left(\frac{1}{1-s} + \frac{Bn}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{Bn}\,q - \frac{4}{B^2n^2}\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}s^j. \tag{4.3}$$

Согласно (2.3),

$$g_{n,0} = \frac{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}}{1+Bn/2} \sim \frac{4}{B^2n^2}.$$

Отсюда вытекает неравенство (4.1).

Из определения $g_n(s)$ и тождества (4.3) имеем

$$|g_{n,i}| \leqslant \mathbf{P}\{Z_n > 0\}\,\frac{4}{B^2n^2}\,q^{i-1} + \mathbf{P}\{Z_n = i\}\,\frac{2}{Bn}\,q + \sum_{j=1}^{i-1}\mathbf{P}\{Z_n = j\}\,\frac{4}{B^2n^2}\,q^{i-j-1}.$$

Оценивая $\mathbf{P}\{Z_n > 0\}$ с помощью (2.4), а $\mathbf{P}\{Z_n = j\}$ с помощью предложения, получаем

$$|g_{n,i}| \leqslant \frac{c_1}{n^3} + \frac{c_2}{n^4}\sum_{j=1}^{i-1} q^{i-j-1} \leqslant \frac{c_1}{n^3} + \frac{c_2}{n^4(1-q)} \leqslant c_3 n^{-3}.$$

Тем самым лемма доказана полностью.

Из тождеств (2.7) и (4.3) следует, что

$$\mathbf{P}\{Z_n = l\} = \frac{4}{B^2n^2}\, q^{l+1} + a_l[h_n(s)\, g_n(s)]. \tag{4.4}$$

Таким образом, для доказательства теоремы нам необходимо показать, что второе слагаемое в правой части (4.4) стремится к нулю при $l, n \to \infty$ быстрее, чем n^{-2}.

Лемма 20. *Существует константа c такая, что для любых N и j*

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sup_{l\geqslant 1} \mathbf{P}(Z_k = l \mid Z_0 = j) \leqslant c\left(I(j \geqslant N) + \frac{j}{N}\, I(j < N)\right). \tag{4.5}$$

Здесь и далее через $I(A)$ обозначается индикатор множества A.

Доказательство. Объединяя утверждения леммы 11 и предложения, заключаем, что неравенство

$$\sup_{l\geqslant 1} \mathbf{P}\{S_i^{(k)} = l\} \leqslant \frac{c}{k\sqrt{i}}$$

справедливо для всех $i \geqslant 1$ (в лемме 11 эта оценка доказана лишь для $i \geqslant 2$). Используя это неравенство для оценки правой части в (2.45), получаем

$$\sup_{l\geqslant 1} \mathbf{P}(Z_k = l \mid Z_0 = j) \leqslant \frac{c}{k}\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{\sqrt{i}}\, C_j^i Q_k^i (1-Q_k)^{j-i} = \frac{c}{k}\, \mathbf{E}\{\xi_{j,k}^{-1/2};\ \xi_{j,k} > 0\},$$

где $\xi_{j,k}$ — число успехов в j испытаниях Бернулли с вероятностью успеха Q_k. Отсюда

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sup_{l\geqslant 1} \mathbf{P}(Z_k = l \mid Z_0 = j) \leqslant c \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k}\mathbf{E}\{\xi_{j,k}^{-1/2};\ \xi_{j,k} > 0\}$$

$$= c\left(\sum_{k=N}^{(N\vee j)-1} \frac{1}{k}\mathbf{E}\{\xi_{j,k}^{-1/2};\ \xi_{j,k} > 0\} + \sum_{k=N\vee j}^{\infty} \frac{1}{k}\mathbf{E}\{\xi_{j,k}^{-1/2};\ \xi_{j,k} > 0\}\right).$$

Оценим сначала первую сумму в правой части этого неравенства. Если $j > N$, то, применяя правое неравенство из (2.53), приходим к оценке

$$\sum_{k=N}^{(N\vee j)-1} \frac{1}{k}\mathbf{E}\{\xi_{j,k}^{-1/2};\ \xi_{j,k} > 0\} \leqslant c\sum_{k=N}^{j-1} \frac{1}{k(jQ_k)^{1/2}} \leqslant c_1 j^{-1/2} \sum_{k=1}^{j} k^{-1/2} \leqslant c_2.$$

Здесь мы воспользовались (2.4) и оценкой $\sum_{k=1}^{j} k^{-1/2} \leqslant cj^{1/2}$. Если же $j \leqslant N$, то верхний индекс у рассматриваемой суммы станет меньше нижнего и, следовательно, ее значение будет равно нулю. Объединяя эти два случая, получаем неравенство

$$\sum_{k=N}^{(N\vee j)-1} \frac{1}{k} \mathbf{E}\{\xi_{j,k}^{-1/2};\ \xi_{j,k} > 0\} \leqslant cI(j > N).$$

Оценивая вторую сумму с помощью (2.54), получаем

$$\sum_{k=N\vee j}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{E}\{\xi_{j,k}^{-1/2};\ \xi_{j,k} > 0\} \leqslant j \sum_{k=N\vee j}^{\infty} \frac{Q_k}{k} \leqslant cj \sum_{k=N\vee j}^{\infty} k^{-2}$$
$$\leqslant c_1 \frac{j}{N \vee j} = c_1 I(j > N) + c_1 \frac{j}{N} I(j \leqslant N).$$

Из двух последних неравенств вытекает утверждение леммы.

Лемма 21. *Равномерно по* $n \geqslant 1$

$$\lim_{l\to\infty} a_l[h_n(s)] = \lim_{l\to\infty} a_l\left[\frac{1}{1-f_n(s)} - \frac{1}{1-s}\right] = 0. \tag{4.6}$$

Доказательство. Из (2.10) следует, что достаточно доказать лемму для функции $1/(1-f_n(s)) - 1/(1-s)$.

В силу тождества (2.11)

$$\frac{1}{1-f_n(s)} - \frac{1}{1-s} = \sum_{k=0}^{N-1} \mu_k(s) + \sum_{k=N}^{n-1} \mu_k(s) = \frac{1}{1-f_N(s)} - \frac{1}{1-s} + \sum_{k=N}^{n-1} \mu_k(s).$$

Рассмотрим сначала $\sum_{k=N}^{n-1} \mu_k(s)$. Нетрудно видеть, что для любого $l \geqslant 1$

$$\left| a_l\left[\sum_{k=N}^{n-1} \mu_k(s)\right]\right| \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} |a_l[\mu_k(s)]| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |u_j| \sum_{k=N}^{\infty} a_l[f_k^j(s)]$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} |u_j| \sum_{k=N}^{\infty} \mathbf{P}(Z_k = l \mid Z_0 = j).$$

Используя (4.5), получаем оценку

$$\sup_{l\geqslant 1} \left| a_l\left[\sum_{k=N}^{n-1} \mu_k(s)\right]\right| \leqslant c\left(N^{-1} \sum_{j<N} j|u_j| + \sum_{j\geqslant N} |u_j|\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$N^{-1} \sum_{j<N} j|u_j| < N^{-1/2} \sum_{j\leqslant\sqrt{N}} |u_j| + \sum_{\sqrt{N}<j<N} |u_j|.$$

Следовательно,

$$\sup_{l\geqslant 1}\left|a_l\left[\sum_{k=N}^{n-1}\mu_k(s)\right]\right| \leqslant c\left(N^{-1/2}\sum_{j\leqslant\sqrt{N}}|u_j| + \sum_{j>\sqrt{N}}|u_j|\right).$$

Отсюда вследствие конечности $\sum|u_j|$ заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать N так, чтобы для всех $n \geqslant 1$ выполнялось неравенство

$$\sup_{l\geqslant 1}\left|a_l\left[\sum_{k=N}^{n-1}\mu_k(s)\right]\right| \leqslant \varepsilon. \tag{4.7}$$

Далее, согласно теореме восстановления (см., например, [11, с. 310]),

$$\lim_{l\to\infty} a_l\left[\frac{1}{1-f_N(s)} - \frac{1}{1-s}\right] = 0.$$

Отсюда и из (4.7) заключаем, что равномерно по $n \geqslant 1$

$$\limsup_{l\to\infty}\left|a_l\left[\frac{1}{1-f_n(s)} - \frac{1}{1-s}\right]\right| \leqslant \varepsilon.$$

Вследствие произвольности ε получаем желаемый результат.

Теперь мы в состоянии завершить доказательство теоремы.

Нетрудно видеть, что

$$\big|a_l[h_n(s)\,g_n(s)]\big| \leqslant \sum_{i=0}^{l}|g_{n,i}||a_{l-i}[h_n(s)]| \leqslant g_{n,0}|a_l[h_n(s)]| + \|h_n(s)\|_1 \sup_{i\geqslant 1}|g_{n,i}|.$$

Используя для оценки первого слагаемого (4.1) и (4.6), а для оценки второго — (4.2) и (2.8), приходим к соотношению

$$\lim_{l,n\to\infty} n^2|a_l[h_n(s)\,g_n(s)]| = 0. \tag{4.8}$$

Очевидно,

$$q^{-l-1} = e^{2l/(Bn)}(1+o(1)) < c \tag{4.9}$$

при $l, n \to \infty$ и l/n ограниченном. Комбинируя (4.4), (4.8) и (4.9), приходим к равенству

$$\lim_{l,n\to\infty}\frac{B^2n^2}{4}\left(1+\frac{2}{Bn}\right)^{l+1}\mathbf{P}\{Z_n = l\} = 1.$$

Тем самым доказательство теоремы завершено.

В заключение авторы хотели бы выразить благодарность рецензенту, который обратил их внимание на ряд неточностей и опечаток и сделал полезные замечания, способствовавшие улучшению изложения представленных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Золотарев В. М.* Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, в. 2, с. 256–266.
2. *Kesten H., Ney P., Spitzer F.* The Galton–Watson process with mean one and finite variance. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 4, с. 579–611.
3. *Ватутин В. А.* Локальная предельная теорема для критических ветвящихся процессов Беллмана–Харриса. — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1981, т. 158, с. 9–30.
4. *Чистяков В. П.* Локальные предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, в. 3, с. 360–374.
5. *Athreya K. B., Ney P.* Branching Processes. New York–Heidelberg: Springer-Verlag, 1972, 287 p.
6. *Нагаев С. В., Мухамедханова Р.* Некоторые предельные теоремы из теории ветвящихся процессов. — Предельные теоремы и статистические выводы. Ташкент: Фан, 1966, с. 90–112.
7. *Топчий В. А.* Локальная предельная теорема для критических процессов Беллмана–Харриса с дискретным временем. — Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы. Новосибирск: Наука, 1982, с. 97–122. (Труды Ин-та математики. Т. 1.)
8. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
9. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967, 376 с.
10. *Нагаев С. В.* Оценка погрешности приближения устойчивыми законами. I. — Теорія ймов. і матем. статист., 1997, № 55, с. 145–160.
11. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1967, 498 с.

Поступила в редакцию
25.IV.2003

Исправленный вариант
30.I.2004