ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2006, том 410, № 3, с. 318–320

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

О СУММАХ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН БЕЗ СТЕПЕННЫХ МОМЕНТОВ

© 2006 г. С. В. Нагаев, В. И. Вахтель

Представлено академиком Ю.Г. Решетняком 29.03.2006 г.

Поступило 29.03.2006 г.

1. Пусть X, X_1, ... – независимые, одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что функция $V(x) = \mathrm{P}(X \geq x)$ является медленно меняющейся при $x \to \infty$, т.е.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{V(cx)}{V(x)} = 1 \tag{1}$$

для любого $c > 0$. Из этого условия следует, что для любого $t > 0$ $\mathrm{E}\{X^t; X > 0\} = \infty$, т.е. все степенные моменты бесконечны.

Положим $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $\overline{X}_n = \max\limits_{k \leq n} X_k$, X_n^* – максимальное по модулю слагаемое, т.е. $|X_n^*| = \max\limits_{k \leq n}|X_k|$.

Еще П. Леви [1] (см. также [2, с. 212]) обратил внимание на то, что при выполнении условия (1) абсолютная величина разности $S_n - X_n^*$ мала по сравнению с X_n^*, т.е. X_n^* вносит подавляющий вклад в сумму S_n. Если дополнительно предположить, что $X \geq 0$, то представляется весьма правдоподобным, что

$$\mathrm{P}(S_n < x) \sim \mathrm{P}(\overline{X}_n < x) = (1 - V(x))^n. \tag{2}$$

Если связать n и x условием $nV(x) = y$, где y – фиксированное положительное число, то мы приходим к приближенному равенству

$$\mathrm{P}(S_n < x) \sim e^{-y}.$$

Полагая здесь $x = V^{-1}\left(\frac{y}{n}\right)$, где V^{-1} – обратная к V функция, мы заключаем, что

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(nV(S_n) > y) = e^{-y}.$$

Таким образом, имеет место сходимость к невырожденному распределению при функциональной нормировке в терминах функции $V(x)$. Этот подход был реализован Д.А. Дарлингом [3], причем без ограничения $X \geq 0$.

Теорема А (Дарлинг). *Если $X \geq 0$ или $\mathrm{P}(X < -x) = o(V(x))$, то*

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(nV(S_n) < y;\ S_n \geq 0) = 1 - e^{-y}. \tag{3}$$

Если же левый хвост сравним с правым, т.е.

$$\frac{V(x)}{V(x) + \mathrm{P}(X < -x)} \to p \in (0, 1) \tag{4}$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(nW(S_n) < y) = 1 - pe^{-y/p} - qe^{-y/q}, \tag{5}$$

где $q = 1 - p$, $W(x) = V(x)I(x \geq 0) + \mathrm{P}(X < x)I(x < 0)$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения:

$$g^+(s) = \mathrm{E}\{e^{-sX} |\ X \geq 0\}, \quad g^-(s) = \mathrm{E}\{e^{sX} |\ X < 0\},$$

$$L^+(x) = \left[1 - g^+\left(\frac{1}{x}\right)\right]\mathrm{P}(X \geq 0),$$

$$L^-(x) = \left[1 - g^-\left(\frac{1}{x}\right)\right]\mathrm{P}(X < 0).$$

Через $R^{\pm}(x)$ обозначим обратную к $L^{\pm}(x)$ функцию.

В этих терминах теорему А можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Предположим, что функция $L^+(x)$ является медленно меняющейся и при некотором $p \in (0, 1)$ выполняется условие*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L^+(x)}{L^-(x)} = \frac{p^+}{p^-}, \tag{6}$$

где $p^+ = p$, $p^- = 1 - p$.

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin, Germany

Тогда для любого $x > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{P}\left(\pm S_n > R^{\pm}\left(\frac{x}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(nL^{\pm}(\pm S_n) < x;\ \pm S_n > 0) =$$

$$= p^{\pm}\left(1 - \exp\left\{-\frac{x}{p^{\pm}}\right\}\right). \tag{7}$$

Если $L^{\pm}(x)$ *медленно меняется и*

$$L^{\mp}(x) = o(L^{\pm}(x)), \tag{8}$$

то

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{P}\left(\pm S_n > R^{\pm}\left(\frac{x}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(nL^{\pm}(\pm S_n) < x;\ \pm S_n > 0) =$$

$$= 1 - e^{-x}. \tag{9}$$

Обратим внимание на то, что теорема 1 формулируется не в терминах функции распределения случайной величины X, а в терминах преобразований Лапласа положительной и отрицательной частей этой величины. Дело в том, что, согласно тауберовой теореме (см, например, [4, с. 503, формула (5.22)]), функция $V^{\pm}(x) := \mathrm{P}(\pm X > x)$ медленно меняется тогда и только тогда, когда $L^{\pm}(x)$ является медленно меняющейся, причем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{V^{\pm}(x)}{L^{\pm}(x)} = 1. \tag{10}$$

Отсюда легко следует, что условия (4) и (6) эквивалентны. Использование нормировки $L^{\pm}(x)$ обусловливается тем, что $L^{\pm}(x)$ является непрерывной строго убывающей функцией. Этот факт позволяет избежать некоторых трудностей, связанных с обращением функции $V^{\pm}(x)$.

Область $\{y: nL^{\pm}(y) > c\}$ при любом фиксированном c можно рассматривать как зону нормальных уклонений. Соответственно область $\{y: nL^{\pm}(y) < \varepsilon_n\}$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to 0$, можно считать зоной больших уклонений.

Следующее утверждение касается асимптотического поведения вероятностей больших уклонений суммы S_n.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (6) *или* (8) *и* $n, y \to \infty$ *так, что* $nL^{\pm}(y) \to 0$. *Тогда*

$$\lim_{n,y\to\infty} \frac{\mathrm{P}(\pm S_n > y)}{nL^{\pm}(y)} = 1. \tag{11}$$

Если медленно меняется функция $L(x) = L^{+}(x) + L^{-}(x)$, *то при условии* $nL(y) \to 0$

$$\lim_{n,y\to\infty} \frac{\mathrm{P}(|S_n| > y)}{nL(y)} = 1. \tag{12}$$

Заметим, что (11) можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{P}(L^{\pm}(\pm S_n) < L^{\pm}(y))}{nL^{\pm}(y)} \to 1.$$

Кроме того,

$$\frac{p^{\pm}(1 - e^{-nL^{\pm}(y)/p^{\pm}})}{nL^{\pm}(y)} \to 1,$$

если $nL^{\pm}(y) \to 0$.

Полагая теперь $x = nL^{\pm}(y)$, мы заключаем, что при $x \to 0$

$$\mathrm{P}(nL^{\pm}(\pm S_n) < x) \sim p^{\pm}\left(1 - \exp\left\{-\frac{x}{p^{\pm}}\right\}\right).$$

Таким образом, формула (12) годится и для описания вероятностей больших уклонений суммы S_n.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующий результат, связывающий слабую сходимость распределений со сходимостью соответствующих преобразований Лапласа.

Пусть ξ_n – произвольная последовательность неотрицательных случайных величин; $L(x)$ – непрерывная монотонная, медленно меняющаяся функция. Обозначим через $R(x)$ обратную к $L(x)$ функцию. Пусть a_n – последовательность положительных чисел, $\varphi(x)$ – неубывающая функция.

Теорема 3. *Если* $L(x)$ *возрастает и* $a_n \to \infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\exp\left\{-\frac{\xi_n}{R(a_n x)}\right\} = \varphi(x) \tag{13}$$

для всех точек непрерывности φ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(a_n^{-1} L(\xi_n) < x) = \varphi(x) \tag{14}$$

для всех точек непрерывности φ.

Если же функция $L(x)$ *является убывающей и* $a_n \to 0$, *то* (13) *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(a_n^{-1} L(\xi_n) < x) = 1 - \varphi(x) \tag{15}$$

на множестве непрерывности φ.

Прямое утверждение теоремы 3 в случае возрастающей $L(x)$ было сформулировано (правда, в несколько другой форме) и доказано в работе Хадсона и Сенеты [5].

Из теоремы 3 легко следует утверждение теоремы 1 в случае, когда $X \geq 0$. Общий случай сводится к этому частному. При доказательстве теоремы 2 используются верхние оценки для $\mathrm{P}(S_n \geq x)$ и $\mathrm{P}(|S_n| \geq x)$ из работы [6] и нижние оценки этих вероятностей, полученные в статьях [7, 8]. Вследствие медленного изменения функций $P(X \geq x)$ и $P(|X| \geq x)$ эти оценки смыкаются и дают асимптотически точный результат.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 03–51–5018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lévy P.* // J. Math. 1935. V. 14. P. 347–402.
2. *Lévy P.* Théorie de l'addition des variables aléatoires. P., 1937.
3. *Darling D.A.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 73. P. 95–107.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2. 751 с.
5. *Hudson I.L., Seneta E.* // J. Appl. Prob. 1977. V. 14. № 4. P. 836–842.
6. *Фук Д.Х., Нагаев С.В.* // Теория вероятностей и ее применения. 1971. Т. 16. В. 4. С. 660–675.
7. *Боровков А.А.* // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41. № 5. С. 997–1038.
8. *Нагаев С.В.* // Мат. заметки. 1983. Т. 34. В. 2. С. 309–313.