№ 6 ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК УзССР 1962 г.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

С. В. НАГАЕВ

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

Пусть D_G — класс функций распределения $G(x)$, абсолютно непрерывных для $x > B$ (B зависит от $G(x)$), с плотностью, которую можно представить в виде

$$G'(x) = \int_0^\infty e^{-xu} \varphi(u)\, du,$$

где $\varphi(u) \geqslant 0$ интегрируема, имеет вторую производную, удовлетворяющую условию Гёльдера и $\varphi'(0) = 0$. Распределения из класса D_G, вообще говоря, не удовлетворяют известному условию Крамера [1].

Теорема. Пусть ξ_i — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$, причем $M\xi_i = 0$, и $F_n(x)$ — функция распределения суммы

$$\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n .$$

Если существует $G(x) \in D_G$ такая, что для любых $b > a > B$

$$\operatorname*{Var}_{a \leqslant x \leqslant b} \left[F(x) - G(x)\right] \leqslant \int_a^b \frac{\psi(x)}{x^2} G(x)\, dx, \tag{1}$$

где $\psi(x)$ интегрируема на (B, ∞), то

$$1 - F_n(x) = n(1 - F(x))(1 + o(1))^{*)}$$

для x таких, что

$$nu_x^2 = o(1), \tag{2}$$

где u_x — решение уравнения

$$u_x\, e^{xu_x}\bigl(1 - G(x)\bigr) = 1. \tag{3}$$

Например, если $\varphi(u) \sim u^\alpha$, $\alpha > 2$,

---

*) Аналогичное представление получено в работе [3] при условии, что

$$1 - F(x) = \frac{A_a}{x^a} + \frac{A_{a+1}}{x^{a+1}} + \cdots + \frac{A_{4a+5}}{x^{4a+5}} + O\left(\frac{1}{x^{4a+5+\varepsilon}}\right),$$

где $a \geqslant 3$ — целое число, A_j — постоянные.

при $u \to 0$*), то равенство (2) имеет место для $x > \sqrt{n}\,\rho(n)\ln n$, где $\rho(n)$ — произвольная функция, такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\rho(n) = \infty.$$

Недавно В. В. Петров [4] получил при $0 \leqslant x \leqslant n^{\alpha}/\rho(n)$, где $\alpha < 1/2$, асимптотическое выражение для $1 - F_n(x)$ того же типа, что и в работе Крамера [1], в предположении, что

$$M\exp|\xi_1|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}} < \infty. \tag{4}$$

Если наряду с условием (4) выполняется и условие (2), то несложные вычисления показывают, что x, удовлетворяющие (3), возрастают быстрее, чем n^{α}.

Вопрос о больших уклонениях для промежуточных значений остается открытым.

Доказательство.

Пусть

$$G'(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\varphi(t)\,dt.$$

Положим

$$\overline{F}_y(x) = \begin{cases} F(x), & x \leqslant y, \\ F(y), & x > y, \end{cases}$$

$$\overline{G}_y(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant y, \\ G(x) - G(y), & x > y, \end{cases}$$

$$F_y(x) = \overline{F}_y(x) + \overline{G}_y(x).$$

Если $Q(x)$ — произвольная функция распределения, то через $Q^{(n)}(x)$ будет обозначаться ее n-ая свертка.

Нетрудно видеть, что

$$F_y^{(n)}(x) = \overline{F}_y^{(n)}(x) + n\overline{F}_y^{(n-1)} * \overline{G}_y(x) + o\big(n(1 - G(y))\big),$$

$$F^{(n)}(x) = \overline{F}_y^{(n)}(x) + n(F - \overline{F}_y) * \overline{F}_y^{(n-1)}(x) + o\big(n(1 - F(y))\big).$$

С другой стороны, в силу условия (1) имеем

$$\sup_x \left|\overline{G}_y(x) + \overline{F}_y(x) - F(x)\right| = o\big(1 - F(y)\big).$$

Поэтому

$$1 - F^{(n)}(x) = 1 - F_y^{(n)}(x) + o\big(n(1 - F(y))\big). \tag{5}$$

Пусть $f_y(z)$ — производящая функция моментов $F_y(x)$.

Очевидно,

$$f_y(z) = \int_{-\infty}^{y} e^{zx}dF(x) + e^{zy}\int_0^{\infty}\frac{e^{-yt}\varphi(t)}{t - z}\,dt.$$

---

*) При таком же качественно условии в работе [2] были доказаны локальные предельные теоремы.

Положим

$$f_y^+(z)=\lim_{z\to u} f_y(z),\quad \operatorname{Im} z>0,\quad \operatorname{Im} u=0,$$

$$f_y^-(z)=\lim_{z\to u} f_y(z),\quad \operatorname{Im} z<0,\quad \operatorname{Im} u=0.$$

Нетрудно видеть, что

$$1-F_y^{(n)}(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^c e^{-yu}\left[e^{nK_y^+(u)}-e^{nK_y^-(u)}\right]\frac{du}{u}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{c-iT}^{c+iT} e^{-yz} f_y^n(z)\,\frac{dz}{z}, \tag{6}$$

где

$$K_y^+(u)=\ln f_y^+(u),\quad K_y^-(u)=\ln f_y^-(u)$$

(имеется в виду главная ветвь функции $\ln z$).

Далее

$$1-e^{n\left[K_y^+(u)-K_y^-(u)\right]}+n\left[K_y^+(u)-K_y^-(u)\right]=$$

$$=O\left(n^2\left|K_y^+(u)-K_y^-(u)\right|^2\right) \tag{7}$$

и

$$K_y^+(u)-K_y^-(u)=2\pi i\varphi(u)+O\left(\varphi(u)\,L_y(u)\right), \tag{8}$$

здесь

$$L_y(u)=\sup_{0<t\leqslant u}\max\left[\left|f_y^+(u)-1\right|,\ \left|f_y^-(u)-1\right|\right].$$

Оценим теперь $f_y(z)$ для $0\leqslant Re z\leqslant u_y$.

Очевидно,

$$f_y''(z)=\int_0^y x^2e^{zx}d\left[F(x)-G(x)\right]+\int_{-\infty}^0 x^2e^{zx}dF(x)+g''(z), \tag{9}$$

где

$$g(z)=\int_0^\infty\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt.$$

Для $x\leqslant y$ получаем

$$e^{u_yx}G'(x)\leqslant e^{u_yy}\int_0^{u_y}e^{-yu}\varphi(u)\,du+\int_{u_y}^\infty\varphi(u)\,du<$$

$$<u_y\,e^{yu_y}\int_0^{u_y}e^{-yt}\,\frac{\varphi(u)}{u}\,du+\int_{u_y}^\infty\varphi(u)\,du<1+G'(0). \tag{10}$$

Из неравенства (10) в силу (1) вытекает, что для $0\leqslant u\leqslant u_y$ и $M>B$

имеет место

$$\left|\int_0^y x^2\left(e^{(u+it)x}-e^{itx}\right)d\left[F(x)-G(x)\right]\right|<$$

$$<\int_0^M x^2\left|e^{(u+it)x}-e^{itx}\right|d\left[F(x)+G(x)\right]+\left[2+G'(0)\right]\int_M^\infty \psi(x)\,dx. \qquad (11)$$

Заметим, что $g''(z)$ непрерывна в области, которая получается при удалении из плоскости положительной полуоси, поскольку $\varphi''(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера (см., например, работу [5], стр. 40).

Поэтому из (9) и (11) следует, что $f''_y(z)$ ограничена для $0\leqslant \leqslant Rez\leqslant u_y$ и

$$\lim_{\substack{u\to 0,\ y\to 0\\ 0\leqslant u\leqslant u_y}}\left|f''_y(u+it)-f''_y(it)\right|=0 \qquad (12)$$

равномерно относительно t.
Здесь

$$f''_y(0)=\lim_{z\to 0} f_y(z),$$

где $z\to 0$ по любому пути, не пересекающему положительную полуось.

Далее, в силу условия (1) имеем

$$f'_y(0)=\int_y^\infty xd\left[G(x)-F(x)\right]=0\left(1-G(y)\right), \qquad (13)$$

где

$$f'_y(0)=\lim_{z\to 0} f'_y(z).$$

Поскольку $\varphi'(0)=0$, то

$$\varphi(u)=O(u^2) \qquad (14)$$

и, следовательно,

$$1-G(y)=O\left(\frac{1}{y^2}\right) \qquad (15)$$

при $y\to\infty$.

Если y удовлетворяет условию (2), то

$$u_y=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Тогда вследствие (3)

$$y/\sqrt{n}\to\infty. \qquad (16)$$

Таким образом, в силу (15) и (16) получаем

$$n\left(1-G(y)\right)=o(1), \qquad (17)$$

если

$$\lim_{n\to\infty} nu_y^2=0.$$

Нетрудно видеть, что

$$K_y^{\pm}(u+it) = K_y'(0)(u+it) + K_y''(0)(u^2-t^2+2it) + o(u^2+t^2), \tag{18}$$

где

$$K_y'(0) = K_y^{\pm'}(0) = f_y'(0), \quad K_y''(0) = K^{\pm''}(0) = f_y''(0) - f_y'^2(0) \geqslant 0.$$

Из (13), (17) и (18) вытекает, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{u \leqslant u_y} \left| e^{nK_y^{\pm}(u+it)} \right| < \infty \tag{19}$$

для $|t| < \alpha$, где α достаточно мало, и

$$e^{nK_y^{\pm}(u)} = 1 + o(u) + O(nu^2), \tag{20}$$

если y удовлетворяет условию (2).

Далее ввиду (7), (8) и (20) имеет место

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{u_y} e^{-yu}\left[e^{nK_y^{+}(u)} - e^{nK_y^{-}(u)}\right]\frac{du}{u} =$$

$$= n\int_0^{u_y} e^{-yu}\varphi(u)\frac{du}{u} + o\left(n\int_0^{u_y} e^{-yu}\varphi(u)\,du\right) +$$

$$+ O\left(n^2\int_0^{u_y} e^{-yu}u\varphi(u)\,du\right) + O\left(n^2\int_0^{u_y} e^{-yu}\frac{\varphi^2(u)}{u}\,du\right). \tag{21}$$

Очевидно,

$$\int_{u_y}^{\infty} e^{-yu}\varphi(u)\frac{du}{u} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-yu_y}\sup_{u<b}\frac{\varphi(u)}{u}\int_0^{\infty} e^{-yu}du + e^{-yb}\int_b^{\infty}\frac{\varphi(u)}{u}\,du \tag{22}$$

при любом $b > 0$.

Поэтому

$$\int_0^{u_y} e^{-yu}\varphi(u)\frac{du}{u} = [1 - G(y)](1 + o(1)). \tag{23}$$

С другой стороны,

$$\int_0^{u_y} e^{-yu}u\varphi(u)\,du \leqslant u_y^2\int_0^{u_y} e^{-yu}\frac{\varphi(u)}{u}\,du \tag{24}$$

и вследствие (14)

$$\int_0^{u_y} e^{-yu}\frac{\varphi^2(u)}{u}\,du \leqslant u_y^2\int_0^{u_y} e^{-yu}\frac{\varphi(u)}{u}\,du. \tag{25}$$

Из (21) и (23)—(25) получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{u_y} e^{-yu}\left[e^{nK_y^+(u)} - e^{nK_y^-(u)}\right]\frac{du}{u} = n\left(1 - G(y)\right)(1 + o(1)). \qquad (26)$$

Оценим теперь

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{u_y - iT}^{u_y + iT} e^{-yz}\frac{f^n(z)}{z}\,dz.$$

Положим

$$f_A(y, z) = \int_A^y e^{zx}d\left[F(x) - G(x)\right] + \int_{-\infty}^A e^{zx}dF(x).$$

Очевидно,

$$f_y(z) = f_A(y, z) + g_A(z), \qquad (27)$$

где

$$g_A(z) = e^{Az}\int_0^\infty \frac{e^{-Au}}{u - z}\varphi(u)\,du.$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{u_y\to 0} f_A(y, u_y + it) = \int_A^\infty e^{itx}d\left[F(x) - G(x)\right] + \int_0^A e^{itx}\,dF(x) \qquad (28)$$

и, следовательно,

$$\lim_{u_y\to 0} f_y(u_y + it) = f(it) \qquad (29)$$

равномерно относительно t.

В силу (11)

$$\lim_{u_y\to 0} f_A(y, u_y + it) = \int_A^y e^{itx}\,d\left[F(x) - G(x)\right] + \int_{-\infty}^A e^{itx}dF(x) \qquad (30)$$

равномерно относительно t.

Из условия (1) следует, что $F(x)$ имеет абсолютно непрерывную компоненту. Поэтому

$$\sup_{t\geqslant a}\left|f_y(u_y + it)\right| < 1 \qquad (31)$$

для достаточно малых u_y.

Выберем A так, чтобы

$$\operatorname*{var}_{x>A}\left[F(x) - G(x)\right] < 1 - F(A).$$

Тогда ввиду (30) при достаточно малых u_y

$$\sup_t f_A(y, u_y + it) < 1. \qquad (32)$$

Очевидно,

$$\left|f_y^n(z) - f_A^n(y, z)\right| < \left|g_A(z)\right| \sum_{k=0}^{n-1}\left|f_A^k(y, z) f_y^{n-k-1}(z)\right|. \qquad (33)$$

Из (31)—(33) получаем

$$\left|f_y^n(u_y+it)-f_A^n(y,\ u_y+it)\right|<\left|g_A(u_y+it)\right|n\rho^n, \tag{34}$$

где $|t|>\alpha$, $u_y<\beta$, а $\rho<1$ — некоторая постоянная, зависящая от α и β.

Легко видеть, что для $u_y<\beta$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{u_y-iT}^{u_y+iT} e^{-yz}f_A^n(y,\ z)\frac{dz}{z}\right|<$$

$$<e^{-yu_y}\left[\operatorname*{var}_{A<x<y}\int\limits_A^x e^{u_yx}\,d\left[F(x)-G(x)\right]+F(A)\right]^n<e^{-yu_y}\rho^n. \tag{35}$$

Далее

$$\int\limits_{t\geqslant\alpha}\frac{|g_A(u_y+it)|}{t}dt<C_1|\ln\alpha| \tag{36}$$

и в силу (19) для $|t|<\alpha$

$$\left|f_y^n(u_y+it)-f_A^n(y,\ u_y+it)\right|<C_2\left|g_A(u,+it)\right|n,$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные.

Отсюда

$$\left|\int\limits_{|t|<\alpha}\frac{f_y^n(z)-f_A^n(y,\ z)}{z}e^{-yz}dz\right|<C_3e^{-yu}\ \ln u_y|. \tag{37}$$

Из неравенств (35) — (37) выводим

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{u_y-iT}^{u_y+iT}e^{-yz}\frac{f^n(z)}{z}dz=o\left(n\left(1-\mathfrak{G}(y)\right)\right). \tag{38}$$

Из соотношений (6), (26) и (38) следует утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cramer H. Sur un nouveau théoréme limité de la théorie des probabilités, Actuel. sci et ind., N 736, Paris (русский перевод: УМН, X (1944), 166—178).
2. Нагаев С. В. „Вестник ЛГУ", 1962, № 1, 80—88.
3. Линник Ю. В. On the probability of large deviations for the sums of indepedent variables, Proc. of the Fourth Symp. on Math. Stat. and Probability, vol. 2, 289—306, 1961.
4. Петров В. В. ДАН СССР, 1961, 138, № 4, 779—780.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, М., ГИТТЛ, 1958.

Институт математики
им. В. И. Романовского
АН УзССР

Поступило
5.VII 1962 г.

С. В. Нагаев

ҚАТТА ОҒИШЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ ИНТЕГРАЛ ТЕОРЕМА

Автор Крамернинг аниқ шартлари бажарилмаган ҳолда катта оғишлар ҳақидаги чегаравий интеграл теоремни исботлайди.