ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том XVIII 1973 Выпуск 1

ОБ УСИЛЕНИИ ОЦЕНОК ТИПА ЛЯПУНОВА (СЛУЧАЙ БЛИЗОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛАГАЕМЫХ К НОРМАЛЬНОМУ)

С. В. НАГАЕВ, В. И. РОТАРЬ

Введение. Пусть $\{X_j\}_{j=1}^n$ — последовательность независимых случайных величин (с. в.),

$$F_j(x) = \mathbf{P}(X_j < x); \quad \mathbf{M}X_j = 0, \ \mathbf{M}X_j^2 = \sigma_j^2, \quad B^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, \ \mathbf{M}|X_j|^3 = \mu_j < \infty.$$

Пусть

$$\zeta_n = \sum_{j=1}^n X_j/B, \quad \overline{F}(x) = \mathbf{P}(\zeta_n < x),$$

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad \Delta(x) = \overline{F}(x) - \Phi(x), \quad \delta = \sup_x |\Delta(x)|.$$

Условимся символами L и b с индексами и без индексов обозначать абсолютные положительные постоянные.

Задача получения оценок величины δ, правая часть которых стремилась бы к нулю по мере приближения распределений слагаемых к нормальному, по-видимому, впервые рассматривалась в [1]. (Ранее в [2] исследовался случай сближения с устойчивыми законами.)

В частности, в [1] и [2] для пары распределений (F, G) была введена в рассмотрение величина

$$\widetilde{\nu}^{(r)}(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r |(F-G)(dx)|,$$

названная r-м абсолютным псевдомоментом, и получена оценка ([1])

$$\delta \leqslant L_{01} (\widetilde{\Lambda}/B^3)^{1/4}, \tag{0.1}$$

где $L_{01} = 0{,}28845$, $\widetilde{\Lambda} = \sum_{j=1}^n \widetilde{\nu}_j$, а $\widetilde{\nu}_j = \widetilde{\nu}^{(3)}\{F_j(x), \Phi(x/\sigma_j)\}$.

В [3] наряду с псевдомоментом $\widetilde{\nu}^{(r)}$ рассматривалась иная характеристика распределений, более естественная при оценках близости распределений в равномерной метрике. Введенная там величина лишь отсутствием множителя r отличается от величины

$$\nu^{(r)}(F, G) = r \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{r-1} |F(x) - G(x)| dx,$$

которую мы в дальнейшем будем называть r-м абсолютным разностным моментом пары (F, G). В [3], в частности, отмечалось, что

$$\nu^{(r)}(F, G) \leqslant \tilde{\nu}^{(r)}(F, G).$$

При оценке близости распределений двух сверток в метрике Леви в [3] было получено неравенство, отличающееся от (0.1) заменой псевдомоментов разностными моментами.

В общем случае из оценок типа (0.1) не следует оценка теоремы Берри-Эссеена ([4]):

$$\delta \leqslant L_{02}\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j\right) \Big/ B^3. \tag{0.2}$$

Тем не менее, как будет показано ниже, оценка (0.1) в рамках используемой информации о распределениях с. в. X_j точна.

Прежде всего заметим, что существует последовательность функций распределения $G_m(x)$ $(m = \overline{1, \infty})$, такая, что $\tilde{\nu}_m = \tilde{\nu}^{(3)}(G_m, \Phi) \to 0$ при $m \to \infty$, в то время как $\sup_x |G_m(x) - \Phi(x)| \geqslant b_1 \tilde{\nu}_m^{1/4}$. Для построения примера достаточно положить $G_m(x) = \Phi(x)$ при $|x| > 1/m$; $G_m(x) = \Phi(-1/m) + \alpha_1$, где $\alpha_1 = m^2 \int\limits_0^{1/m} x^2 d\Phi(x)$, при $-1/m < x < 0$; $G_m(x) = \Phi(-1/m) + \alpha_1 + \alpha_2$, где $\alpha_2 = 2\int\limits_0^{1/m} d\Phi(x) - 2\alpha_1$, при $0 < x < 1/m$. (На существование такого типа последовательностей функций распределения нам указал В. В. Сазонов.)

Пусть теперь $\sigma_2 = \ldots = \sigma_n = 0$, а $\mathbf{P}(X_1 < x) = G_m(x)$. Тогда оценка (0.1) является правильной. Заметим, что в этом случае $\sigma_1 = 1$. Менее тривиальный пример с $(\sigma_2, \ldots, \sigma_n \neq 0)$ также нетрудно построить, если положить дисперсии $\sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ достаточно малыми, с. в. $X_2, \ldots, X_n$ нормально распределенными и воспользоваться известными теоремами о сглаживании (см., например, [4]).

Описанный выше случай носит характер крайнего. В других случаях более точными оказываются оценки иного типа. Так, для одинаково распределенных слагаемых методом композиций в [5] при $\sigma_1 = 1$ была получена оценка

$$\Delta(x) \leqslant L_{03} \max\{\tilde{\nu}, \tilde{\nu}^{1/4}\} / \sqrt{n}, \tag{0.3}$$

где $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}^{(3)}(F_j, \Phi)$. Легко видеть, что из (0.3) оценка (0.2) следует.

Отметим также, что в [6] методом композиций для одинаково распределенных многомерных слагаемых получены оценки, которые в одномерном случае сводятся к оценке (0.3) с добавлением множителя $(1 + |x|^3)^{-1}$.

В настоящей работе для общего случая неодинаково распределенных слагаемых получены оценки величины δ, из которых, в частности, следуют неравенства (0.1) — (0.3). При выводе этих оценок используется метод характеристических функций.

Некоторые из результатов кратко приведены в [7].

Авторы выражают благодарность В. М. Золотареву, указавшему на неточность в доказательстве леммы 1.

1. Формулировка и обсуждение результатов. По-видимому, наиболее наглядными следствиями из сформулированных ниже теорем являются следующие оценки.

Пусть $C=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^3$, $\nu_j=\nu^{(3)}(F_j(x),\,\Phi(x/\sigma_j))$, $\Lambda=\sum_{j=1}^{n}\nu_j$. *Тогда*

$$\delta\leqslant L_{11}\max\{\Lambda/B^3;\ (\Lambda/B^3)^{1/4}(C/B^3)^{3/4}\}. \tag{1.1}$$

Далее, если $B^2/n=1$, $\nu=\Lambda/n$ *и* $\min_j\sigma_j\geqslant\nu^{1/4}$, *то*

$$\delta\leqslant 4{,}2\nu^{1/4}/\sqrt{n}. \tag{1.1*}$$

Условие $B^2=n$, конечно, не ограничивает общности.

Чтобы привести полученные оценки в общем виде, нам понадобятся дополнительные обозначения.

Условимся, что $\max\sigma_j=\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\ldots\geqslant\sigma_n=\min\sigma_j$. Пусть $\sigma(u)$ — ломаная, определенная на $[1,\,n+1]$ с узлами в точках $(1,\,\sigma_1)$, $(2,\,\sigma_2)$, …, $(n,\,\sigma_n)$, $(n+1,\,0)$; $B^2(u)=\sigma^2(u)\,[u]+\sum_{j=[u]+1}^{n}\sigma_j^2$ ($[u]$ — целая часть u), $C(u)=\sigma^3(u)\,[u]+\sum_{j=[u]+1}^{n}\sigma_j^3$. Отметим, что $B(u)$ и $C(u)$ — непрерывные функции от u.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\delta\leqslant L_{12}\min_u\{\Lambda/B^3(u)+(\Lambda/B^3)^{1/4}(C(u)/B^3(u))^{3/4}\}. \tag{1.2}$$

Следствие 1.1. *Поскольку* $B(1)=B$, *а* $C(1)=C$, *из* (1.2) *вытекает оценка* (1.1).

Обозначим первое слагаемое в фигурных скобках правой части (1.2) $A_1(u)$, а второе слагаемое — $A_2(u)$. Отметим, что $A_1(u)$ не убывает, а $A_2(u)$ не возрастает с ростом u. (Последнее, например, следует из того, что при нецелом u $A_2(u)$ дифференцируема и ее производная неположительна.) Далее, при $\Lambda\leqslant C$ $A_1(1)\leqslant A_2(1)$ и существует решение уравнения $A_1(u)=A_2(u)$. Последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$\Lambda B=B(u)\,C(u). \tag{1.3}$$

Следствие 1.2. *Пусть* $\Lambda\leqslant C$ *и* u_1 *— какое-либо решение уравнения* (1.3). *Тогда*

$$\delta\leqslant L_{13}\frac{\Lambda}{B^3(u_1)}, \tag{1.4}$$

причем (1.4) *эквивалентно* (1.2) *с точностью до постоянного множителя.*

В ряде случаев может оказаться более удобной эквивалентная (1.2) с точностью до постоянного множителя оценка, которую дает

Теорема 2. *Справедливо неравенство*

$$\delta \leqslant L_{14} \min_u \left\{ \frac{\Lambda}{B^3(u)} + \frac{\sigma(u)}{B} \right\}. \tag{1.5}$$

Подсчет L_{14}, который мы здесь опустим, показывает, что $L_{14} \leqslant 2{,}1$. Если $\nu = \Lambda/n$, и

$$\sigma_n \geqslant \nu^{1/4} (B/\sqrt{n})^{1/4}, \tag{1.6}$$

то $\Lambda/B^3(n) \leqslant \sigma(n)/B$, откуда уже можно получить

Следствие 2.1. *При условии* (1.6)

$$\delta \leqslant 2L_{14} (\Lambda/B^3)^{1/4} n^{-3/8}. \tag{1.7}$$

Если $B^2/n = 1$, (1.7) *сводится к оценке* (1.1*), *а условие* (1.6) *к условию* $\sigma_n \geqslant \nu^{1/4}$.

Точно так же, как из (1.2) следовало (1.4), из (1.5) вытекает

Следствие 2.2. *Пусть* $\Lambda \leqslant \sigma_1 B^2$ *и* u_2 — *решение уравнения*

$$\Lambda B = B^3(u)\,\sigma(u). \tag{1.8}$$

Тогда

$$\delta \leqslant L_{15} \Lambda / B^3(u_2), \tag{1.9}$$

где $L_{15} \leqslant 4{,}2$, *причем* (1.9) *эквивалентно* (1.5) *с точностью до постоянного множителя.*

Эквивалентность оценок (1.2) и (1.5) мы докажем позже, а сейчас отметим, что теорема 2 интересна, в частности, тем, что ее непосредственное доказательство много проще, чем доказательство теоремы 1. Однако, поскольку непосредственное доказательство (1.2) представляет, по мнению авторов, самостоятельный методический интерес, мы докажем теоремы 1 и 2 отдельно.

Сделаем теперь несколько замечаний к теоремам.

Замечание 1. Поскольку $C \leqslant B^3$, из (1.1) следует (0.1). Нетрудно проверить, что в случае одинаково распределенных слагаемых (1.1) сводится к (0.3), и, так как $\nu_j \leqslant \mu_j + 4\sigma_j^3/\sqrt{2\pi}$ и $\sigma_j{}^3 \leqslant \mu_j$, из (1.1) следует и (0.2).

Замечание 2. Если $\Lambda \geqslant C$, то из (1.2) вытекает, что

$$\delta \leqslant L_{16} \Lambda / B^3. \tag{1.10}$$

Эта же оценка следует и из (1.5), если $\Lambda \geqslant \sigma_1 B^2$. Заметим, что это тривиальные случаи, так как при $\Lambda \geqslant \sigma_1 B^2$ (и при $\Lambda \geqslant C$) (1.10) следует из (0.2), поскольку $\mu_j \leqslant \nu_j + 4\sigma_j^3/\sqrt{2\pi}$.

Замечание 3. Пусть $l = [u_2]$, $\sigma_* = \sigma(u_2)$. Так как $\sigma_*/B = \Lambda/B^3(u_2) \leqslant \Lambda/(l\sigma_*^2)^{3/2}$, то $\sigma_* \leqslant (\Lambda B)^{1/4} l^{-3/8}$ и при условии $\Lambda \leqslant \sigma_1 B^2$

$$\delta \leqslant L_{17} \frac{\nu_*^{1/4}}{\sqrt{l}},$$

где $\nu_* = \sqrt{l}\Lambda/B^3$, а $L_{17} \leqslant 4{,}2$.

Докажем теперь эквивалентность (1.2) и (1.5). Ограничимся случаем $\Lambda \leqslant C$ (и, следовательно, $\Lambda \leqslant \sigma_1 B^2$) и докажем эквивалентность (1.4) и

(1.9). Из (1.3) и (1.8) нетрудно получить, что $u_1 \leqslant u_2$, и, следовательно, $B(u_1) \geqslant B(u_2)$.

Покажем, что

$$B(u_1) \leqslant 2B(u_2). \tag{1.11}$$

Если

$$\sum_{j=[u_2]+1}^{n} \sigma_j^2 \geqslant \sigma^2(u_1)[u_1] + \sum_{j=[u_1]+1}^{[u_2]} \sigma_j^2,$$

то

$$B^2(u_1) = \sigma^2(u_1)[u_1] + \sum_{j=[u_1]+1}^{[u_2]} \sigma_j^2 + \sum_{j=[u_2]+1}^{n} \sigma_j^2 \leqslant 2 \sum_{j=[u_2]+1}^{n} \sigma_j^2 \leqslant 2B(u_2).$$

Пусть теперь

$$\sum_{j=[u_2]+1}^{n} \sigma_j^2 \leqslant \sigma^2(u_1)[u_1] + \sum_{j=[u_1]+1}^{[u_2]} \sigma_j^2.$$

Докажем, что тогда

$$\sigma(u_2) B^2(u_2) \leqslant 2C(u_1). \tag{1.12}$$

Действительно,

$$\sigma(u_2) B^2(u_2) \leqslant \sigma(u_2)\left\{\sigma^2(u_2)[u_2] + \sigma^2(u_1)[u_1] + \sum_{j=[u_1]+1}^{[u_2]} \sigma_j^2\right\} =$$

$$= \sigma(u_2)\left\{(\sigma^2(u_2)[u_1] + \sigma^2(u_1))[u_1] + \sigma^2(u_2)([u_2] - [u_1]) + \sum_{j=[u_1]+1}^{[u_2]} \sigma_j^2\right\} \leqslant 2C(u_1).$$

Кроме того, из (1.3) и (1.8) следует, что

$$\sigma(u_2) B^3(u_2) = C(u_1) B(u_1). \tag{1.13}$$

Из (1.13), (1.12) следует (1.11).

Остановимся теперь на возможности увеличения фигурирующего в оценках степенного показателя $^1/_4$. В общем случае, например, при $n = 1$, этого сделать нельзя. Однако, ряд соображений указывает на то, что при достаточно больших n оценки в этом направлении можно улучшить. Так, справедлива

Теорема 3. *Пусть с. в.* X_j $(j = \overline{1,n})$ *одинаково распределены,* $\sigma_1 = 1$, $\nu = \nu_j \leqslant 1$, *Тогда*

$$\delta \leqslant 6 \frac{\nu^{1/3}}{\sqrt{n}} + \frac{0{,}23 \exp\{-0{,}2n\}}{n}. \tag{1.14}$$

Следствие 3.1. *Для всех* n, *таких, что* $\exp\{-0{,}2n\}/\sqrt{n} \leqslant \nu^{1/3}$,

$$\delta \leqslant 6{,}23\nu^{1/3}/\sqrt{n}. \tag{1.15}$$

2. Вспомогательные результаты. Пусть $z = (z_1, \ldots, z_m)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, где $m \geqslant 2$,

$$\varphi(z, \beta) = \prod_{j=1}^{m} (e^{-z_j} + \beta_j), \quad M = \max_{z,\beta} \varphi(z, \beta),$$

где $\max\limits_{z,\beta} \varphi(z, \beta)$ берется при условиях

$$z_j \geqslant 0,\ \beta_j \geqslant 0\ (j = \overline{1, m}), \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} z_j = D, \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} z_j^{3/2} = E, \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j = K, \tag{2.4}$$

причем D и E таковы, что $U^{(m)}$ — множество всех z, определяемых условиями (2.1) — (2.3),— не пусто.

Лемма 1. *Пусть*

$$\varkappa = (3E/D)^2, \tag{2.5}$$

$$q = [D^3/27E^2]. \tag{2.6}$$

Тогда

$$M \leqslant (e^{-\varkappa} + K_1)^q\,(1 + K_2)^{m-q}, \tag{2.7}$$

где K_1 и K_2 — некоторые неотрицательные числа, такие, что $K_1 q + K_2(m - q) = K$.

Доказательство. Точка z является внутренней точкой множества (2.1) тогда и только тогда, когда все ее координаты строго положительны. Допустим, что экстремальная точка z внутренняя. Используя метод поиска условного экстремума Лагранжа имеем:

$$\left.\begin{aligned} &-e^{-z_i}(e^{-z_j} + \beta_j)\prod_{k\neq i,j}(e^{-z_k} + \beta_k) + \gamma_1 + \frac{3}{2}\gamma_2 z_i^{1/2} = 0,\\ &-e^{-z_j}(e^{-z_i} + \beta_i)\prod_{k\neq i,j}(e^{-z_k} + \beta_k) + \gamma_1 + \frac{3}{2}\gamma_2 z_j^{1/2} = 0,\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

$$\left.\begin{aligned} &(e^{-z_i} + \beta_i)\prod_{k\neq i,j}(e^{-z_k} + \beta_k) + \gamma_3 = 0,\\ &(e^{-z_j} + \beta_j)\prod_{k\neq i,j}(e^{-z_k} + \beta_k) + \gamma_3 = 0,\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — некоторые постоянные, а (i, j) — выборка из совокупности $(1, \ldots, m)$. Из (2.8) и (2.9) нетрудно получить, что

$$\gamma_3(e^{-z_i} - e^{-z_j}) = \frac{3}{2}\gamma_2(z_j^{1/2} - z_i^{1/2}), \tag{2.10}$$

$$e^{-z_j} - e^{-z_i} = \beta_i - \beta_j. \tag{2.11}$$

Пусть $v_i = \sqrt{z_i}$, $\gamma_4 = 3\gamma_2/2\gamma_3$, $h_i = \exp\{-v_i^2\}$. Тогда (2.10) перепишется в виде

$$h_i - h_j = \gamma_4(v_i - v_j). \tag{2.10*}$$

Все точки на плоскости (h, v), удовлетворяющие условиям (2.10*), лежат на одной прямой. Но при $v > 0$ любая прямая пересекает кривую $h = \exp\{-v^2\}$ не более чем в трех точках. Последнее означает, что числа $z_1, \ldots, z_m$ можно разбить не более чем на три группы, в каждой из которых все z_i равны. Из (2.11) следует, что при $z_i = z_j$ и $\beta_i = \beta_j$.

Пусть теперь точка достижения максимума не внутренняя и для определенности $z_1, \ldots, z_l \neq 0$; $z_j = 0$ при $j = \overline{l+1, m}$. Зафиксировав β_j при $j = \overline{l+1, m}$, перейдем к «l-мерному случаю» и рассмотрим функцию $\varphi_1 = \prod\limits_{j=1}^{l} (\exp\{-z_i\} + \beta_j)$. Ясно, что сказанное о разбиении на три группы значений z_j, β_j при $j = \overline{1, l}$ остается верным. Итак, не нарушая общности, можно считать, что существует целое $p \leqslant m$, такое, что $z_j = z_1$ при $j = \overline{1, p}$ и $pz_1 \geqslant D/3$. Имеем:

$$M = (e^{-z_1} + \beta_1)^p \prod_{j=p+1}^{l} (e^{-z_j} + \beta_j) \prod_{j=l+1}^{m} (1 + \beta_j) \leqslant (e^{-z_1} + \beta_1)^p \prod_{j=p+1}^{m} (1 + \beta_j).$$

Далее, поскольку максимум $(1 + \beta_i)(1 + \beta_j)$ при фиксированной сумме $\beta_i + \beta_j$ достигается при $\beta_i = \beta_j$,

$$M \leqslant (e^{-z_1} + \beta_1)^p (1 + \beta')^{m-p},$$

где $\beta_1 p + \beta'(m - p) = K$.

Так как $pz_1 \geqslant D/3$ и $pz_1^{3/2} \leqslant E$, $z_1 \leqslant \varkappa = (3E/D)^2$.

Далее,

$$(e^{-z_1} + \beta_1)^p \leqslant \max{}' \prod_{j=1}^{p} (e^{-s_j} + \beta_1),$$

где $\max'$ берется при условиях $\sum\limits_{j=1}^{p} s_j = \tilde{D} = pz_1$ и $0 \leqslant s_j \leqslant \varkappa$. Но $\max'$ может достигаться только тогда, когда (с точностью до перестановки индексов) $s_i = \varkappa$ для всех $j = \overline{1, p_0}$, где $p_0 = [\tilde{D}/\varkappa]$, $s_{p_0+1} = \tilde{D} - \varkappa[\tilde{D}/\varkappa]$ и $s_j = 0$ для всех $j \geqslant p_0 + 2$. Последнее следует из того, что если s_i и s_j таковы, что $0 < s_i \leqslant s_j < \varkappa$, то

$$(e^{-s_i} + \beta)(e^{-s_j} + \beta) < (\exp\{-\min(\varkappa, s_i + s_j)\} + \beta) \times$$
$$\times (\exp\{-s_i - s_j + \min(\varkappa, s_i + s_j)\} + \beta).$$

Далее, $p_0 \geqslant q = [D^3/27E^2]$ и

$$M \leqslant (e^{-\varkappa} + \beta_1)^q (1 + \beta_1)^{p-q} (1 + \beta')^{m-p} \leqslant (e^{-\varkappa} + \beta_1)^q (1 + \beta'')^{m-q},$$

где $\beta_1 q + \beta''(m - q) = K$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $H \geqslant B$,

$$\chi(t) = \prod_{j=1}^{[u]} (\exp\{-\sigma^2(u) t^2/2\} + \nu_j t^3/6) \prod_{j=[u]+1}^{n} (\exp\{-\sigma_j^2 t^2/2\} + \nu_j t^3/6),$$

$$I(\varepsilon) = \Lambda \int_0^{\varepsilon} \chi(t) t^2 dt + 1/H\varepsilon.$$

Тогда для любого u, *такого, что* $1 \leqslant u < n + 1$,

$$\min_{0<\varepsilon\leqslant 1/\sigma(u)} I(\varepsilon)\leqslant L_{21}(\Lambda/B^3(u)+\sigma(u)/H).$$

Доказательство. Пусть $0\leqslant t\leqslant 1/\sigma(u)$. Тогда

$$e^{-\sigma^2(u)t^2/2}+\nu_j t^3/6\leqslant e^{-\sigma^2(u)t^2/2}(1+\sqrt{e}\nu_j t^3/6)\leqslant\exp\{-\sigma^2(u)t^2/2+\sqrt{e}\nu_j t^3/6\},$$

и при $j\geqslant[u]+1$

$$e^{-\sigma_j^2t^2/2}+\nu_j t^3/6\leqslant e^{-\sigma_j^2t^2/2}(1+\sqrt{e}\nu_j t^3/6)\leqslant\exp\{-\sigma_j^2t^2/2+\sqrt{e}\nu_j t^3/6\}.$$

Отсюда получаем

$$\chi(t)\leqslant\exp\{-B^2(u)t^2/2+\sqrt{e}\Lambda t^3/6\}. \tag{2.12}$$

Случай I. Пусть $\Lambda\geqslant\sigma(u)B^2(u)$. Положим $\varepsilon=B^2(u)/\Lambda\leqslant\leqslant 1/\sigma(u)$. Тогда при $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$

$$\chi(t)\leqslant\exp\{-0{,}2B^2(u)t^2\}.$$

Отсюда легко следует, что при $\varepsilon=B^2(u)/\Lambda$

$$I(\varepsilon)\leqslant L_{22}(\Lambda/B^3(u)+\Lambda/HB^2(u))\leqslant 2L_{22}\Lambda/B^3(u).$$

Случай II. Пусть теперь $\Lambda<\sigma(u)B^2(u)$. Положим $\varepsilon=1/\sigma(u)$. Тогда при $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$

$$\chi(t)\leqslant\exp\{-(B^2(u)/2-\sqrt{e}\Lambda/6\sigma(u))t^2\}\leqslant\exp\{-0{,}2\,B^2(u)t^2\}$$

и

$$I(\varepsilon)\leqslant L_{23}\{\Lambda/B^3(u)+\sigma(u)/H\}.$$

Лемма доказана.

При доказательстве теоремы 1 мы используем обе доказанные выше леммы. Для доказательства теоремы 2 нам будет достаточно леммы 2.

3. Доказательства теорем 1 и 2. Пусть

$$f_j(t)=\mathrm{M}\exp\{itX_j\},\ f(t)=\prod_{j=1}^{n}f_j(t);$$
$$g(t)=\exp\{-t^2/2\},\ g_j(t)=g(\sigma_j t);$$
$$h(t)=f(t)-g(Bt).$$

Мы воспользуемся следующим вариантом хорошо известного неравенства Эссеена ([4]):

$$\delta\leqslant(2/\pi)\int_0^{\varepsilon}|h(t)/t|\,dt+24/\pi\sqrt{2\pi}B\varepsilon, \tag{3.1}$$

а также элементарным неравенством

$$|h(t)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|f_j(t)-g_j(t)|\cdot|w_j(t)|, \tag{3.2}$$

где $w_j(t)=(g_1\ldots g_{j-1}f_{j+1}\ldots f_n)(t)$.

Далее везде будем полагать $t \geqslant 0$. Интегрируя по частям, получаем:

$$|f_j(t) - g_j(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx + t^2x^2/2)\, d(F_j(x) - \Phi(x/\sigma_j)) \right| =$$

$$= \left| t \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx)(F_j(x) - \Phi(x/\sigma_j))\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} t^3 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |F_j(x) - \Phi(x/\sigma_j)|\, dx = \nu_j t^3/6. \tag{3.3}$$

Из (3.3) получаем, что

$$|f_j(t)| \leqslant g_j(t) + \nu_j t^3/6. \tag{3.4}$$

Пусть $1 \leqslant u < n + 1$. Из (3.4) и того, что $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n$, легко следует, что

$$|w_j(t)| \leqslant \prod_{j=2}^{n} (e^{-\sigma_j t^2/2} + \nu_j t^3/6) \leqslant \prod_{j=2}^{[u]} (e^{-\sigma^2(u)t^2/2} +$$

$$+ \nu_j t^3/6) \prod_{j=[u]+1}^{n} (e^{-\sigma_j^2 t^2/2} + \nu_j t^3/6) = \chi^*(t). \tag{3.5}$$

Из (3.1) — (3.3) и (3.5) находим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\delta \leqslant L_{31} \left\{ \Lambda \int_0^{\varepsilon} t^2 \chi^*(t)\, dt + 1/B\varepsilon \right\}. \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Очевидно, что при $t \leqslant 1/\sigma(u)$

$$\chi^*(t) \leqslant \sqrt{e}\, \chi(t), \tag{3.7}$$

где $\chi(t)$ — функция, фигурирующая в лемме 2.

Утверждение теоремы 2 легко следует из (3.6), (3.7) и леммы 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Пусть

$$B_1^2(u) = \sigma^2(u)([u] - 1) + \sum_{j=[u]+1}^{n} \sigma_j^2,$$

$$C_1(u) = \sigma^3(u)([u] - 1) + \sum_{j=[u]+1}^{n} \sigma_j^3,$$

$$\Lambda_1 = \sum_{j=2}^{n} \nu_j.$$

Для оценки функции $\chi^*(t)$ используем лемму 1. Пусть

$$D = B_1^2(u)t^2/2, \;\; E = C_1(u)\, t^3/2^{3/2}, \;\; K = \Lambda_1 t^3/6 \leqslant \Lambda t^3/6,$$

$$q\Lambda'(t) + (n - q)\Lambda''(t) = \Lambda_1$$

(см. п. 2),

$$q = [B_1^6(u)/27\; C_1^2(u)], \;\; a = 3C_1(u)/B_1^2(u).$$

Тогда, используя (2.7), получаем, что

$$\chi^*(t) \leqslant (e^{-a^2t^2/2} + \Lambda'(t)t^3/6)^q (1 + \Lambda''(t) t^3/6)^{n-q}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим случай

$$C_1(u) \leqslant B_1^3(u)/3^{3/2}, \tag{3.9}$$

что влечет условие $q \geqslant 1$.

Отметим, что Λ' и Λ'' зависят от t, но величины a и q от t не зависят.

Пусть теперь v таково, что $a \geqslant v > 0$,

$$\chi_1^*(t) = (e^{-v^2t^2/2} + \Lambda'(t)t^3/6)^q (1 + \Lambda''(t)t^3/6)^{n-q}.$$

Из (3.6) и (3.8) получаем:

$$\delta \leqslant L_{31}\left\{\Lambda\int_0^\varepsilon t^2\chi_1^*(t)\,dt + 1/B\varepsilon\right\} = L_{31}I_1(\varepsilon) \tag{3.10}$$

Легко видеть, что выражение, которое нам осталось оценить, отличается от $I(\varepsilon)$ (см. п. 2) лишь обозначениями и тем, что Λ' и Λ'' зависят от t. (Условие $H \geqslant B$ выполнено, поскольку $B^2 \geqslant a^2q$.) В точности повторяя выкладки доказательства леммы 2 и убеждаясь, что зависимость Λ' и Λ'' от t не требует никаких изменений в оценках, нетрудно получить, что

$$\min_\varepsilon I_1(\varepsilon) \leqslant L_{32}(\Lambda/v^3q^{3/2} + v/B) = L_{32}(Q_1(v) + Q_2(v)). \tag{3.11}$$

Если $Q_1(a) \geqslant Q_2(a)$, положим $v = a$. Если $Q_1(a) < Q_2(a)$, то величина v^*, выбранная из условия $Q_1(v) = Q_2(v)$ (и равная $(\Lambda B)^{1/4}/q^{3/8}$), оказывается меньше a, и мы положим $v = v^*$. Из вышесказанного следует, что

$$\min_\varepsilon I_1(\varepsilon) \leqslant 2L_{32}(Q_1(a) + Q_2(v^*)). \tag{3.12}$$

Далее, при условии (3.9) $q \geqslant 1$, и, следовательно, $q \geqslant B_1^6(u)/54\, C_1^2(u)$. Отсюда и из (3.12) легко получить, что при выполнении (3.9)

$$\delta \leqslant L_{33}\{\Lambda/B_1^3(u) + (\Lambda/B^3)^{1/4}(C_1(u)/B_1^3(u))^{3/4}\}. \tag{3.13}$$

Заметим теперь, что, воспользовавшись тем, что $|w_j(t)| \leqslant 1$, из (3.1) — (3.3) нетрудно получить оценку

$$\delta \leqslant L_{34}(\Lambda/B^3)^{1/4}. \tag{3.14}$$

Так как при выполнении условия, обратного (3.9), оценка (3.13) следует из (3.14), получаем, что (3.13) справедливо и в общем случае.

Нам осталось показать, что (1.2) следует из (3.13). Так как $C_1(u) \leqslant C(u)$, это верно, если

$$B_1^2(u) \geqslant B^2(u)/2. \tag{3.15}$$

При $u \geqslant 2$ (3.15) очевидно. При $[u] = 1$ и $\sigma^2(u) \leqslant B^2(u)/2$ (3.15) следует из того, что $B_1^2(u) = \sum_{j=[u]+1} \sigma_j^2 \geqslant B^2(u)/2$. Случай $[u] = 1$ и $\sigma^2(u) \geqslant B^2(u)/2$ рассмотрим отдельно. Из (3.14) находим:

$$\delta \leqslant L_{35}(\Lambda/B^3)^{1/4}(\sigma^3(u)/B^3(u))^{3/4} \leqslant L_{35}(\Lambda/B^3)^{1/4}(C(u)/B^3(u))^{3/4}.$$

Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Если слагаемые одинаково распределены и $\sigma_1 = 1$ из (3.2) и (3.3) получаем, что

$$|h(t)| \leqslant \nu |t|^3 \sum_{j=1}^{n} |w_j(t)|/6, \tag{4.1}$$

где $w_j(t) = (g^{j-1} \cdot f_1^{n-j})(t)$.

Пусть $\varepsilon = 1/\nu^{1/3}$. При $0 \leqslant t \leqslant 1$ имеем:

$$|f_1(t)| \leqslant \exp\{-t^2/2\}(1 + \sqrt{e}\,\nu t^3/6) \leqslant \exp\{-t^2/2 + \sqrt{e}\,\nu t^3/6\}. \tag{4.2}$$

При $1 < t \leqslant \varepsilon$

$$|f_1(t)| \leqslant e^{-1/2} + \nu t^3/6 \leqslant \exp\{-{}^1/_2 + \sqrt{e}\,\nu t^3/6\}.$$

Итак, при $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$|w_j(t)| \leqslant \exp\{-(j-1)t^2/2 - (n-j)t^2/2 + (n-j)\sqrt{e}\,\nu t^3/6\} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{e}\exp\{-nt^2(1 - \sqrt{e}\,\nu^{2/3}/3)/2\} \leqslant \sqrt{e}\exp\{-0{,}2nt^2\}, \tag{4.3}$$

а при $1 < t \leqslant \varepsilon$

$$|w_j(t)| \leqslant \exp\{-(j-1)t^2/2 - (n-j)/2 + (n-j)\sqrt{e}\,\nu t^3/6\}. \tag{4.4}$$

Пусть

$$I_j = \int_0^{\varepsilon} t^2 |w_j(t)|\, dt = \int_0^1 + \int_1^{\varepsilon} = I_{1j} + I_{2j}.$$

Используя (4.3), получаем, что

$$I_{1j} \leqslant 2\sqrt{2\pi e}\, n^{-3/2}. \tag{4.5}$$

Далее, при $j \geqslant 2$ из (4.4), находим, что

$$I_{2j} \leqslant \exp\{-0{,}2(n-j)\} \int_1^{\infty} t^2 \exp\{-(j-1)t^2/2\}\, dt \leqslant 15 n^{-3/2}. \tag{4.6}$$

Оценим I_{21}:

$$I_{21} \leqslant \sqrt{e}\exp\{-n/2\} \int_0^{\varepsilon} t^2 \exp\{n\sqrt{e}\, t^3 \nu/6\}\, dt \leqslant 2\exp\{-0{,}2n\}/\nu n. \tag{4.7}$$

Из (3.1), (4.1), (4.5) — (4.7) получаем утверждение теоремы.

5. Дополнение. В этом пункте мы без доказательства приведем некоторые оценки, включающие в себя больший объем информации о распределениях с.в. X_j. Эти оценки обобщают (1.9), причем в определенных ситуациях они существенно точнее, чем (1.9) (и (1.2)). Для простоты положим $B^2/n = 1$. Пусть

$$\nu = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \nu_j,$$

$$\nu^{(1)}(u) = n^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^{[u]} \nu_j + (u - [u])\, \nu_{[u]+1} \right\},$$

$$\nu^{(2)}(u) = n^{-1}\left\{([u]+1-u)\,\nu_{[u]+1} + \sum_{j=[u]+2}^{n} \nu_j\right\},$$
$$q(u) = u/n,$$
$$\varkappa^2(u) = n^{-1}\left\{([u]+1-u)\sigma^2_{[u]+1} + \sum_{j=[u]+2}^{n} \sigma_j^2\right\},$$
$$\varepsilon^2(u) = \sigma^2(u)\, q(u) + \varkappa^2(u).$$

Введем в рассмотрение функции

$$V_1(u) = \nu^{(1)}(u)/(\varepsilon^2(u) - \sqrt{e}\,\nu/3\,\sigma(u))^{3/2} + \nu^{(2)}(u),$$
$$V_2(u) = \nu^{(1)}(u)/\sigma^3(u)\, q^{3/2}(u)] + \nu^{(2)}(u),$$
$$\overline{V}(u) = \min\{V_1(u), V_2(u)\},$$
$$V_3(u) = \nu^{(1)}(u)/\varepsilon^3(u) + \nu^{(2)}(u).$$

Теорема 4. *Пусть*

$$0 < \nu < \sigma_1/2 \tag{5.1}$$

и $\bar{u}_*$ — какое-либо решение уравнения $\overline{V}(u) = \sigma(u)$. Тогда

$$\delta \leqslant 5{,}6\overline{V}(\bar{u}_*)/\sqrt{n}.$$

Теорема 5. *Если существует число $\bar{u}_{2*}$, такое, что $1 \leqslant u_{2*} < n+1$ и $V_2(u_{2*}) = \sigma(u_{2*})$, то*

$$\delta \leqslant 5{,}6 V_2(u_{2*})/\sqrt{n}.$$

Теорема 6. *Пусть выполнено условие* (5.1) *и u_{3*} — решение уравнения*

$$V_3(u) = \sigma(u).$$

Если при этом u_{3*} таково, что существует число $a < 1$, такое, что

$$\nu/\sigma(u_{3*}) \leqslant 3a\varepsilon^2(u_{3*})/\sqrt{e},$$

то

$$\delta \leqslant \frac{4{,}2}{(1-a)^{3/2}} \cdot \frac{V_3(u_{3*})}{\sqrt{n}}.$$

Замечание 5. Последнее условие теоремы 6 выполняется, если, например, $\nu^{(2)}(u_{3*}) \leqslant b\nu^{(1)}(u_{3*})$, где $b < 0{,}1$.

Поступила в редакцию
4.3.71

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случайных величин, Теория вероят. и ее примен., XI, 3 (1965), 519—526.

[2] В. М. Золотарев, Аналог асимптотического разложения Эджворта-Крамера для случая сближения с устойчивыми законами распределения, Тр. VI Всес. совещ. по теории вероят. и матем. статист., Вильнюс, 1962, 49—51.

[3] В. М. Золотарев, Несколько вероятностных неравенств, связанных с метрикой Леви, ДАН СССР, 190, 5 (1970), 1019—1021.

[4] C.-G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions: a mathematical study of the Laplace-Gaussian Law, Acta Math., 77, 1 (1945), 3—125.

[5] В. Паулаускас, Об одном усилении теоремы Ляпунова, Литовский матем. сб., IX 2 (1969), 323—328.
[6] V. V. Sazonov, On a bound for the rate of convergence in the multidimensional central limit theorem, Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. and Prob., v. II, 1972, 563—582.
[7] С. В. Нагаев, В. И. Ротарь, Об оценках типа Ляпунова для случая близости распределений слагаемых к нормальному, ДАН СССР, 199, 4 (1971), 778—779.

ON STRENGTHENING OF LYAPUNOV TYPE ESTIMATES (THE CASE WHEN SUMMANDS DISTRIBUTIONS ARE CLOSE TO THE NORMAL ONE)

S. V. NAGAEV (NOVOSIBIRSK), V. I. ROTAR' (MOSCOW)

(*Summary*)

Let $\{X_j\}_{j=1}^{n}$ be a sequence of independent random variables. Put

$$\mathrm{M}X_j=0,\quad \mathrm{M}X_j^2=\sigma_j^2,\quad B^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2,\quad C=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^3;$$

$$\nu_j=3\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,|F_j(x)-\Phi(x/\sigma_j)|\,dx$$

where $F_j(x)=\mathrm{P}\{X_j<x\}$, $\Phi(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\,du$. Let

$$\Lambda=\sum_{j=1}^{n}\nu_j,\quad \delta=\sup_x\left|\mathrm{P}\left\{\sum_{j=1}^{n}X_j<Bx\right\}-\Phi(x)\right|.$$

In the paper, some estimates of δ are obtained. The simpliest consequence from these estimates is the following:

$$\delta\leqslant L\max\left\{\frac{\Lambda}{B^3};\left(\frac{\Lambda}{B^3}\right)^{1/4}\left(\frac{C}{B^3}\right)^{3/4}\right\}$$

where L is an absolute constant.
