19

С. В. НАГАЕВ, А. Б. МУХИН

(*Ташкент*)

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ СХОДИМОСТИ К РАВНОМЕРНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ НА ОТРЕЗКЕ

Пусть $\xi_j (j=1, 2, \ldots)$ — независимые случайные величины,

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad S_n(a) = S_n - \left[\frac{S_n}{a}\right] a, \quad a > 0.$$

Распределение $F_n(a, x) = P(S_n(a) < x)$, очевидно, сосредоточено на отрезке $[0, a]$.

Для величин ξ_j, принимающих целые значения, в работах [1—3] исследуются условия, при которых $F_n(a, x)$ сходится к равновероятному распределению. Наиболее общий результат в этом направлении, полученный Дворецким и Вольфовицем, заключается в следующем. Пусть d — целое положительное число, ξ_j — независимые случайные величины, принимающие целые значения, $P_j(k) = P(\xi_j \equiv k (\mathrm{mod}\, d))$. Для того, чтобы $P(S_n(d) = k) \to \frac{1}{d} (k = 0, 1, \ldots, d-1)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\prod_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{d-1} P_j(k) \ \exp\left(\frac{2\pi i r k}{d}\right) = 0, \ r = 1, 2, \ldots, d-1.$$

Каутский [4] рассмотрел аналогичную задачу для случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова с конечным числом состояний.

В настоящей заметке исследуются условия сходимости $F_n(a, x)$ к равномерному распределению на отрезке.

Теорема. Пусть ξ_j — независимые случайные величины с характеристическими функциями $f_j(t)$, a — положительное действительное число.

Для того, чтобы $F_n(a, x) \to \frac{x}{}$ на $[0, a]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\prod_{j=1}^{\infty} f_j\left(\frac{2\pi k}{a}\right) = 0, \quad k = \pm 1, \ \pm 2, \ldots \tag{1}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно положить $a = 2\pi$. Функция распределения $F_n[2\pi, \ x]$ на отрезке $[0, \ 2\pi]$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье

$$c_{k,\,n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}\, dF_n(2\pi, \ x) \ \ (k = 0, \ \pm 1 \ldots).$$

Функция $F(x) = \frac{x}{2\pi}$ имеет следующие коэффициенты Фурье: $c_o = \frac{1}{2\pi}$, $c_k = 0$ $(k = \pm 1, \ \pm 2, \ldots)$. Поэтому для сходимости $F_n(2\pi, \ x) \to \frac{x}{2\pi}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} c_{k,\,n} = 0, \quad k = \pm 1, \ \pm 2, \ldots \tag{2}$$

(при $k = 0$ $c_{k,\,n} = \frac{1}{2\pi}$).

Покажем, что коэффициенты Фурье функции $F_n(2\pi, \ x)$ с точностью до множителя совпадают со значениями характеристической функции распределения $F_n(x) = P(S_n < x)$ в целочисленных точках:

$$\int e^{ikx}\, dF_n(x) = \sum_j \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} e^{ikx}\, dF_n(x) =$$

$$= \sum_j \int_0^{2\pi} e^{ik(2\pi j + y)} dF_n(2\pi j + y) = \int_0^{2\pi} e^{iky}\ d\sum_j F_n(2\pi j + y) = 2\pi c_{k,\,n}.$$

Следовательно,

$$c_{k,n} = \frac{1}{2\pi}\int e^{ikx}\, dF_n(x) = \frac{1}{2\pi}\prod_{j=1}^{n} f_j(k). \tag{3}$$

Из равенств (2) и (3) следует утверждение теоремы.

Отметим, что в случае одинаково распределенных величин условие теоремы выполняется для нерешетчатых распределений при любом a, а для решетчатых распределений — при a, не соизмеримом с шагом распределения.

Следствие. Пусть $p_j(x)$ — плотность абсолютно непрерывной компоненты распределения $F_j(x) = P(\xi_j < x)$, если она существует. Для сходимости $F_n(a, \ x) \to \frac{x}{a}$ достаточно, чтобы для некоторой подпоследовательности $\left\{p_{j_n}(x)\right\}$ выполнялось одно из следующих условий:

а) существуют такие $\varepsilon_n > 0$ и $\Delta > 0$, что для каждой $p_{j_n}(x)$ найдется отрезок $[x_n, \ x_n + \Delta]$, на котором $p_{j_n}(x) \geqslant \geqslant \varepsilon_n$, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 = \infty$;

б) существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\Delta_n > 0$, что для каждой $p_{j_n}(x)$ найдется отрезок $(x_n, \ x_n + \Delta_n]$, на котором $p_{j_n}(x) \geqslant \varepsilon$, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n^2 = \infty$;

в) существует интегрируемая функция $\varphi(x)$, такая, что $p_{j_n}(x) \leqslant \varphi(x)$.

Следует отметить, что все три условия не зависят от величины a, т. е. предельное распределение будет равномерным для любого отрезка $[0, \ a]$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что условия (а), (б) или (в) выполнены для последовательности $p_j(x)$.

Условие (1), очевидно, выполняется, если

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |f_j(t_k)|) = \infty \ (k = \pm 1, \ \pm 2, \ldots),$$

где

$$t_k = \frac{2\pi k}{a}.$$

Далее имеем

$$1 - |f_j(t_k)| \geqslant \frac{1}{2}\left(1 - |f_j(t_k)|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - f_j(t_k) f_j(-t_k)\right) = \frac{1}{2}\int\int \left(1 - e^{it_k(x-y)}\right) dF_j(x)\, dF_j(y) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\int \left(1 - \cos t_k(x - y)\right) dF_j(x)\, dF_j(y) =$$

$$= \int\int \sin^2 \frac{t_k(x-y)}{2}\, dF_j(x)\, dF_j(y).$$

Следовательно, условие

$$\sum_{j=1}^{\infty}\iint \sin^2\frac{t_k(x-y)}{2}\,dF_j(x)dF_j(y)=\infty \tag{4}$$

обеспечивает выполнение (1). Если выполнено условие (а), то

$$\sum_{j=1}^{\infty}\iint \sin^2\frac{t_k(x-y)}{2}\,dF_j(x)dF_j(y)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j^2\int_{x_j}^{x_j+\Delta}\int_{x_j}^{x_j+\Delta}\sin^2\frac{t_k(x-y)}{2}\,dxdy\geqslant h(t_k,\ \Delta)\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j^2=\infty,$$

где

$$h(t_k,\ \Delta)=\min_j\int_{x_j}^{x_j+\Delta}\int_{x_j}^{x_j+\Delta}\sin^2\frac{t_k(x-y)}{2}\,dxdy>0.$$

Аналогично доказывается достаточность условия (б).

При выполнении условия (в) существует A такое, что

$$\int\limits_{\substack{|x|\geqslant A\\|y|\geqslant A}} p_j(x)p_j(y)\,dxdy\leqslant\int\limits_{\substack{|x|\geqslant A\\|y|\geqslant A}}\varphi(x)\varphi(y)\,dxdy\leqslant\frac{1}{2},$$

отсюда

$$\int_{-A}^{A}\int_{-A}^{A}p_j(x)p_j(y)\,dxdy\geqslant\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Обозначим через $B(\varepsilon_k)$ множество всех точек $(x,\ y)$ из прямоугольника $[-A\leqslant x\leqslant A,\ -A\leqslant y\leqslant A]$, удовлетворяющих при некотором целом $l=l(x,\ y)$ неравенству

$$\left|\frac{t_k(x-y)}{2}-\pi l\right|\leqslant\varepsilon_k.$$

На множестве $\overline{B(\varepsilon)_k}$ — дополнении $B(\varepsilon)_k$ до всего прямоугольника — выполняется соотношение

$$\sin^2\frac{t_k(x-y)}{2}\geqslant\sin^2\varepsilon_k. \tag{6}$$

Выберем ε_k настолько малым, чтобы

$$\iint\limits_{B(\varepsilon_k)}p_j(x)p_j(y)\,dxdy\leqslant\frac{1}{4} \tag{7}$$

(при условии (в) это всегда возможно). Неравенство (7) вместе с (5) дает

$$\iint\limits_{\overline{B(\varepsilon_k)}}p_j(x)p_j(y)\,dxdy\geqslant\frac{1}{4}. \tag{8}$$

Из неравенств (6) и (8) следует (4). Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Horton H. B. A method for obtaining random numbers, Ann. of Math. St., vol. 19, 1948.
2. Horton H. B. and Smith R. T. III. A direct method for producing random digits in any number sistem, Ann. of Math. St., vol. 20, 1949.
3. Dvoretzky A. and Wolfowitz J. Sums of random reduced modulo m, Duke Math. J., vol. 18, N 2, 1951.
4. Kautsky Z. Einige Eigenschaft der modulo k addierer markowschen Ketten, Trans. zur 2 Pragus Conf.— 59, Prague, 1960.