28

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Том XV

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1970

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ МАКСИМУМА СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

С. В. НАГАЕВ

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Мы предположим, что $\mathbf{M}\xi_i = 0, \mathbf{D}\xi_i = 1$. Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \qquad \overline{S}_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} S_i, \qquad F_n(x) = \mathbf{P}(S_n < x), \qquad \overline{F}_n(x) = \mathbf{P}(\overline{S}_n < x).$$

Введем следующие обозначения

$$\alpha_\nu = \mathbf{M}\xi_1^\nu, \qquad \beta_\nu = \mathbf{M}|\xi_1|^\nu, \qquad \alpha_{k\nu} = \int_{-\infty}^{0} x^\nu dF_k(x), \qquad f(t) = \mathbf{M}e^{it\xi_1}.$$

Сформулируем наши результаты.

Теорема 1. *Пусть* $\beta_s < \infty$, $s > 3$, *и* $F(x)$ *имеет абсолютно непрерывную компоненту. Тогда для* $x > 0$

$$\overline{F}_n(x\sqrt{n}) = \Phi_1(x) + e^{-x^2/2} \sum_{\nu=1}^{s-3} \Pi_\nu(x)\, n^{-\nu/2} + O(\min[n^{-1/2}, (1 + x^{1-s})\, n^{(2-s)/2} \ln^2 n]).$$

Здесь $\Phi_1(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-u^2/2} du$, $\Pi_\nu(x)$ — *полиномы, коэффициенты которых опре-*

деляются моментами α_r, $2<r\leqslant\nu+2$, *и величинами*

$$\gamma_r^{(m)}=\sum_{k=1}^{\infty}k^{m-1}\left(\alpha_{kr}-\sum_{l=1}^{r}\alpha_l^{(r)}k^{l/2}-\sum_{l=1}^{m}\alpha_{-l}^{(r)}k^{1/2-l}\right),$$
$$1\leqslant r\leqslant\nu+1,\quad 0\leqslant m<(\nu-r+1)/2,$$

где коэффициенты $\alpha_l^{(r)}$ *определяются моментами* α_i, $2<i\leqslant r-l+2$, *а* $\alpha_{-l}^{(r)}$ — *моментами* α_i, $2<i\leqslant r+2l-1$, $\sum\limits_1^0=0$.

Теорема 2. *Пусть* $\beta_s<\infty$, $s>4$, *и, кроме того, выполняется условие* $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}}|f(t)|<1$. *Тогда*

$$\overline{F}_n(x\sqrt{n})=\Phi_1(x)+e^{-x^2/2}\sum_{\nu=1}^{s-4}\Pi_\nu(x)\,n^{-\nu/2}+O(\min[n^{-1/2},(1+x^{-s})\,n^{(3-s)/2}]),\quad x>0.$$

Асимптотическое разложение для $\overline{F}_n(x\sqrt{n})-\Phi_1(x)$ было ранее получено А. А. Боровковым [2] при условии

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{hx}dF(x)<\infty,\qquad |h|<A,\ A>0,$$

и предположении, что существует абсолютно непрерывная компонента.

В. С. Королюк дал алгоритм для получения асимптотических разложений в предположении, что $F(x)$ — решетчатая или абсолютно непрерывная. Заметим, что асимптотическое разложение у Королюка содержит $[s/2]-3$ члена, если $F(x)$ имеет s моментов.

Отправной точкой доказательства теорем 1 и 2 служит известная формула Спицера]1]

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)\,z^k=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)\,\frac{z^k}{k}\right\},\qquad |z|<1,$$

где $\varphi_k(t)$ и $\psi_k(t)$ —характеристические функции соответственно $\max[0,\overline{S}_n]$ и $\max[0,S_n]$.

Поступила в редакцию
17.2.70

ЛИТЕРАТУРА

[1] F. S p i t z e r, A combinatorial lemma and its application to probability theory, Trans. Amer. Math. Soc., 82, 2 (1956), 323—339.
[2] А. А. Б о р о в к о в, Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых, Сиб. матем. ж., 3, 5 (1962), 645—694.

ASYMPTOTICAL EXPANSIONS FOR THE MAXIMUM OF SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

S. V. NAGAEV (NOVOSIBIRSK)

(Summary)

Two theorems on asymptotical expansions for the maximum sum distribution of independent random variables are stated.

ASYMPTOTICAL EXPANSIONS FOR THE MAXIMUM OF SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

S. V. NAGAEV (NOVOSIBIRSK)

(Summary)

Two theorems on asymptotical expansions for the maximum sum distribution of independent random variables are stated.