37

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

50

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1

МОСКВА · 1974

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XV, № 1 Январь — Февраль 1974

УДК 519.21

С. В. НАГАЕВ, И. Ф. ПИНЕЛИС

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К УСИЛЕННОМУ ЗАКОНУ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины (н.с.в.) с функциями распределения $F_1(u), \ldots, F_n(u)$ соответственно, $MX_i=0$, $y_i>0$ $(i=1, \ldots, n)$, $Y=\{y_i\}^n_1$,

$$y=\max_{1\leqslant i\leqslant n} y_i, \qquad x>0, \qquad S_n=\sum_{i=1}^n X_i.$$

Д. Х. Фуком и С. В. Нагаевым [1] был получен ряд оценок для $P\{S_n\geqslant x\}$ в терминах сумм вероятностей $P\{X_i\geqslant y_i\}$ и урезанных на уровнях y_i моментов. Для иллюстрации приведем одно следствие из этой работы:

$$P\{S_n\geqslant x\}\leqslant \sum_{i=1}^n P\{X_j\geqslant y_i\}+c(\delta)\frac{(B^2(-\infty, Y))^\delta}{x^{2\delta}}, \quad \delta\geqslant 1/2, \tag{1}$$

где $c(\delta)=[(8e^2)^\delta+4^\delta]\delta^\delta$, $\quad B^2(-\infty, Y)=\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} u^2\, dF_i(u)$.

Эта оценка получается из соотношения (47) статьи [1], если положить в нем $t=2$, $y=x/2\delta$. Из (1) нетрудно получить (см. [1]), что условия

$$\sum_{k=1}^\infty P\{X_k\geqslant k\varepsilon\}<\infty \quad (\forall \varepsilon>0) \tag{2}$$

и

$$\sum_{r=1}^\infty H_r^\delta<\infty, \quad \delta\geqslant 1 \tag{3}$$

достаточны для того, чтобы последовательность симметричных н.с.в. $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ подчинялась усиленному закону больших чисел (у.з.б.ч.). Здесь $H_r=D\chi_r$. $\chi_r=\sum_{k\in I_r} 2^{-r}X_k$, $I_r=\{2^r, 2^r+1, \ldots, 2^{r+1}-1\}$. В. А. Егоров [2] доказал, что если последовательность чисел $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ монотонна, $b_n\to\infty$,

$$\sum_{n=1}^\infty P\{|X_n|>\varepsilon b_n\}<\infty \quad (\forall \varepsilon>0) \tag{4}$$

и

$$(5)\qquad \sum_{n=k}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{b_n^{2k}}\sum \sigma_{i_1}^2\cdot\ldots\cdot\sigma_{i_{k-1}}^2<\infty,\quad k\geqslant 2,$$

то $\frac{1}{b_n}S_n\to 0$ п.н. (внутреннее суммирование ведется по всем наборам попарно различных индексов $1\leqslant i_m\leqslant n-1$, $\sigma_n^2=DX_n$). Как отмечено в ([1]), условие (5) слабее (3) при $b_n=n$, когда последовательность $\{\sigma_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ содержит большие лакуны. Это указывает на возможность существования оценок, уточняющих оценки типа (1) для случая, когда $n\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} DX_k\Big/\sum\limits_{k=1}^{n} DX_k$ есть достаточно большая величина. В настоящей работе приводятся подобного рода оценки; затем на основе их даются простые достаточные условия для у.з.б.ч., улучшающие (4), (5) при $b_n=n$. В заключение найденные оценки обобщаются для больших уклонений $S_n=\sup\limits_{p\leqslant k\leqslant n}|S_k|$ (зона $p\leqslant k\leqslant n$ рассматривается здесь вместо привычной $1\leqslant k\leqslant n$ в целях упрощения рассуждений).

1. Положим

$$(6)\qquad X_{i,y_i}=\begin{cases} X_i, & \text{если } |X_i|\leqslant y_i,\\ 0, & \text{если } |X_i|>y_i,\end{cases}$$

$$\sigma_i^2=MX_i^2,\qquad \sigma_{i,y_i}^2=MX_{i,y_i}^2\quad (i=1,\ldots,n),\qquad S_{n,Y}=\sum_{i=1}^{n}X_{i,y_i}.$$

Для произвольного конечного семейства чисел или с.в. $\{u_i\}_{i\in I}$ положим $Q_p(\{u_i\}_{i\in I})=\Sigma u_{i_1}\cdot\ \ldots\ \cdot u_{i_p}$. Суммирование здесь производится по всем наборам попарно различных индексов $i_m\in I$, $p\geqslant 1$ — целое число. Если множество таких наборов пусто, то $Q_p(\{u_i\}_{i\in I})=0$. Пусть $D_{n,p}=$ $=Q_p(\{\sigma_i^2\}_{i=1}^{n})$, $D_{n,p,Y}=Q_p(\{\sigma_{i,y_i}^2\}_{i=1}^{n})$.

Теорема 1. *Для любых целых $p\geqslant 1$, $n\geqslant p$ и при $y<x/\Delta_p$ справедлива оценка*

$$(7)\qquad P\{|S_n|>x\}\leqslant\sum_{i=1}^{n}P\{|X_i|>y_i\}+\frac{\Gamma_pD_{n,p}+\Delta_p^{2p}D_{n,p,Y}}{x^{2p}}.$$

Здесь $\Delta_p=\frac{\alpha_p+a_p}{\alpha_p}(2p-1)^{1/2}$, $\Gamma_p=(p!/(1-\alpha_p))$, α_p — *произвольное число на отрезке* (0, 1), a_p — *некоторое положительное число. В качестве a_p можно взять* $(p!)^{2p+2}$.

Если известно, что x_i симметрично распределены, оценку (7) можно улучшить, а именно, имеет место

Теорема 2. *При $y \leqslant x/\Delta_p$ справедлива оценка*

$$P\{|S_n|>x\} \leqslant \sum_{i=1}^{n} P\{|X_i|>y_i\} + \frac{(\Gamma_p+\Delta_p^{2p})D_{n,p,Y}}{x^{2p}}. \tag{8}$$

Следствие. *Пусть*

$$\varepsilon = x - mS_{n,Y} > 0 \tag{9}$$

($mS_{n,Y}$ — *медиана* $S_{n,Y}$). Тогда при $y<\varepsilon/2\Delta_p$

$$P\{S_n>x\} \leqslant \sum_{i=1}^{n} P\{|X_i|>y_i\} + \frac{2^p(\Gamma_p+\Delta_p^{2p})D_{n,p,Y}}{\varepsilon^{2p}}. \tag{10}$$

Неравенство (10) следует из (8) и из соотношения $P\{\xi - m\xi > \varepsilon\} \leqslant P\{|\tilde{\xi}| > >\varepsilon\}$, где $\tilde{\xi} = \xi_1 - \xi_2$, ξ_1 и ξ_2 — независимые с.в., имеющие то же распределение, что и ξ.

Заметим, что (9) выполнено, если $x^{-2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_{i,y_i}^2 < {}^1/_2$. Приведем в дополнение к теореме 1 оценку в терминах урезанных моментов первого порядка.

Теорема 3. *Справедливо неравенство*

$$P\{S_n>x\} \leqslant \sum_{i=1}^{n} P\{X_i > x/(2p-1)\} + (2p-1)^p M_{n,p}/x^p, \tag{11}$$

где

$$M_{n,p} = Q_p(\{m_i\}_{i=1}^n), \qquad m_i = \int\limits_0^{x/(2p-1)} u\, dF_i(u) \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Положим $V_{n,p} = Q_p(\{X_i\}_{i=1}^n)$, $V_{n,p,Y} = Q_p(\{X_{i,y_i}\}_{i=1}^n)$, $W_{n,p,Y} = Q_p(\{X_{i,y_i}^2\}_{i=1}^n)$,

$$S_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2, \qquad S_{n,Y}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} X_{i,y_i}^2.$$

Доказательство теоремы 1. Можно считать, что $p \geqslant 2$. В. А. Егоров ([2]) заметил, что

$$S_n^p = p!\,V_{n,p} + \sum_{m=1}^{p-1} \sum_{\substack{h_1+\ldots+h_m=p \\ h_l\geqslant 1}} c_{h_1,\ldots,h_m} \prod_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_j^{h_l} \tag{12}$$

и что, если $0 \leqslant u_i \leqslant A$ $(i \in I)$, то $Q_p = (\{u_i\}_{i\in I}) \leqslant A^p$, то

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant (2p-1)A. \tag{13}$$

Из (12) и из неравенства $\left|\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^k\right| \leqslant (S_n^{(2)})^{k/2}$ $(k \geqslant 2)$ следует, что существует $a_p>0$ такое, что

$$(14)\qquad |S_n{}^p|\leqslant p!\,|V_{n,p}|+a_p\sum_{m=0}^{p-2}|S_n|^m(S_n^{(2)})^{\frac{p-m}{2}}.$$

Нетрудно проверить, что при $a_p=(p!)^{2p+2}$ неравенство (14) выполнено. Из (14) следует, что

$$(15)\qquad \{|S_n|>x\}\subseteq\left\{1<p!\,|V_{n,p}|x^{-p}+a_p\sum_{m=0}^{p-2}(S_n{}^2)^{\frac{p-m}{2}}x^{m-p}\right\}\subseteq$$

$$\subseteq\left\{|V_{n,p}|>\frac{1-\alpha_p}{p!}x^p\right\}\cup\left\{\sum_{m=0}^{-2}(S_n^{(2)})^{\frac{p-m}{2}}x^{m-p}>\alpha_p/a_p\right\},$$

где $0<\alpha_p<1$.

Далее

$$(16)\qquad \left\{\sum_{m=0}^{p-2}(S_n^{(2)})^{\frac{p-m}{2}}x^{m-p}>\alpha_p/a_p\right\}\subseteq\{S_n^{(2)}>(\alpha_p/(\alpha_p+a_p)^2x^2\}\subseteq$$

$$\subseteq\{S_{n,Y}^{(2)}>(\alpha_p/(\alpha_p+a_p))^2x^2\}\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i|>y_i\}.$$

Учитывая (6) и (13), получаем

$$(17)\qquad \{S_{n,Y}^{(2)}>(\alpha_p/(\alpha_p+a_p))^2x^2\}\subseteq\{W_{n,p,Y}>x^{2p}/\Delta_p{}^{2p}\}.$$

Ввиду (15)–(17) мы заключаем, что

$$(18)\qquad \{|S_n|>x\}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i|>y_i\}\cup\{V_{n,p}^2>x^{2p}/\Gamma_p\}\cup\{W_{n,p,Y}>x^{2p}/\Delta_p^{2p}\}.$$

Так как слагаемые в $V_{n,p}$ взаимно ортогональны, то $MV_{n,p}^2=D_{n,p}$. Кроме того $MW_{n,p,Y}=D_{n,p,Y}$. Поэтому, в силу неравенства Чебышева – Маркова, из (18) следует (7). Теорема доказана.

Теорема 2 доказывается аналогично.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Пусть

$$X_{i,p}=\begin{cases}X_i & X_i\leqslant x/(2p-1),\\ 0, & X_i>x/(2p-1),\end{cases}$$

$$X_{i,p}^{+}=\max\{X_{i,p},0\}\quad(i=1,\ldots,n),$$

$$S_{n,p}=\sum_{i=1}^{n}X_{i,p},\qquad S_{n,p}^{+}=\sum_{i=1}^{n}X_{i,p}^{+}.$$

Тогда

$$P\{S_n>x\}\leqslant\sum_{i=1}^{n}P\{X_i>x/(2p-1)\}+P\{S_{n,p}>x\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}P\{X_i>x/(2p-1)\}+P\{S_{n,p}^{+}>X\}\leqslant\sum_{i=1}^{n}P\{X_i>x/(2p-1)\}+$$

$$+P\{V_{n,p}^{+}>x/(2p-1)^p\}\quad(V_{n,p}^{+}=Q_p(\{X_{i,p}^{+}\}_{i=1}^{n})).$$

Отсюда и из неравенства Чебышева — Маркова следует (9). Теорема 3 доказана.

2. Применим найденные оценки для получения некоторых достаточных условий выполнения у.з.б.ч.

Пусть $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность симметрично распределенных независимых с.в. Известно, что условие симметричности не умаляет общности при изучении условий применимости у.з.б.ч. По теореме 2 имеем

$$P\{|\chi_r|>\varepsilon\}\leqslant \sum_{i\in I_r} P\{|X_i|>\varepsilon 2^r/\Delta_p\}+\frac{(\Gamma_p+\Delta_p^{2p})D_{I_r,p,\varepsilon_0}}{\varepsilon^{2p}2^{2rp}} \tag{19}$$

$$(D_{I_r,p,\varepsilon_0}=Q_p(\{\sigma^2_{i,y_i}\}_{i\in I_r}),\ y_i=\bar{y}_r=\varepsilon_0 2^r/\Delta_p,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0).$$

Ю. В. Прохоров ([3]) доказал, что условие

$$\sum_{r=1}^{\infty} P\{\chi_r>\varepsilon\}<\infty \quad (\forall\varepsilon>0) \tag{20}$$

необходимо и достаточно для у.з.б.ч. Поэтому у.з.б.ч. применим, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n|>n\varepsilon\}<\infty \quad (\forall\varepsilon>0) \tag{21}$$

и $\exists p, \varepsilon_0$ такие, что

$$\sum_{r=1}^{\infty} 2^{-2rp}D_{I_r,p,\varepsilon_0}<\infty. \tag{22}$$

Условие (22) можно заменить на более сильное

$$\sum_{r=1}^{\infty} 2^{-2rp}D_{I_r,p}<\infty, \quad p\geqslant 1, \tag{23}$$

где $D_{I_r,p}=Q_p(\{\sigma_i^2\}_{i\in I_r})$. Ясно, что при $b_n=n$ условие (23) не сильнее, чем (5).

Пусть $\sigma_n^2=1$ при $n\neq 2^r$, $\sigma_n^2=n^2$ при $n=2^r=n_r$. Тогда $D_{I_r,p}\leqslant 2^{2r}C^{p-1}_{2(r)}+ +C_{2^r}{}^p\leqslant 2\cdot 2^{r(p+1)}$. Поэтому при $p\geqslant 2$ (23) выполнено. Пусть $\tilde{D}_{r,p}= =Q_p(\{\sigma^2_{n_s}\}^r_{s=1}$. Очевидно, $\tilde{D}_{r,p}\leqslant D_{2^r,p}$. Покажем, что при $r\geqslant k\geqslant 1\, \tilde{D}_{r,k}\geqslant \geqslant 2^{-k(k-1)}2^{rk}$. Действительно, при $k=1$ это утверждение очевидно. Пусть при $r\geqslant k\geqslant 2\, \tilde{D}_{r-1,\,k-1}\geqslant 2^{-(k-1)(k-2)}2^{2(r-1)(k-1)}$. Тогда $\tilde{D}_{r,k}\geqslant 2^{2r}\tilde{D}_{r-1,\,k-1}\geqslant \geqslant 2^{-k(k-1)}2^{2rk}$. Значит, это утверждение справедливо при всех k. Поэтому (5) не выполняется ни при каком k. Это означает, что условие (23), а тем более условие (22) слабее, чем условие (5) (при $b_n=n$).

Ю. В. Прохоров ([4]) нашел «наилучшее» достаточное условие для у.з.б.ч. в терминах дисперсии $H_r=D\chi_r$, которое формируется следующим образом.

Пусть $\varphi(n)\ \ln\ln n/n\to\infty$, $\varphi(n)/n\to 0$

$$\max_{n\in I_r}\varphi(n)/\min_{n\in I_r}\varphi(n)=O(1). \tag{24}$$

Тогда для того, чтобы все последовательности симметричных независимых с.в. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ с данными H_r и такие, что $X_n=O(\varphi(n))$ удовлетворяли у.з.б.ч. необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon>0$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\varepsilon 2^r}{\varphi(2^r)}\operatorname{Arcsh}\frac{\varepsilon\varphi(2^r)}{2^r H_r}\right\}<\infty. \tag{25}$$

Мы сейчас покажем, что условие (22) может выполняться и при нарушении условия (25)

Пусть $\varphi(n)=n/\ln\ln\ln n$, $\sigma_n^2=1$ при $n\neq 2^r$, $\sigma_n^2=(\varphi(n))^2$ при $n=2^r$. Очевидно, что $\varphi(n)$ удовлетворяет (24) и условия (21)–(22) выполнены (последнее при $p\geqslant 2$). Так как при $u\geqslant 1$ $\operatorname{Arcsh} u\leqslant 1+\ln u$ и $H_r>\varphi(2^r)^2 2^{-2r}$, то ряд (25) сходится только тогда, когда

$$\sum_{r=1}^{\infty}\exp\{-(\ln\ln r)(\ln\ln\ln r)\}<\infty. \tag{26}$$

Двукратное применение признака Коши сходимости монотонных рядов показывает, что ряд (26) расходится.

Условие (22) можно ослабить, если использовать следующее необходимое и достаточное условие, принадлежащее Ю. В. Прохорову ([4]): последовательность (симметричных) независимых с.в. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ $X_n=O(n/\ln\ln n)$ удовлетворяет у.з.б.ч. тогда и только тогда, когда

$$\sum_{r=1}^{\infty}\exp\{-\varepsilon/H_r\}<\infty \quad (\forall\varepsilon>0). \tag{27}$$

Пусть $\varphi(n)=O(n/\ln\ln n)$. Положим

$$X_{n,\varphi}=\begin{cases} X_n, & \text{если } |X_n|\leqslant\varphi(n),\\ 0, & \text{если } |X_n|>\varphi(n),\end{cases}$$

$$H_{r,\varphi}=\sum_{n\in I_r}2^{-2r}DX_{n,\varphi},\ \sigma^2_{n,\varphi,\varepsilon_0,p}=\int\limits_{y_{n,p,\varepsilon_0}\geqslant|u|>\varphi(n)}u^2\,dF_n(u),$$

где

$$y_{n,p,\varepsilon_0}=\varepsilon_0 n/\Delta_p,\ D_{r,\varphi,\varepsilon_0,p}=Q_p(\{\sigma^2_{n,\varphi,\varepsilon_0,p}\}_{n\in I_r}).$$

Тогда условия (21),

$$\sum_{r=1}^{\infty}\exp\{-\varepsilon/H_{r,\varphi}\}<\infty\ (\forall\varepsilon>0), \tag{28}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}2^{-2rp}D_{r,\varphi,\varepsilon_0,p}<\infty, \tag{29}$$

достаточны для у.з.б.ч. Величины $D_{r,\varphi,\varepsilon_0,p}$ могут оказаться довольно малыми за счет узости зоны $y_{n,p,\varepsilon_0}\geqslant|u|>\varphi(n)$.

3. Хоффдинг ([5]) заметил, что некоторые оценки, родственные (1), легко обобщаются для больших уклонений максимума сумм $\bar{S}_n$. Уточненные оценки типа (7), (8), (9), (11) также допускают подобное обобщение. Приведем обобщение оценки (7).

Теорема 1′.

$$P\{\bar{S}_n>x\}\leqslant\sum_{i=1}^{n}P\{|X_i|>y_i\}+(\Gamma_p D_{n,p}+\Delta_p{}^{2p}D_{n,p,Y})/x^{2p}\qquad(y\leqslant x/\Delta_p). \tag{7′}$$

Доказательство. Из (18) следует, что

$$\{|S_k|>x\}\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}\{|X_i|>y_i\}\cup\{W_{k,p,Y_k}>(x/\Delta_p)^{2p}\}\cup$$

$$\cup\{V_{k,p}^2>x^{2p}/\Gamma_p\}\qquad(Y_k=\{y_1\ldots,y_k\}\quad p\leqslant k\leqslant n).$$

Далее,

$$\{\bar{S}_n>x\}=\bigcup_{k=p}^{n}\{|S_k|>x\}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i|>y_i\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{k=p}^{n}\{W_{k,p,Y_k}>(x/\Delta_p)^{2p}\}\cup\bigcup_{k=p}^{n}\{V_{k,p}>x^{2p}/\Gamma_p\}=$$

$$=\bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i|>y_i\}\cup\{\max_{p\leqslant k\leqslant n}W_{k,p,Y_k}>(x/\Delta_p)^{2p}\}\cup$$

$$\cup\{\max_{p\leqslant k\leqslant n}V_{k,p}>x^{2p}/\Gamma_p\}. \tag{30}$$

Заметим, что $V_{k,p}$ — мартингал, W_{k,p,Y_k} — субмартингал. Известно (см., например, ([6])), что

a) квадрат мартингала есть субмартингал

и, если $\{\zeta_k\}_{k=p}^n$ — неотрицательный субмартингал, то

b) $P\{\max_{p\leqslant k\leqslant n}\zeta_k\geqslant C\}\leqslant M\zeta_n/C$.

Из (30), *a*), *b*) следует (7). Теорема доказана.

Оценки (8), (9), (11) обобщаются аналогично.

Поступила в редакцию
19 апреля 1973 г.

ЛИТЕРАТУРА

1 Фук Д. Х., Нагаев С. В., Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин, Теор. вероят. и ее примен., 16, № 4 (1971), 660–675.

2 Егоров В. А., Об усиленном законе больших чисел и законе повторного логарифма для последовательности независимых случайных величин, Теор. вероят. и ее примен., 15, № 3 (1970), 520–527.

3 Прохоров Ю. В., Об усиленном законе больших чисел, Изв. АН СССР. Сер. матем., 14, № 6 (1950), 523–536.

4 Прохоров Ю. В., Несколько замечаний к усиленному закону больших чисел, Теор. вероят. и ее примен., 4, № 2 (1959), 215–220.

5 Hoeffding W., Probability inequalities for sums of bounded random variables, J. Amer. Statist. Assoc., 58, 301 (1963), 13–30.

6 Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. I, «Наука» М., 1971.