

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

419  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
ЗАМЕТКИ**

---

---

ТОМ 22  
ВЫПУСК 1  
•  
ИЮЛЬ  
1977

---

---

## О НЕРАВЕНСТВЕ ЭССЕЕНА ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА РАЗНОРАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Х. Батиров, Д. В. Маневич, С. В. Нагаев

Рассматривается задача оценки отклонения распределения суммы случайного числа разнораспределенных случайных слагаемых от нормального распределения, т. е. устанавливается неравенство Эссеена для распределений случайных сумм. В качестве частного случая получена оценка Берри — Эссеена. Библ. 6 назв.

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \quad (1)$$

— последовательность независимых различно распределенных случайных величин (с. в.) и  $M\xi_i = 0$ ,  $i = 1, \infty$ .

Образую сумму  $\eta_v = \frac{Z_v}{\sqrt{DZ_v}}$ , где  $Z_v = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v$ ,  $v = v(\lambda)$  — с. в., принимающая значения 1, 2, 3, ... и не зависящая ни от каких  $\xi_i$ ,  $\lambda > 0$  — параметр. Введем следующие обозначения:

$$\omega_k = \omega_k(\lambda) = P(v = k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k = 1, \quad a = Mv,$$

$$\gamma^2 = Dv, \quad b_i^2 = D\xi_i, \quad \beta_{3i} = M|\xi_i|^3,$$

$$B_k^2 = \sum_{i=1}^k b_i^2, \quad \sigma_\lambda^2 = DZ_v = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 \omega_k,$$

$$B_{3\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \sum_{i=1}^k \beta_{3i}, \quad Y_v = \sum_{i=1}^v b_i^2,$$

$$\Gamma_\lambda^2 = DY_v = M(Y_v - \sigma_\lambda^2)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k (B_k^2 - \sigma_\lambda^2)^2,$$

$$F_i(x) = P(\xi_i < x), \quad F_\lambda(x) = P(\eta_v < x),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt,$$

$C_i > 0$  — абсолютные постоянные.



В работе рассматривается задача оценки отклонения распределения суммы случайного числа разнораспределенных случайных слагаемых от нормального распределения, т. е. в терминологии [1] устанавливается неравенство Эссеена. В качестве частного случая получена оценка Берри — Эссеена. Впервые задача оценки отклонения распределения суммы случайного числа равнораспределенных случайных слагаемых решалась С. Х. Сираждиновым и Г. Оразовым [2]. Их оценка была улучшена в работе С. В. Нагаева [3].

Для разнораспределенных слагаемых эта задача решалась в [4], [5], [6]. Однако в этих работах она не получила исчерпывающего решения. В предлагаемой заметке найден, как нам представляется, оптимальный результат.

Заметим, что в работе опущен случай, когда  $M\xi_i \neq 0$ , так как он не вызывает принципиальных затруднений.

Случай, когда все слагаемые имеют вырожденное распределение, не рассматривается.

**ТЕОРЕМА.** Если с. в.  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) в последовательности (1) имеют конечные абсолютные моменты третьего порядка, то существует такая абсолютная константа  $C > 0$ , что

$$|F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq C(B_{3\lambda}/\sigma_\lambda^3 + \Gamma_\lambda/\sigma_\lambda^2).$$

**Доказательство.** Очевидно, что

$$F_\lambda(x) - \Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \left[ P\left(\eta_k < \frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) - \Phi(x) \right],$$

$$\eta_k = Z_k/B_k.$$

Разобьем сумму на две части:

$$F_\lambda(x) - \Phi(x) = \sum_{k: |B_k^2 - \sigma_\lambda^2| \leq \sigma_\lambda^2/2} \omega_k \left[ P\left(\eta_k < \frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) - \Phi(x) \right] + \sum_{k: |B_k^2 - \sigma_\lambda^2| > \sigma_\lambda^2/2} \omega_k \left[ P\left(\eta_k < \frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) - \Phi(x) \right].$$

Легко видеть, что

$$|F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, \quad (2)$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{k: |B_k^2 - \sigma_\lambda^2| \leq \sigma_\lambda^2/2} \omega_k \left| P\left(\eta_k < \frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) - \Phi\left(\frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) \right|,$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k: |B_k^2 - \sigma_\lambda^2| \leq \sigma_\lambda^2/2} \omega_k \left| \Phi\left(\frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) - \Phi(x) \right|,$$

$$\Sigma_3 = \sum_{k: |B_k^2 - \sigma_\lambda^2| > \sigma_\lambda^2/2} \omega_k \left| P\left(\eta_k < \frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) - \Phi(x) \right|.$$

Так как для всех значений  $k$ , удовлетворяющих неравенству

$$|B_k^2 - \sigma_\lambda^2| \leq \sigma_\lambda^2/2,$$

имеют место соотношения

$$\sigma_\lambda^2/2 \leq B_k^2 \leq 3\sigma_\lambda^2/2, \quad \text{т. е. } 1/2 \leq B_k^2/\sigma_\lambda^2 \leq 3/2,$$

то в силу неравенства Эссеена [1]

$$\Sigma_1 \leq C_1 \sum_{k: |B_k^2 - \sigma_\lambda^2| \leq \sigma_\lambda^2/2} \omega_k \frac{\sum_{i=1}^k \beta_{3i}}{B_k^3} \leq C_2 \frac{B_{3\lambda}}{\sigma_\lambda^3}. \quad (3)$$

С другой стороны,

$$\left| \Phi\left(\frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) - \Phi(x) \right| <$$

$$< \left| \frac{\sigma_\lambda}{B_k} - 1 \right| x \left[ \exp\left(-\frac{\sigma_\lambda^2}{2B_k^2} x^2\right) + \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right],$$

$$x \exp\left(-\frac{\sigma_\lambda^2}{2B_k^2} x^2\right) < C_3 \frac{B_k}{\sigma_\lambda} < C_4,$$

$$\left| \frac{\sigma_\lambda}{B_k} - 1 \right| \leq \frac{|\sigma_\lambda^2 - B_k^2|}{B_k^2} \leq 2 \frac{|B_k^2 - \sigma_\lambda^2|}{\sigma_\lambda^2}$$

при тех же значениях  $k$ . Поэтому

$$\Sigma_2 \leq C_5 \frac{\Gamma_\lambda}{\sigma_\lambda^2}. \quad (4)$$

Согласно неравенству Чебышева

$$\Sigma_3 \leq 8\Gamma_\lambda^2/\sigma_\lambda^4. \quad (5)$$



Из соотношений (2) — (5) вытекает, что

$$|F_{\lambda}(x) - \Phi(x)| \leq C (B_{3\lambda}/\sigma_{\lambda}^3 + \Gamma_{\lambda}/\sigma_{\lambda}^2),$$

что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е. Если (1) — последовательность одинаково распределенных с. в. и  $M\xi_1 = 0$ ,  $M\xi_1^2 = b^2 > 0$ ,  $\beta_3 = M|\xi_1|^3 < +\infty$ , то неравенство Берри — Эссеена имеет вид

$$|F_{\lambda}(x) - \Phi(x)| \leq C (\beta_3/(b^3\sqrt{\alpha}) + \gamma/\alpha).$$

Институт математики СО АН СССР  
Ташкентский государственный  
пединститут

Поступило  
24.IV.1976

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., «Наука», 1972.
- [2] С и р а ж д и н о в С. Х., О р а з о в Г., Уточнение одной теоремы Роббинса, Изв. АН УзССР, Сер. физ. матем., № 1 (1966), 30—39.
- [3] Н а г а е в С. В., Об одной теореме Г. Роббинса, Изв. АН УзССР, Сер. физ.-матем., № 3 (1968), 15—19.
- [4] М а м а т о в М. И., Н е м а т о в И., О предельной теореме для сумм случайного числа независимых случайных величин, Изв. АН УзССР, Сер. физ.-матем., № 3 (1971), 18—24.
- [5] R u c h l i k Z., S z y n a l D., On the limit behaviour of the sums of a random number of independent random variables, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 20, № 5 (1972), 401—406.
- [6] Б е р ж и н ц к а с Л., Б е р н о т а с В., П а у л а у с к а с В. И., Оценки скорости сходимости в предельных теоремах для сумм случайного числа независимых случайных векторов, Литовск. матем. сб., 13, № 3 (1973), 53—61.

60

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Зархин Ю. Г., Кручение абелевых многообразий в конечной характеристике . . . . .                                                         | 3   |
| Корсаков Г. Ф., Обобщение теоремы Льенара и Шипара . . . . .                                                                             | 13  |
| Бессонов А. В., О новых операциях в интуиционистском исчислении . . . . .                                                                | 23  |
| Песин Я. Б., Описание $\pi$ -разбиения диффеоморфизма с инвариантной мерой . . . . .                                                     | 29  |
| Одинец В. П., Об условиях единственности проектора с единичной нормой . . . . .                                                          | 45  |
| Какичев В. А., Шелкович В. М., Решение краевых задач теории аналитических функций многих переменных в алгебрах Владимирова . . . . .     | 51  |
| Левин А. М., Об одном консервативном расширении формального математического анализа со схемой зависимого выбора . . . . .                | 61  |
| Соболев С. К., Об интуиционистском исчислении высказываний с кванторами . . . . .                                                        | 69  |
| Балашов Л. А., О тригонометрических рядах с монотонными коэффициентами . . . . .                                                         | 77  |
| Кроо А. В., Задача корректности наилучших приближений тригонометрическими полиномами класса $W_p^r H[\omega]_C$ . . . . .                | 85  |
| Куфарев Б. П., Зюзьков В. М., К вопросу о соответствии границ . . . . .                                                                  | 103 |
| Брюно А. Д., О свойствах некоторых функций, встречающихся в небесной механике . . . . .                                                  | 109 |
| Амосов А. А., О положительном решении эллиптического уравнения с нелинейным интегральным краевым условием типа излучения . . . . .       | 117 |
| Левитан Б. М., Еще один способ вычисления плотностей интегралов движения для уравнения Кортевега-де Фриза . . . . .                      | 129 |
| Жданов В. А., О методе покоординатного спуска . . . . .                                                                                  | 137 |
| Батиров Х., Маневич Д. В., Нагаев С. В., О неравенстве Эссеена для сумм случайного числа разнораспределенных случайных величин . . . . . | 143 |
| Анашин В. С., О функционально полных группах . . . . .                                                                                   | 147 |
| Махнев А. А., О группах с централизатором порядка 6 . . . . .                                                                            | 153 |