АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

1977

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТОМ 22
ВЫПУСК 1
•
ИЮЛЬ
1977

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 22, № 1 (1977)

УДК 519.2

О НЕРАВЕНСТВЕ ЭССЕЕНА ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА РАЗНОРАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Х. Батиров, Д. В. Маневич, С. В. Нагаев

Рассматривается задача оценки отклонения распределения суммы случайного числа разнораспределенных случайных слагаемых от нормального распределения, т. е. устанавливается неравенство Эссеена для распределений случайных сумм. В качестве частного случая получена оценка Берри — Эссеена. Библ. 6 назв.

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

— последовательность независимых различно распределенных случайных величин (с. в.) и $M\xi_i = 0$, $i = \overline{1, \infty}$.

Образуем сумму $\eta_\nu = \dfrac{Z_\nu}{\sqrt{DZ_\nu}}$, где $Z_\nu = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu$, $\nu = \nu(\lambda)$ — с. в., принимающая значения 1, 2, 3, ... и не зависящая ни от каких ξ_i, $\lambda > 0$ — параметр. Введем следующие обозначения:

$$\omega_k = \omega_k(\lambda) = P(\nu = k), \qquad \sum\nolimits_{k=1}^\infty \omega_k = 1, \quad \alpha = M\nu,$$

$$\gamma^2 = D\nu, \quad b_i^2 = D\xi_i, \quad \beta_{3i} = M|\xi_i|^3,$$

$$B_k^2 = \sum\nolimits_{i=1}^k b_i^2, \quad \sigma_\lambda^2 = DZ_\nu = \sum\nolimits_{k=1}^\infty B_k^2\omega_k,$$

$$B_{3\lambda} = \sum\nolimits_{k=1}^\infty \omega_k \sum\nolimits_{i=1}^k \beta_{3i}, \quad Y_\nu = \sum\nolimits_{i=1}^\nu b_i^2,$$

$$\Gamma_\lambda^2 = DY_\nu = M(Y_\nu - \sigma_\lambda^2)^2 = \sum\nolimits_{k=1}^\infty \omega_k (B_k^2 - \sigma_\lambda^2)^2,$$

$$F_i(x) = P(\xi_i < x), \qquad F_\lambda(x) = P(\eta_\nu < x),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt,$$

$C_i > 0$ — абсолютные постоянные.

В работе рассматривается задача оценки отклонения распределения суммы случайного числа разнораспределенных случайных слагаемых от нормального распределения, т. е. в терминологии [1] устанавливается неравенство Эссеена. В качестве частного случая получена оценка Берри — Эссеена. Впервые задача оценки отклонения распределения суммы случайного числа равнораспределенных случайных слагаемых решалась С. Х. Сираждиновым и Г. Оразовым [2]. Их оценка была улучшена в работе С. В. Нагаева [3].

Для разнораспределенных слагаемых эта задача решалась в [4], [5], [6]. Однако в этих работах она не получила исчерпывающего решения. В предлагаемой заметке найден, как нам представляется, оптимальный результат.

Заметим, что в работе опущен случай, когда $M\xi_i \neq 0$, так как он не вызывает принципиальных затруднений.

Случай, когда все слагаемые имеют вырожденное распределение, не рассматривается.

ТЕОРЕМА. *Если с. в.* ξ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ *в последовательности* (1) *имеют конечные абсолютные моменты третьего порядка, то существует такая абсолютная константа* $C > 0$, *что*

$$|F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leqslant C(B_{3\lambda}/\sigma_\lambda^3 + \Gamma_\lambda/\sigma_\lambda^2).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$F_\lambda(x) - \Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \left[P\left(\eta_k < \frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) - \Phi(x)\right],$$

$$\eta_k = Z_k/B_k.$$

Разобьем сумму на две части:

$$F_\lambda(x) - \Phi(x)| = \sum_{k:|B_k^2-\sigma_\lambda^2|\leqslant\sigma_\lambda^2/2} \omega_k \left[P\left(\eta_k < \frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) - \right.$$

$$\left. - \Phi(x)\right] + \sum_{k:|B_k^2-\sigma_\lambda^2|>\sigma_\lambda^2/2} \omega_k \left[P\left(\eta_k < \frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) - \Phi(x)\right].$$

Легко видеть, что

$$|F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leqslant \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3, \tag{2}$$

где

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{k:|B_k^2-\sigma_\lambda^2|\leqslant\sigma_\lambda^2/2} \omega_k \left| P\left(\eta_k < \frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) - \Phi\left(\frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right)\right|,$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{k:|B_k^2-\sigma_\lambda^2|\leqslant\sigma_\lambda^2/2} \omega_k \left| \Phi\left(\frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) - \Phi(x)\right|,$$

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{k:|B_k^2-\sigma_\lambda^2|>\sigma_\lambda^2/2} \omega_k \left| P\left(\eta_k < \frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) - \Phi(x)\right|.$$

Так как для всех значений k, удовлетворяющих неравенству

$$|B_k^2 - \sigma_\lambda^2| \leqslant \sigma_\lambda^2/2,$$

имеют место соотношения

$$\sigma_\lambda^2/2 \leqslant B_k^2 \leqslant 3\sigma_\lambda^2/2, \text{ т. е. } {}^1/_2 \leqslant B_k^2/\sigma_\lambda^2 \leqslant {}^3/_2,$$

то в силу неравенства Эссеена [1]

$$\sum\nolimits_1 \leqslant C_1 \sum_{k:|B_k^2-\sigma_\lambda^2|\leqslant\sigma_\lambda^2/2} \omega_k \frac{\sum_{i=1}^{k}\beta_{3i}}{B_k^3} \leqslant C_2 \frac{B_{3\lambda}}{\sigma_\lambda^3}. \tag{3}$$

С другой стороны,

$$\left|\Phi\left(\frac{\sigma_\lambda x}{B_k}\right) - \Phi(x)\right| <$$

$$< \left|\frac{\sigma_\lambda}{B_k} - 1\right| x \left[\exp\left(-\frac{\sigma_\lambda^2}{2B_k^2}x^2\right) + \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right],$$

$$x \exp\left(-\frac{\sigma_\lambda^2}{2B_k^2}x^2\right) < C_3 \frac{B_k}{\sigma_\lambda} < C_4,$$

$$\left|\frac{\sigma_\lambda}{B_k} - 1\right| \leqslant \frac{|\sigma_\lambda^2 - B_k^2|}{B_k^2} \leqslant 2\frac{|B_k^2 - \sigma_\lambda^2|}{\sigma_\lambda^2}$$

при тех же значениях k. Поэтому

$$\sum\nolimits_2 \leqslant C_5 \frac{\Gamma_\lambda}{\sigma_\lambda^2}. \tag{4}$$

Согласно неравенству Чебышева

$$\sum\nolimits_3 \leqslant 8\Gamma_\lambda^2/\sigma_\lambda^4. \tag{5}$$

Из соотношений (2) — (5) вытекает, что

$$|F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leqslant C\,(B_{3\lambda}/\sigma_\lambda^3 + \Gamma_\lambda/\sigma_\lambda^2),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если* (1) — *последовательность одинаково распределенных с. в. и* $M\xi_1 = 0$, $M\xi_1^2 = b^2 > 0$, $\beta_3 = M\,|\,\xi_1\,|^3 < +\infty$, *то неравенство Берри — Эссеена имеет вид*

$$|F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leqslant C\,(\beta_3/(b^3\sqrt{\alpha}) + \gamma/\alpha).$$

Институт математики СО АН СССР
Ташкентский государственный пединститут

Поступило 24.IV.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., «Наука», 1972.

[2] Сираждинов С. Х., Оразов Г., Уточнение одной теоремы Роббинса, Изв. АН УзССР, Сер. физ. матем., № 1 (1966), 30—39.

[3] Нагаев С. В., Об одной теореме Г. Роббинса, Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем., № 3 (1968), 15—19.

[4] Маматов М. И., Нематов И., О предельной теореме для сумм случайного числа независимых случайных величин, Изв. АН УзССР, Сер. физ.-матем., № 3 (1971), 18—24.

[5] Rychlik Z., Szynal D., On the limit behaviour of the sums of a random number of independent random variables, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., **20**, № 5 (1972), 401—406.

[6] Бержинцкас Л., Бернотас В., Паулаускас В. И., Оценки скорости сходимости в предельных теоремах для сумм случайного числа независимых случайных векторов, Литовск. матем. сб., **13**, № 3 (1973), 53—61.

60

СОДЕРЖАНИЕ