равномерно по $|x - F(0)| \leqslant G(0) - \delta$, $|y - F(1)| \leqslant G(1) - \delta$.

Для случая $f(t) = \mathrm{const}$, $g(t) = \mathrm{const}$ поведение вероятностей малых уклонений изучено в [1]; случай $G(t) = \mathrm{const}$ рассмотрен Г. Н. Сытой в [2]. Асимптотика логарифма вероятностей малых уклонений для произвольных f и g получена автором в [3]; недавно А. А. Новиков в [4] получил неравенства, из которых следует асимптотика логарифма вероятностей малых уклонений для функций $f_\varepsilon(t) = h(t\varepsilon^{-2})$, $g_\varepsilon(t) = -h(t\varepsilon^{-2})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, где $h(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ — фиксированная функция.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Феллер В.*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. II, М., изд-во «Мир», 1967.

[2] *Сытая Г. Н.*, К вопросу об асимптотике винеровской меры малых сфер в равномерной метрике, Аналитические методы теории вероятностей. Киев, изд-во «Наукова думка», 1979, 95—98.

[3] *Могульский А. А.*, Малые уклонения в пространстве траекторий, Теория вероятн. и ее примен., **XIX**, 4 (1974), 755—765.

[4] *Novikov A. A.*, The method of change of measure in the first passaga problem for moving boundaries, Abstr. 12th European Meeting Statist., Varna, 1979.

Заседание 1 ноября

Сгибнев М. С., Теорема восстановления в случае бесконечной дисперсии.

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $F(x) = \mathbf{P}(\xi_1 < x)$, $\mathbf{M}\xi_1 = \mu > 0$; $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \geqslant 1$; A — борелевское множество на прямой R; $H(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n \in A)$ — мера восстановления множества A; E — мера, сосредоточенная в 0: $E(\{0\}) = 1$; $E(x) = E((-\infty, x))$, $x \in R$. Положим

$$F_1(A) = \int_A (E(x) - F(x))\, dx/\mu, \qquad F_2(A) = \int_A (E(x) - F_1((-\infty, x)))\, dx.$$

В работах [1], [2] исследовалась связь между правильным изменением разности $H([0, t]) - t/\mu$ и правильным изменением $F_2([0, t])$ при $t \to \infty$, когда случайные величины ξ_n неотрицательны. Особо выделялся случай, когда $\mathbf{M}\xi_1^2 = \infty$. Эта задача рассматривалась также и в [3] (см. следствие 6).

В настоящем сообщении продолжается изучение указанной проблематики по двум направлениям: 1) выход за рамки правильно меняющихся функций; 2) отказ от неотрицательности случайных величин ξ_n.

Положим $x^+ = \max(x, 0,)$ $x^- = \max(-x, 0)$, $x \in R$.

Теорема. *Пусть* $\{\xi_n\}$ *— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения* $F(x)$, $\mathbf{M}\xi_1 = \mu > 0$. *Тогда*

1) *если* $\mathbf{M}(\xi_1^+)^2 = \infty$ *(что эквивалентно условию* $H([0, t)) - t/\mu \to \infty$, $t \to \infty$*), то справедливо соотношение*

$$H([0, t)) - t/\mu \sim F_2([0, t))/\mu, \quad t \to \infty;$$

2) *если* $\mathbf{M}(\xi_1^-)^2 = \infty$ *(что эквивалентно условию* $H([-t, 0)) \to \infty$, $t \to \infty$*), то справедливо соотношение*

$$H([-t, 0)) \sim F_2([-t, 0))/\mu, \quad t \to \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Teugels J. L.*, Renewal theorems when the first or the second moment is infinits, Ann. Math. Statist., 30 (1968), 1210—1219.

[2] *Mohan N. R.*, Teugels' renewal theorem and stable laws, Ann. Probab., 4, 5 (1973), 863—868.

[3] *Рогозин Б. А.*, Асимптотика функции восстановления, Теория вероятн. и ее примен., **XXI**, 4 (1976), 689—706.

Заседание 15 ноября

Нагаев С. В., Асадуллин М. Х. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса с иммиграцией.

Рассмотрим следующую модель ветвящегося процесса с иммиграцией. Пусть $X(t) = X(t, \omega)$ $(\omega \in \Omega,\ t \geqslant 0)$ — неотрицательный целочисленный случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, причем траектории $X(t)$ не убывают по t и ограничены для любого конечного t. Процесс $X(t)$ будем интерпретировать как число частиц, иммигрировавших в некоторую популяцию за время t. Пусть τ_k — момент k-го скачка траектории $X(t)$, а ξ_k — величина этого скачка (ξ_k — неотрицательная целочисленная случайная величина). Очевидно, $X(t) = \sum_{\tau_k \leqslant t} \xi_k$.

Каждая из поступивших в момент τ_k частиц дает начало некоторому ветвящемуся процессу $Y_{\tau_k}^{(i)}(t)$, $1 \leqslant i \leqslant \xi_k$, $0 \leqslant \tau_k \leqslant t$. Предположим, что процессы $Y_{\tau_k}^{(i)}(t)$ взаимно независимы и для любых i, τ_k процесс $Y_{\tau_k}^{(i)}(t)$ имеет то же распределение, что и $Y_0^{(1)}(t - \tau_k)$, где $Y_0^{(1)}(t)$ — ветвящийся процесс, начинающийся с одной частицы в момент времени 0.

Пусть $Z(t)$ — общее число частиц в популяции в момент времени t. Если первоначально частиц в популяции нет, то

$$Z(t) = \sum_{\tau_k \leqslant t} \sum_{i=1}^{\xi_k} Y_{\tau_k}^{(i)}(t).$$

Основные результаты, касающиеся асимптотического поведения $Z(t)$, можно найти в [2], [3]. В этих работах процессы иммиграции рассматривались как процессы с независимыми приращениями.

Дальнейшее развитие теории ветвящихся процессов с иммиграцией связано в основном с рассмотрением более общих процессов иммиграции, чем процессы с независимыми приращениями. В работе [1] при условии, что $\tau_k = k - 1$ и $\{\xi_k\}_{k \geqslant 0}$ — стационарная в широком смысле последовательность с ковариационной функцией $\mathrm{cov}(\xi_0, \xi_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, а $Y_0^{(1)}(t)$ — ветвящийся процесс с производящей функцией, удовлетворяющей некоторому условию, доказана сходимость по распределению $n^{-1} Z(n)$ к некоторой случайной величине W, имеющей гамма-распределение. Близкие результаты были получены в работах [4], [6].

Будем говорить, что

1) ветвящийся процесс $Y_0^{(1)}(t)$ удовлетворяет условию (A), если $Y_0^{(1)}(t)$ — критический процесс Беллмана — Харриса с конечными вторыми моментами времени жизни частицы и числа частиц, получающихся при делении одной частицы.

2) последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k \geqslant 0}$ удовлетворяет условию (B), если существует такая случайная величина ξ, что

$$n^{-1}\mathbf{E}\left|\sum_{k=0}^{n} (\xi_k - \xi)\right| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Следующее утверждение является обобщением результата из работы [1] в смысле ослабления условий на процесс иммиграции $X(t)$. Как и в [1], время предполагается дискретным.

Теорема 1. *Пусть* $Y_0^{(1)}(t)$ *— ветвящийся процесс с производящей функцией* $g(t, x)$, *удовлетворяющей условию*

$$1 - g(t, x) = \frac{1 - x}{1 + \gamma t(1 - x)}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

равномерно по x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, λ *— постоянная, а процесс* $X(t)$ *такой, что* $\tau_k = k - 1$ и $\{\xi_k\}_{k \geqslant 0}$ *удовлетворяет условию* (B).

Тогда $(\gamma t)^{-1} Z(t)$ *сходится по распределению к случайной величине* W, *причем выполняется соотношение*

$$\mathbf{E}\exp(-sW) = \psi((1 + s)^{-1/\gamma}),$$

где $\psi(s) = \mathbf{E}s^{\xi}$, *а* ξ *— случайная величина из условия* (B).

Теорему 1 можно распространить на случай непрерывного времени, однако ценой более жестких ограничений на ветвящийся процесс $Y_0^{(1)}(t)$. Для любого $h > 0$ определим случайный процесс с дискретным временем $\xi_k^h = X(kh) - X((k - 1)h)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теорема 2. *Пусть* $Y_0^{(1)}(t)$ *удовлетворяет условию* (A), *а процесс* $X(t)$ *такой, что* $\{\xi_k^h\}_{k \geqslant 0}$ *удовлетворяет условию* (B) *при некотором* $h > 0$.

Тогда $(\gamma t)^{-1} Z(t)$ *сходится по распределению к случайной величине* W, *которая удовлетворяет соотношению*

$$\mathbf{E}\exp(-sW) = \psi((1 + s)^{-1/(\gamma h)}),$$

где $\psi(s) = \mathbf{E}s^{\xi}$, *а* ξ *— случайная величина из условия* (Б).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Нагаев С. В.*, Предельная теорема для ветвящихся процессов с иммиграцией, Теория вероятн. и ее примен. XX, 1 (1975), 178—180.

[2] *Севастьянов Б. А.*, Ветвящиеся процессы, М., изд-во «Наука», 1971.

[3] *Athreya K. B.*, *Ney P. E.*, Branching processes, Springer — Verlag, 1972.

[4] *Durham S. D.*, Limiting distributions for the general branching process with immigration, J. Appl. Probabl., 11 (1974), 809—813.

[5] *Goldstein M. I.*, Critical age-dependent branching processes: single and multitype. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 17 (1971), 74—88.

[6] *Jagers P.*, Branching processes with biological applications, London, 1975.

Заседание 22 ноября

Пинелис И. Ф. О некоторых неравенствах для больших уклонений.

0. В. В. Юринский в работе [1] предложил метод получения оценок вероятностей больших уклонений для сумм независимых банаховозначных случайных величин, сводящий проблему к получению оценок вероятностей больших уклонений мартингалов определенного вида. Такие оценки для мартингалов имеются в работе Д. Х. Фука [2]. Оценки Д. Х. Фука были обобщены Н. А. Володиным и Л. Н. Морозовой в [3]

для более широкого класса моментных характеристик; в случае независимых слагаемых их результаты переходят в неравенства, принадлежащие С. В. Нагаеву и С. К. Сакояну [4], [5].

1. В докладе предлагается другая оценка того же рода. Пусть $\{\zeta_i\}_{i=0}^{n}$ — супермартингал относительно потока σ-алгебр $[\mathscr{F}_i]_{i=0}^{n}$,

$$\xi_i \equiv \zeta_i - \zeta_{i-1} \leqslant y, \quad y > 0, \quad \mathbf{M}(\xi_i^2 \mid \mathscr{F}_{i-1}) \leqslant b_i^2,$$
$$\mathbf{M}(\varphi(\xi_i) I_{\{\omega:\, \xi_i(\omega) > 0\}} \mid \mathscr{F}_{i-1}) \leqslant a_{\varphi, i} \text{ п. н.} \quad (i = 1 \div n),$$

где φ — логарифмически вогнутая на $(0, \infty)$ функция, $B^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$, $A_\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_{\varphi, i}$.

Для произвольной функции ψ введем «обратную» функцию $\psi^{-1}(z; c) = \sup E_\psi(z; c)$, если $E_\psi(z; c) \equiv \{x: 0 < x < c, \psi(x) \leqslant z\} \neq \varnothing$; если $E_\psi(z; c) = \varnothing$, будем считать, что $\exp\{-a/\psi^{-1}(z; c)\} = 0$ при $a \geqslant 0$.

Теорема 1. *Пусть* $x, a, \alpha, \alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\zeta_i - \zeta_0) \geqslant x\right) \leqslant P^* \equiv \max(P_1, P_2, P_3), \tag{1}$$

где

$$P_1 = \exp\{-\alpha\alpha_1 x^2/\beta(a)B^2\}, \quad \beta(a) = (e^a - 1 - a)/a^2,$$
$$P_2 = \exp\{-\alpha a x/\hat{\varphi}^{-1}(a^a A_\varphi/\alpha_2 a x; y)\}, \quad \hat{\varphi}(u) = \varphi(u)/u,$$
$$P_3 = \exp\{-\alpha x/y\lambda^{-1}(yA_\varphi/\alpha_2 x\varphi(y); a^{-1})\}, \quad \lambda(u) = u^{-1}e^{-u^{-1}}.$$

Соответствующие оценки в [3] — [5], полученные при дополнительных ограничениях на φ, менее точны по сравнению с (1) при всех x.

2. Аналоги мартингального разложения В. В. Юринского (см. [1]) могут быть построены для более общих вероятностных пространств. Вопросы, связанные с измеримостью, ради краткости опустим. Пусть П — полугруппа с единицей e.

Теорема 2. *Пусть* $X_1, \ldots, X_n$ *— независимые случайные элементы* П, $S_n = X_1 \ldots X_n$, $p\colon \Pi \to \mathbf{R}_+^1$, $q\colon \Pi \times \Pi \to \mathbf{R}^1$,

$$|p(xy_1z) - p(xy_2z)| \leqslant q(y_1, y_2)(x, y_1, y_2, z \in \Pi). \tag{2}$$

Тогда существует такой мартингал $(\zeta_i, \mathscr{F}_i)_{i=0}^{n}$, *что*

$$\zeta_n - \zeta_0 = p(S_n) - \mathbf{M}p(S_n) \text{ и } \mathbf{M}(|\zeta_i - \zeta_{i-1}|^t \mid \mathscr{F}_{i-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{M}[q(X_i, X_i')]^t \quad (i = 1 \div n,\ t \geqslant 1),$$

где X_i *и* X_i' *независимы и одинаково распределены. Здесь предполагается, что*

$$\mathbf{M}q(X_i, e) < \infty \quad (i = 1 \div n).$$

Назовем $p\colon \Pi \to \mathbf{R}_+^1$ «хорошим» функционалом (ХФ), если П — группа и

$$p(xy) \leqslant p(x) + p(y),\ p(xy) = p(yx),\ p(x^{-1}) = px\ (x, y \in \Pi).$$

Если p — ХФ, то p удовлетворяет (2), причем $q(y_1, y_2) = p(y_1, y_2^{-1})$ — (право- и лево-) инвариантная псевдометрика на П. Обратно, каждая инвариантная псевдометрика определяет ХФ $p(x) = d(x, e)$. Топологическая группа метризуется инвариантной метрикой, если и только если существует счетный базис окрестностей единицы, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов. В частности, это верно для компактных и/или коммутативных групп со счетной локальной базой и их произведений.

В докладе даются различные конкретные примеры функционалов, удовлетворяющих (2); даются достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел для таких функционалов (являющиеся, по-видимому, новыми даже для случая банахова пространства) типа: если $n^{-1}\|S_n\| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\|X_n\|^2/n^2 < \infty$, то $n^{-1}\|S_n\| \to 0$ п. н.