56

78

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1982

ТОМ 263 № 2

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

к числу ее постулатов дает корректную и полную систему для выводимости секвенций вида (1), в антедент которых добавлены $!!f$ для всех нужных f и соответствующих Y. При этом полнота означает, что выводимость $\Gamma \Rightarrow X \mapsto Y$ в натуральном исчислении влечет выводимость в расширении SSR секвенции $\Gamma \Rightarrow X \underset{\psi}{\mapsto} Y$ для некоторого продолжения ψ функции φ.

Авторы благодарны А. Таутсу, М. Мацкину, М. Харфу, А. Шмундаку за полезное обсуждение.

Институт кибернетики
Академии наук ЭССР, Таллин

Поступило
31 XII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харф М., Тыугу Э.Х.* – Программирование, 1980, № 4, с. 3. 2. *Кахро М.И., Мяннисалу М.А., Саан Ю.П., Тыугу Э.Х.* – Там же, 1976, № 1, с. 36. 3. *Туиди Е.Н.* In: Artif. Intel. and Pattern Recogn. in CAD. Amsterdam, 1978, p. 197. 4. *Пеньям Я.Э.* – Кибернетика, 1980, № 2, с. 36. 5. *Генцен Г.* В кн.: Матем теория логич. вывода, М., 1965, с. 77. 6. *Prawitz D.* Natural Deduction. Stockholm, 1965.

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

С.В. НАГАЕВ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

(Представлено академиком А.Д. Александровым 13 VI 1981)

В настоящей заметке предлагается новый подход к задаче о приближении распределения линейного функционала в пространстве большой размерности смесью гауссовских распределений (см. [1, 2]).

Пусть μ – распределение в R^d, удовлетворяющее единственному ограничению

$$E\,|f(x)| \leqslant \|f\|, \tag{1}$$

где $f(x)$, $x \in R^d$, – произвольный линейный функционал. Символ E здесь и в дальнейшем означает математическое ожидание относительно μ. Пусть γ – гауссова мера в R^d такая, что $\gamma(B) = \gamma_0(d^{1/2}B)$, где γ_0 –стандартная гауссова мера. Среднее значение относительно γ будем обозначать символом E'. Определим расстояние между одномерными функциями распределения $F(u)$ и $G(u)$ $\rho(F, G)$ равенством

$$\rho^2(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} (F(u) - G(u))^2\, du.$$

Обозначим через P_f распределение случайной величины $f(x)$, индуцированное мерой μ.

Предположим теперь, что функционал f, рассматриваемый как вектор $(f_1, f_2, \ldots, f_d)$ в сопряженном пространстве, является случайным и распределение его совпадает с γ. Пусть P – одномерное распределение, определяемое характеристической функцией

$$\varphi(t) = \int_{R^d} e^{-t^2\|x\|^2/2d}\, \mu(dx).$$

Т е о р е м а. *Справедливо неравенство*

$$E'\rho^2(P_f, P) \leqslant \sqrt{1/\pi d}. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что

$$E'Ee^{itf(x)} = EE'e^{itf(x)} = \varphi(t). \tag{3}$$

В силу формулы Парсеваля

$$E'\rho^2(P_f, P) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_f(t) - \varphi(t)|^2\, t^{-2}\, dt, \tag{4}$$

где $\varphi_f(t) = Ee^{itf(x)}$.

Вследствие (3)

$$E'|\varphi_f(t) - \varphi(t)|^2 = E'|\varphi_f(t)|^2 - |\varphi(t)|^2. \tag{5}$$

Далее,

$$E'|\varphi_f(t)|^2 = E'\int_{R^d}\int_{R^d} e^{it(f(x)-f(y))}\,\mu(dx)\,\mu(dy) =$$

$$= \int_{R^d}\int_{R^d} e^{-t^2\|x-y\|/2d}\,\mu(dx)\,\mu(dy), \tag{6}$$

$$|\varphi(t)|^2 = \int_{R^d}\int_{R^d} e^{-t^2(\|x\|^2+\|y\|^2)/2d}\,\mu(dx)\,\mu(dy).$$

Из (5), (6), равенства

$$\int_0^{\infty}(e^{-at^2} - e^{-bt^2})\, t^{-2}\, dt = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{b} - \sqrt{a})$$

и неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant \frac{1/|a| + 1/|b|}{2^{3/2}}$$

следует

$$\sqrt{d/2\pi}\,E'\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_f(t) - \varphi(t)|^2\, t^{-2}\, dt = \tag{7}$$

$$= \int_{R^d}\int_{R^d}((\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x-y\|^{1/2})\,\mu(dx)\,\mu(dy) \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{R^d}|(x,y)|\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{-1/2}\,\mu(dx)\,\mu(dy) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\int_{R^d}\mu(dx)\int_{R^d}|(x,y)|\,\|x\|^{-1}\,\mu(dy).$$

Ввиду условия (1)

$$\int_{R^d}|(x,y)|\,\|x\|^{-1}\,\mu(dy) \leqslant 1. \tag{8}$$

Из (4), (7) и (8) следует утверждение теоремы.

С л е д с т в и е. *Для любого* $\epsilon > 0$

$$\gamma(\rho(P_f, P) > \epsilon) \leqslant \epsilon^{-2}\sqrt{1/\pi d}.$$

Оценка (2) достигается, если распределение μ сосредоточено в единственной точке $\|x_0\| = 1$. Действительно, в этом случае второй интеграл в соотношении (7) равен $\sqrt{2}$. С другой стороны,

$$E\,|f(x)| = |f(x_0)| \leqslant \|f\|.$$

Рассмотрим еще один частный случай. Пусть мера μ сосредоточена в точках $x_i = d^{1/2} e_i$, $i = 1, 2, \ldots, d$, $(e_i, e_k) = 0$, $i \neq k$, $\|e_i\| = 1$, причем $\mu(\{e_i\}) = 1/d$. При этих условиях второй интеграл в (7) равен $\sqrt{2/d}$, так что

$$E' \rho^2 (P_f, P) = 1/d\sqrt{\pi}. \tag{9}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае последовательность $f(x_i)$ образует выборку объема d из нормальной $N(0, 1)$ совокупности, а распределение P_f совпадает с эмпирическим распределением, соответствующим этой выборке. Таким образом, формула (9) дает математическое ожидание статистики Крамера–Мизеса.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР, Новосибирск

Поступило
22 IX 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. *Судаков В.Н.* – ДАН, 1978, т. 243, № 6, с. 1402–1405. 2. *Судаков В.Н.* – Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1979, т. 85, с. 197–206.

УДК 518 : 517.984

МАТЕМАТИКА

С.М. ОГАНЕСЯН, В.И. СТАРОСТЕНКО

ДВОЙСТВЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ФУНКЦИОНАЛ ЛАГРАНЖА И ВАРИАЦИОННЫЙ СПОСОБ А.Н. ТИХОНОВА

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 20 IX 1981)

1. В работе сформулирована двойственная задача к нахождению обобщенного нормального решения (о.н.р.) по А.Н. Тихонову исходной линейной некорректной задачи. Установлена операторная зависимость между о.н.р. исходной и о.р. (псевдорешением) двойственной задач. При помощи параметрического модифицированного функционала Лангранжа предложен регуляризующий алгоритм нахождения о.в. двойственной задачи, который совпадает с вариационным методом А.Н. Тихонова "решения" двойственной задачи. Построенный алгоритм является регуляризующим методом нахождения обобщенной точки max min функционала Лагранжа.

2. Пусть H_1 и H_2 – гильбертовы пространства, A: $H_1 \to H_2$ – линейный ограниченный оператор: $D(A) = H_1$ и $R(A)$ – соответственно области определения и значения оператора A, замыкание $\overline{R(A)} = H_2$, A^* – сопряженный к A оператор; $N_A = \{x\colon Ax = 0\}$, $M_A = H_1 \ominus N_A$ – ортогональное дополнение к N_A в H_1; x_0 – произвольный фиксированный элемент пространства H_1.

Введем плоскость U с направляющим подпространством M_A и элементом сдвига x_0.

Дано исходное операторное уравнение первого рода

$$Ax = b, \tag{1}$$