СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXX, № 3 1989

76

УДК 519.21

С. В. НАГАЕВ

ОЦЕНКА ТИПА БЕРРИ — ЭССЕЕНА ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть H — действительное сепарабельное гильбертово пространство с внутренним произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|x| = \sqrt{(x,x)}$. Рассмотрим последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимых одинаково распределенных случайных величин (СВ) со значениями в H. Будем считать, что $\mathbf{E}X_1 = 0$. Положим $\sigma^2 = \mathbf{E}|X_1|^2$, $\beta_3 = \mathbf{E}|X_1|^3$. Пусть Λ — ковариационный оператор СВ X_1, $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_k^2 \geqslant \ldots$ — собственные значения оператора Λ, расположенные в порядке убывания, $\Lambda_l = \sigma_1^2\sigma_2^2 \ldots \sigma_l^2$. Наряду с X_j рассмотрим гауссовскую СВ X^* со значениями в H с тем же самым ковариационным оператором Λ и $\mathbf{E}X^* = 0$. Пусть $\{e_j\}_1^\infty$ — ортонормированный базис собственных векторов Λ, причем $\Lambda e_j = \sigma_j^2 e_j$, $\beta_{3,j} = \mathbf{E}|(X_1, e_j)|^3$.

Теорема. *Существует абсолютная постоянная c такая, что при любом $a \in H$*

$$\sup_r \left| \mathbf{P}\left(\left| n^{-1/2} \sum_1^n X_j - a \right| < r \right) - \mathbf{P}(|X^* - a| < r) \right| \leqslant$$

$$\leqslant c \left(\beta_3 (\sigma^3 + |a|^3) \Lambda_7^{-3/7} + \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \sum_1^7 \beta_{3,j}/\sigma_j \right) n^{-1/2}.$$

Эта оценка уточняет результаты, содержащиеся в [1—4] (относительно более ранних результатов см. библиографию в [4]). Неравномерные оценки рассматривались, например, в [5]. Случай разнораспределенных слагаемых изучался в [6] (см. также [7]).

При доказательстве сформулированной выше теоремы используется усовершенствованный метод работы [2], восходящий, в свою очередь, к [8].

Условимся о некоторых дополнительных обозначениях. Мы будем обозначать одномерные СВ буквами ξ и η (возможно, с индексами), а прочие СВ — буквами $X, Y, Z, \ldots$, причем если речь идет о СВ со значениями в H, то это специально не оговаривается, X' будет обозначать независимую копию X, а X^s — симметризацию $X - X'$. Символом $c(\cdot)$ обозначим положительную постоянную, зависящую только от аргументов, указанных в скобках. Мы допускаем одинаковые обозначения для разных постоянных.

Мы будем использовать символ И. М. Виноградова $\ll$ ($D \ll B$, если существует абсолютная постоянная c такая, что $|D| \leqslant cB$).

Если $A \subset C$, то через $I(A, u)$, $u \in C$, обозначим индикатор A. Будем также пользоваться сокращенным обозначением $I(A)$ вместо $I(A, \cdot)$.

§ 1. Вспомогательные предложения

Начнем со следующего утверждения, заимствованного из [2, лемма 4].

Лемма 1. *Пусть* $f_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\, dF_k(u)$, $k = 1, 2$, *где* $F_k(u)$ — *одномерные распределения. Тогда*

$$|f_1(t)|^n \leqslant |f_2(t)|^n e^{2\rho n} + (1/2 + \rho)^n,$$

где $\rho = \mathrm{Var}(F_1(x) - F_2(x))$.

Доказательство. Очевидно, что $|f_1(t)| \leqslant |f_2(t)| + \rho$. Если $|f_2(t)| \geqslant 1/2$, то $|f_1(t)|^n \leqslant e^{2\rho n}|f_2(t)|^n$. Если $|f_2(t)| < 1/2$, то $|f_1(t)|^n < (1/2 + \rho)^n$.

Лемма 2. *Пусть* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\mu$ *и* $V_1, V_2, \ldots, V_\mu$ — *две последовательности независимых одинаково распределенных* СВ *со значениями в* $\mathbf{R}^l$, *причем*

$$|\mathbf{E}\exp\{i(\theta, Z_1)\}| \leqslant e^{-\sum_1^l \lambda_j^2\theta_j^2}, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_l),$$

если $\max\limits_{1\leqslant j<l} |\theta_j|/a_j \leqslant 1$. *Пусть, далее,* $T = \sum_1^\mu V_j + W$, *где* W *не зависит от* $\{V_j\}_1^l$ *и* $\mathbf{E}\exp\{i(W, \theta)\} = 0$, *если* $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant l} |\theta_j|/a_j > 1$. *Тогда существует плотность распределения* $p(u)$ СВ T *и*

$$p(u) \leqslant e^{2\rho\mu}/(4\pi\mu)^{l/2} \prod_1^l \lambda_j + (2\pi)^{-l}\, (1/2 + \rho)^\mu \prod_1^l a_j, \quad u \in \mathbf{R}^l,$$

где $\rho = \sup\limits_{|\theta|=1} \mathrm{Var}_x (F_Z(x, \theta) - F_V(x, \theta))$, $F_Z(x, \theta)$ *и* $F_V(x, \theta)$ — *функции распределения соответственно* (Z_1, θ) *и* (V_1, θ).

Доказательство. По формуле обращения

$$p(u) = (2\pi)^{-l} \int_{\mathbf{R}^l} \exp\{-i(\theta, u)\}\, \mathbf{E}\exp\{i(T, \theta)\}\, d\theta.$$

В силу леммы 1

$$|\mathbf{E}\exp\{i(V_1, \theta)\}|^\mu \leqslant |\mathbf{E}\exp\{i(Z_1, \theta)\}|^\mu e^{2\rho\mu} + (1/2 + \rho)^\mu.$$

С другой стороны, по условию

$$|\mathbf{E}\exp\{i(Z_1, \theta)\}|^\mu \leqslant \exp\left\{-\mu \sum_1^l \lambda_j^2\theta_j^2\right\},$$

если $\max |\theta_j|/a_j \leqslant 1$. Поэтому

$$p(u) \leqslant (2\pi)^{-l} \left(e^{2\rho\mu} \int_{\mathbf{R}^l} \exp\left\{-\mu \sum_1^l \lambda_j^2\theta_j^2\right\} d\theta + (1/2 + \rho)^\mu \int_{\max|\theta_j|/a_j \leqslant 1} d\theta \right).$$

Отсюда легко следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть* Z_1, Z_2 — *независимые* СВ *со значениями в локально выпуклом пространстве* $\mathscr{E}$, $\|\cdot\|$ — *полунорма в* $\mathscr{E}$. *Тогда для любых* $r_1, r_2 > 0$

$$\mathbf{P}(\|Z_1\| < r_1, \|Z_2\| < r_2) \leqslant \mathbf{P}(\|Z_1 + Z_2\| < r_1 + r_2)$$

(*см.* [9, *лемма* 1.1])

Лемма 4. *Пусть* X — СВ *со значениями в* $\mathbf{R}^l$ *и в некотором ортонормированном базисе* $\{\omega_j\}_1^l$ $\mathbf{E}(X, \theta)^2 = \sum_1^l \lambda_j^2\theta_j^2$, *где* $\theta_j = (\theta, \omega_j)$. *Тогда*

$$|\mathbf{E}\exp\{i(X, \theta)\}| \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum_1^l \lambda_j^2\theta_j^2\right\},$$

если $\max\limits_j |\theta_j|\beta_{3,j}/\lambda_j^2 \leqslant (\sqrt{2}\, l^2)^{-1}$, *где* $\beta_{3,j} = \mathbf{E}|(X, \omega_j)|^3$.

Доказательство. В силу теоремы 8.7 из [10]

$$|\mathbf{E}\exp\{i(X,\theta)\}|\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_1^l\lambda_j^2\theta_j^2\right\},$$

если $\mathbf{E}(X,\theta)^2=\sum_1^l\lambda_j^2\theta_j^2\geqslant\sqrt{2}\,\mathbf{E}|(X,\theta)|^3$. Так как $\mathbf{E}|(X,\theta)|^3\leqslant l^2\sum_1^l\beta_{3,j}|\theta_j|^3$, то последнее условие выполняется, если $\sqrt{2}\,l^2\max_j|\theta_j|\beta_{3,j}/\lambda_j^2\leqslant 1$.

Лемма 5. *Пусть* $\xi\geqslant 0$, F — *функция распределения* ξ. *Если для некоторого* $\varepsilon>0$ $F(r)\leqslant Qr^l$ *при* $r\geqslant\varepsilon$, *то*

$$\mathbf{E}\exp\{-\xi^2t^2\}\leqslant(|t|^{-l}c(l)+\varepsilon^l)Q, \tag{1}$$

где $c(l)=\Gamma(l/2+1)$. *Кроме того, при* $0<t<l$

$$\mathbf{E}\{\xi^{-t};\ \xi\geqslant\varepsilon\}\leqslant lQ^{t/l}/(l-t). \tag{2}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{E}\exp\{-\xi^2t^2\}=\int_0^\infty\exp\{-r^2t^2\}\,dF(r)=\int_0^\varepsilon+\int_\varepsilon^\infty. \tag{3}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_\varepsilon^\infty\leqslant 2t^2\int_\varepsilon^\infty\exp\{-r^2t^2\}rF(r)\,dr\leqslant 2t^2Q\int_0^\infty\exp\{-r^2t^2\}r^{l+1}\,dr=|t|^{-l}\Gamma(l/2+1)Q. \tag{4}$$

С другой стороны,

$$\int_0^\varepsilon\leqslant F(\varepsilon)\leqslant Q\varepsilon^l. \tag{5}$$

Из (3)—(5) следует неравенство (1).

Докажем теперь неравенство (2). Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E}\xi^{-t}I(\xi\geqslant\varepsilon)=\int_\varepsilon^\infty r^{-t}\,dF(r)\leqslant t\int_\varepsilon^\infty F(r)r^{-t-1}\,dr. \tag{6}$$

Пусть $\varepsilon_1=Q^{-1/l}$. Если $\varepsilon_1>\varepsilon$, то

$$\int_\varepsilon^\infty F(r)r^{-t-1}\,dr=\int_\varepsilon^{\varepsilon_1}+\int_{\varepsilon_1}^\infty. \tag{7}$$

Далее

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon_1}\leqslant Q\int_\varepsilon^{\varepsilon_1}r^{l-t-1}\,dr<Q\varepsilon_1^{l-t}/(l-t)=Q^{t/l}/(l-t) \tag{8}$$

и

$$\int_{\varepsilon_1}^\infty\leqslant\int_{\varepsilon_1}^\infty r^{-t-1}\,dr=Q^{t/l}/t.$$

В первом случае мы использовали оценку $F(r)\leqslant Qr^l$, а во втором $F(r)\leqslant 1$ (при $r=\varepsilon_1$ эти оценки совпадают). Комбинируя (6)—(8), получаем (2) в случае $\varepsilon_1>\varepsilon$. Если $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon$, то

$$\mathbf{E}\xi^{-t}I(\xi\geqslant\varepsilon)\leqslant t\int_{\varepsilon_1}^\infty F(r)r^{-t-1}\,dr,$$

и поэтому оценка (2) тем более верна.

Пусть η_0 — СВ с плотностью $(3/4\pi)[4\sin(r/4)/r]^4$.

Лемма 6. *Пусть СВ* V_j *и* Z_j, $j=1\div\mu$, *удовлетворяют условиям леммы 2 относительно ортонормированного базиса* $\{\omega_j\}_1^l$, $B_l^2(x)=\sum_1^l b_j^2(\omega_j,x)^2$, $x\in\mathbf{R}^l$, $T_1=\sum_1^\mu V_j$. *Тогда*

$$\mathbf{E}\exp\{-B_l^2(T_1)t^2\}\leqslant c(l)(|t|^{-l}+\varepsilon_l^l)Q_l, \tag{9}$$

где

$$\varepsilon_l^2=8\mathbf{E}\eta_0^2\sum_1^l b_j^2/a_j^2,\quad c(l)<3(3/2)^l\,\Gamma(l/2+1),$$

$$Q_l=\left(\prod_1^l b_j\right)^{-1}\left[e^{2\rho\mu}(4\pi\mu)^{-l/2}\left(\prod_1^l\lambda_j\right)^{-1}+\left(\prod_1^l a_j\right)(2\pi)^{-l}(1/2+\rho)^\mu\right],$$

и при $0<t<l$

$$\mathbf{E}\{B_l^{-t}(T_1);\ B_l(T_1)\geqslant\varepsilon_l\}\leqslant c(l)Q_l^{t/l}/(l-t). \tag{10}$$

Доказательство. Положим в лемме 2 $W=\sum_1^l\eta_i\omega_i/a_i$, где η_i взаимно независимы и одинаково распределены с η_0.

Очевидно, что $B_l(x)$ является нормой в $\mathbf{R}^l$. Вследствие леммы 3 для любого $0<\varepsilon<r$

$$\mathbf{P}(B_l(T_1)<r-\varepsilon)\leqslant\mathbf{P}(B_l(T_1+W)<r)/\mathbf{P}(B_l(W)<\varepsilon).$$

В силу определения W

$$\mathbf{P}(B_l(W)>\varepsilon)<\varepsilon^{-2}\mathbf{E}B_l^2(W)=c_0\varepsilon^{-2}\sum_1^l b_j^2/a_j^2,$$

где $c_0=\mathbf{E}\eta_0^2$. Отсюда $\mathbf{P}(B_l(W)<\varepsilon_l/2)\geqslant 1/2$. Таким образом,

$$\mathbf{P}(B_l(T_1)<r-\varepsilon_l/2)<2\mathbf{P}(B_l(T_1+W)<r). \tag{11}$$

Используя теперь лемму 2, имеем

$$\mathbf{P}(B_l(T_1+W)<r)=\int_{\mathbf{R}^l}p(u)\,I\left(\left\{v\in\mathbf{R}^l:\sum_1^l v_j^2b_j^2<r^2\right\},\ u\right)du<$$

$$<c(l)r^lQ_l,\quad c(l)\leqslant 3(3/2)^l. \tag{12}$$

Здесь $p(u)$ — плотность T_1+W. Из (11), (12) и леммы 5 следуют оценки (9) и (10).

В нижеследующих леммах 7—10 мы будем использовать обозначение $f_x(t)=\mathbf{E}\exp\{it(Y,x)\}$.

Лемма 7. *Пусть* $Z=X+Y$, *где* X *и* Y *независимы. Тогда для любых* $x,y\in H$ *и любого целого* $m\geqslant 0$

$$|\mathbf{E}(Z,x)^m\exp\{it(|Z|^2+(Z,y))\}|\leqslant$$

$$\leqslant c(m)|x|^m\sum_{j+k=m}\mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2j}\,\mathbf{E}^{1/2}|X|^k|X'|^k|f_{X^s}(2t)|.$$

Доказательство. Введем обозначения $u=it$,

$$E_m(x)=\mathbf{E}(Z,x)^m\exp\{u(|Z|^2+(Z,y))\},$$

$$E_{kj}(x)=\mathbf{E}(x,X)^k(x,Y)^j\exp\{u(|Z|^2+(Z,y))\}.$$

Используя неравенство Гёльдера и свойства условных математических ожиданий, имеем следующую цепочку неравенств:

$$|E_{kj}(x)| = \left|\mathbf{E}(Y, x)^j \exp\{u(|Y|^2 + (Y, y))\}\mathbf{E}\{(X, x)^k \exp\{u(|X|^2 + (X, y) + 2(X, Y))\}/Y\}\right| \leqslant \mathbf{E}^{1/2}(Y, x)^{2j}\mathbf{E}^{1/2}\left|\mathbf{E}\{(X, x)^k \exp\{u(|X|^2 + (X, 2Y + y))\}/Y\}\right|^2 \leqslant |x|^j \mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2j}\mathbf{E}^{1/2}\mathbf{E}\{(X, x)^k (X', x)^k \times \exp\{u((X^s, 2Y + y) + |X|^2 - |X'|^2)\}/Y\} = |x|^j \mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2j}\mathbf{E}^{1/2}(X, x)^k (X', x)^k \exp\{u(|X|^2 - |X'|^2 + (X^s, Y))\} \times \mathbf{E}\{\exp\{2u(X^s, Y)\}/X, X'\} \leqslant |x|^{j+k} E^{1/2}|X|^k|X'|^k f_{X^s}(2t)|\mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2j}.$$

Остается воспользоваться тождеством $E_m(x) = \sum\limits_{k+j=m} C_m^k E_{kj}(x)$.

Лемма 8. *Пусть X, Y, V независимы, $X + Y = Z$, $g_1(\cdot)$, $g_2(\cdot)$ — комплексные борелевские функции в H. Тогда*

$$|\mathbf{E}\exp\{it|Z+V|^2\} g_1(X) g_2(V)| \leqslant \mathbf{E}^{1/2}|g_1(X) g_1(X') f_{X^s}(2t)| E|g_2(V)|.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{E}g_1(X) g_2(V) \exp\{it|Z + V|^2\} = \mathbf{E}g_2(V)\mathbf{E}\{\exp\{it|Z + V|^2\} g_1(X)/V\}.$$

Используя свойства условных математических ожиданий и неравенство Коши, для любого $a \in H$ имеем

$$\mathbf{E}\exp\{u|Z + a|^2\} g_1(X)| \leqslant \mathbf{E}^{1/2}|\mathbf{E}\{g_1(X)\exp\{u(|X|^2 + 2(X, Y + a))\}/Y\}|^2 = \mathbf{E}^{1/2} g_1(X)\overline{g_1(X')}\exp\{u(|X|^2 - |X'|^2 + 2(X^s, a))\} \times \mathbf{E}\{\exp\{2u(X^s, Y)\}/X, X'\} \leqslant \mathbf{E}^{1/2}|g_1(X)\bar{g}_1(X') f_{X^s}(2t)|, \quad u = it,$$

где $\bar{g}_1$ — функция, сопряженная к g_1. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Положим $A^+(t) = \{|t|\,|V|^2 > 1\}$, $A^-(t) = \{|t|\,|V|^2 \leqslant 1\}$ (V — СВ).

Лемма 9. *Пусть X, Y, V независимы, $Z = X + Y$. Тогда для любого действительного ε*

$$\mathbf{E}\{(Z, V)^j |V|^{2k} e^{it|Z+\varepsilon V|^2}; A^{\pm}(t)\} \ll |t|^{(3-j-2k)/2}\mathbf{E}|V|^3 \sum_{l+m=j}\mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2l}\mathbf{E}^{1/2}|X|^m|X'|^m|f_{X^s}(2t)|,$$

причем для $A^+(t)$ неравенство справедливо при $0 < j + 2k \leqslant 3$, а для $A^-(t)$ — при $j + 2k \geqslant 3$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{E}\{(Z, V)^j |V|^{2k} e^{u|Z+\varepsilon V|^2}; A^*(t)\} = \mathbf{E}\{(Z, V^*)^j |V^*|^{2k} e^{u|Z+\varepsilon V^*|^2}\},$$

где $A^*(t) = A^{\pm}(t)$, $V^* = VI(A^*(t))$, $u = it$.

Применяя лемму 7, имеем

$$\left|\mathbf{E}\{(Z, V^*)^j |V^*|^{2k} e^{u|Z+\varepsilon V^*|^2}\}\right| = \left|\mathbf{E}|V^*|^{2k} e^{u\varepsilon^2|V^*|^2}\mathbf{E}\{(Z, V^*)^j e^{u(|Z|^2+2\varepsilon(Z,V^*))}/V^*\}\right| \leqslant \mathbf{E}|V^*|^{2k+j}\sum_{l+m=j}\mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2l}E^{1/2}|X|^m|X'|^m|f_{X^s}(2t)|.$$

Остается воспользоваться оценкой $\mathbf{E}|V^*|^{2k+j} \leqslant |t|^{(3-j-2k)/2}\mathbf{E}|V|^3$.

Лемма 10. *Пусть выполнены условия предыдущей леммы. Тогда*

$$\mathbf{E}e^{it|Z+V|^2} = \sum_{0 \leqslant j+2k \leqslant 2} 2^j \frac{(it)^{j+k}}{(j+k)!} C_{j+k}^j \mathbf{E}|V|^{2k}(Z, V)^j e^{it|Z|^2} + R(t),$$

где $R(t) \ll \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant 3}\sum\limits_{l+m=j}|t|^{(3+j)/2}\mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2l}\mathbf{E}^{1/2}|X|^m|X'|^m|f_{X^s}(2t)|\mathbf{E}|V|^3$.

Доказательство. Мы начнем с представления

$$\mathbf{E}e^{u|Z+V|^2} = \mathbf{E}\{e^{u|Z+V|^2}; A^+(t)\} + E\{e^{u|Z+V|^2}; A^-(t)\} \equiv E_1 + E_2, \quad u = it. \tag{13}$$

Положим $g(\cdot) = I(A_t^+, \cdot)$. Очевидно, что $E_1 = \mathbf{E}g(V) e^{u|Z+V|^2}$.

Применяя теперь лемму 8, имеем

$$|E_1| \leqslant \mathbf{P}(A^+(t))\mathbf{E}^{1/2}|f_{X^s}(2t)|. \tag{14}$$

Далее,

$$\mathbf{E}\{e^{u|Z+V|^2}; A^-(t)\} = \sum_0^2 \frac{u^q}{q!}\mathbf{E}\{Q^q e^{u|Z|^2}; A^-(t)\} + r(t), \tag{15}$$

где $r(t) = -(i/6)\int\limits_0^t (t - v)^2\,dv\,\mathbf{E}\{Q^3 e^{u|Z|^2+vQ}; A^-(t)\}$, $Q = 2(Z, V) + |V|^2$.

Вследствие леммы 9

$$\sum_1^2 \frac{u^q}{q!}\mathbf{E}\{Q^q e^{u|Z|^2}; A^-(t)\} = \sum_1^2 \frac{u^q}{q!}\sum_{\substack{j+k=q,\\ j+2k \leqslant 2}} 2^j C_q^j \mathbf{E}(Z, V)^j |V|^{2k} e^{u|Z|^2} + O\left(\mathbf{E}|V|^3 \sum_{j=0}^2 |t|^{(3+j)/2}\sum_{l+m=j}\mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2l}\mathbf{E}^{1/2}|X|^m|X'|^m|f_{X^s}(2t)|\right). \tag{16}$$

Ввиду соотношения (14)

$$\left|\mathbf{E}\{e^{u|Z|^2}; A^-(t)\} - \mathbf{E}e^{u|Z|^2}\right| \leqslant |t|^{3/2}\mathbf{E}|V|^3\mathbf{E}^{1/2}|f_{X^s}(2t)|. \tag{17}$$

Наконец, в силу той же леммы 9

$$|r(t)| \ll \mathbf{E}|V|^3 \sum_{0 \leqslant j \leqslant 3}\sum_{l+m=j}|t|^{(3+j)/2}\mathbf{E}^{1/2}|X|^m|X'|^m|f_{X^s}(2t)|. \tag{18}$$

Из (13) — (18) следует утверждение леммы.

Лемма 11. *Пусть X — гауссовская* СВ, *$p(\cdot, a)$ — плотность* СВ $X + a$. *Тогда*

$$p(\cdot, a) \ll 1/\sigma_1\sigma_2$$

(см. [4, *лемма* 6]).

Лемма 12. *Пусть $S = \sum\limits_1^n X_i$, где X_i независимы и одинаково распределены. Тогда для любого $t \geqslant 1$*

$$\mathbf{E}|S|^t \leqslant c(t)(n^{t/2}(\mathbf{E}|X_1|^2)^{t/2} + n^t|\mathbf{E}X_1|^t + n\mathbf{E}|X_1|^t).$$

Доказательство. Во-первых, $\mathbf{E}|S|^t \leqslant c(t)((\mathbf{E}|S|)^t + n\mathbf{E}|X_1|^t)$ (см., например, [11, следствие 4]). С другой стороны, $\mathbf{E}^2|S| \leqslant \mathbf{E}|S|^2 \leqslant 2(\mathbf{E}|S - \mathbf{E}S|^2 + |\mathbf{E}S|^2) \leqslant 2(n\mathbf{E}|X_1|^2 + n^2|\mathbf{E}X_1|^2)$. Из этих двух неравенств следует утверждение леммы.

§ 2. Доказательство основной теоремы

В дальнейшем n всегда будет обозначать число слагаемых в формулировке основной теоремы. Положим $\overline{X}_j = X_j I(|X_j| < \sigma\sqrt{n})$, $S_n = \sum\limits_1^n \overline{X}_j$.

Пусть случайные величины $X_j(m)$, $j = 1 \div n$, независимы, одинаково распределены, не зависят от X_i и $\mathbf{P}(X_j(m) \in A) = \mathbf{P}(\overline{X}_j \in A/|\overline{X}_j| < \sigma\sqrt{m})$.

Мы будем пользоваться обозначениями $\alpha_\mu^2 = \mu/n$, $\alpha^2 = m/n$. Пусть P_i — оператор проектирования H на подпространство, порожденное векторами $e_1, e_2, \ldots, e_l$. Положим

$$B^2(x)=\mathbf{E}(X_1,x)^2,\quad B_l^2(x)=\mathbf{E}(P_lX_1,x)^2,\quad \delta(l)=\sum_1^l \beta_{3,j}/\sigma_j\sqrt{n}.$$

Пусть $g(t)=\mathbf{E}e^{it|X^*-a|^2}$. Мы по-прежнему будем использовать обозначение $f_x(t)=\mathbf{E}\exp\{it(Y,x)\}$, причем СВ Y в каждом конкретном случае специально определяется. В дальнейшем предполагается, что $n/4\geqslant m\geqslant 8$. Положим $f_n(t)=\mathbf{E}\exp\{it|n^{-1/2}S_n-a|^2\}$. Пусть $\xi_j=I(|\overline{X}_j|<\sigma m^{1/2})$. Рассмотрим представление

$$f_n(t)=\mathbf{E}\{E\exp\{it|n^{-1/2}S_n-a|^2\}/\xi_{n-2m+1},\ldots,\xi_n\}. \tag{19}$$

Оценим

$$f_{\mu,m}(t)\triangleq\mathbf{E}\{\exp\{it|n^{-1/2}S_n-a|^2\}/\xi_j=0,$$
$$j=n-2m+1\div n-\mu,\ \xi_k=1,\ k=n-\mu+1\div n\},\qquad 0\leqslant\mu\leqslant 2m,$$

с помощью леммы 8, полагая

$$X=n^{-1/2}\sum_{n-\mu+1}^{n}X_i(m),\quad Y=n^{-1/2}\sum_1^{n-2m}\overline{X}_i,\quad V=-a+n^{-1/2}\sum_{n-2m+1}^{n-\mu}\overline{X}_i.$$

В результате получаем

$$|f_{\mu,m}(t)|\leqslant\mathbf{E}^{1/2}|f_{X^s}(2t)|. \tag{20}$$

Лемма 13. *Если $m\leqslant\mu\leqslant 2m$ и $t\geqslant 2$, то*

$$\mathbf{E}|X|^t\leqslant c(t)(\sigma a_\mu)^t.$$

Доказательство. В силу леммы 12

$$\mathbf{E}|X|^t\leqslant c(t)((\mu/n)^{t/2}\mathbf{E}|X_1(m)|^2+(\mu/\sqrt{n})^t|\mathbf{E}X_1(m)|^t+\mu^{n-t/2}\mathbf{E}|X_1(m)|^t).$$

Теперь нужно воспользоваться неравенствами

$$\mathbf{E}|X_1(m)|^t\leqslant(\sqrt{m}\sigma)^{t-2}\mathbf{E}|X_1(m)|^2/\mathbf{P}(|X_1|<\sigma\sqrt{m})<2^{t/2}\mu^{t/2-1}\sigma^t,$$
$$|\mathbf{E}X_1(m)|\leqslant 2|\mathbf{E}X_1I(|X_1|\geqslant\sigma\sqrt{m})|\leqslant 2^{3/2}\mu^{-1/2}\sigma.$$

Лемма 14. *Пусть $0<\gamma<l/2$. Тогда*

$$\mathbf{P}(B_l(X_s)\geqslant\delta(l),\ |X^s|^3/B^2(X^s)\geqslant t)\leqslant c(l,\gamma)(\alpha_\mu\sigma^3t^{-1}\Lambda_l^{-2/l})^\gamma,\quad t>0.$$

Доказательство. Положим $A=\{B_l(X^s)\geqslant\delta(l)\}$. По неравенству Чебышева для любого $\gamma>0$

$$\mathbf{P}(|X^s|^3/B^2(X^s)>t,A)\leqslant t^{-\gamma}\mathbf{E}I(A)|X^s|^{3\gamma}/B^{2\gamma}(X^s)\leqslant$$
$$\leqslant(4/t)^\gamma\,\mathbf{E}I(A)|X|^{3\gamma}/B_l^{2\gamma}(X^s),\quad t>0. \tag{21}$$

В силу неравенства Гёльдера

$$\mathbf{E}I(A)|X|^{3\gamma}/B_l^{2\gamma}(X^s)\leqslant\mathbf{E}^{1/q}|X|^{3\gamma q}\,\mathbf{E}^{1/p}I(A)B_l^{-2\gamma p}(X^s), \tag{22}$$
$$p,q>0,\quad 1/p+1/q=1.$$

Для оценки

$$E_0\triangleq\mathbf{E}I(A)B_l^{-t}(X^s),\quad t>0,$$

применим лемму 6, полагая $\sqrt{n}Z_k=P_lX_k^s$, $\sqrt{n}V_j=P_lX_j^s(m)$.

В силу леммы 4

$$|\mathbf{E}\exp\{i(Z_k,\theta)\}|\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{2n}\sum_1^l\sigma_j^2\theta_j^2\right\},$$

если $2\sqrt{2}\,l^2\max\limits_{1\leqslant j\leqslant l}\theta_j\beta_{3,j}/\sigma_j^2\leqslant\sqrt{n}$. Здесь $\theta_j=(\theta,e_j)$. Поэтому мы можем полагать в лемме 6 $a_j=\sigma_j^2\sqrt{n}/\beta_{3,j}l^2(\sqrt{2})^3$.

Далее, в рассматриваемом случае

$$\rho\leqslant\mathbf{P}(|X_1|>\sigma\sqrt{m})+(1/\mathbf{P}(|X_1|\leqslant\sigma\sqrt{m})-1)\mathbf{P}(|X_1|\leqslant\sigma\sqrt{m})=$$
$$=2\mathbf{P}(|X_1|>\sigma\sqrt{m})<2/m. \tag{23}$$

Применяя теперь неравенство (10), получаем

$$E_0\leqslant c(t,l)\alpha_\mu^{-t}\Lambda_l^{-t/l},\quad t<l. \tag{24}$$

Мы учитывали при этом, что

$$a_j<c(l)\sqrt{n}/\sigma_j,\quad \mu^{l/2}(1/2+2/m)^\mu\leqslant c(l)$$

и, следовательно,

$$(1/2+\rho)^\mu\prod_1^l a_j<c(l)\Lambda_l^{-1/2}\alpha_\mu^{-l}. \tag{25}$$

В силу леммы 13

$$\mathbf{E}^{1/q}|X|^{3\gamma q}\leqslant c(\gamma,q)(\sigma\alpha_\mu)^{3\gamma}. \tag{26}$$

Из (21), (22), (24), (26), полагая $p=l/4\gamma$, получаем утверждение леммы.

Лемма 15. *Если* $Y=n^{-1/2}\sum\limits_1^{n-2m}\overline{X}_j$, $X=n^{-1/2}\sum\limits_{n-\mu+1}^n X_i(m)$, *то при* $0<\gamma<l/2$

$$\mathbf{E}^{1/2}|f_{X^s}(2t)|\leqslant c(l)[\Lambda_l^{-1/2}\alpha_\mu^{-l/2}(|t|^{-l/2}+\delta(l)^{l/2})]+$$
$$+c(l,\gamma)((|t|/\sqrt{n})\alpha_\mu\sigma^3\beta_3\Lambda_l^{-2/l})^{\gamma/2}+(3/4)^{n/4}.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$f_x(t)=\mathbf{E}^{n-2m}\exp\{n^{-1/2}it(\overline{X}_1,x)\}. \tag{27}$$

В силу леммы 1

$$|\mathbf{E}\exp\{it(\overline{X}_1,x)\}|^{n/2}\leqslant|\mathbf{E}\exp\{it(X_1,x)\}|^{n/2}e^{\rho n}+(1/2+\rho)^{n/2},$$

где $\rho\leqslant 2\mathbf{P}(|X_1|>\sigma\sqrt{n})\leqslant 2/n$. Таким образом,

$$|\mathbf{E}\exp\{it(\overline{X}_1,x)\}|^{n/2}\leqslant e^2|\mathbf{E}\exp\{it(X_1,x)\}|^{n/2}+(3/4)^{n/2}. \tag{28}$$

Используя одномерный вариант леммы 4, находим, что

$$|\mathbf{E}\exp\{it(X_1,x)\}|<\exp\left\{-\frac{t^2}{4}B^2(x)\right\}<\exp\left\{-\frac{t^2}{4}B_l^2(x)\right\}, \tag{29}$$

если $B^2(x)>|t|\mathbf{E}|(X_1,x)|^3\sqrt{2}$. Из (27)—(29) следует

$$\mathbf{E}|f_{X^s}(2t)|<e^2\left[\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}B_l^2(X^s)\right\}+\right.$$
$$\left.+\mathbf{P}(B^2(X^s)\leqslant 2\sqrt{2}|t|\beta_3|X^s|^3/\sqrt{n})\right]+(3/4)^{n/2}. \tag{30}$$

Для оценки первого слагаемого в правой части (30) применим неравенство (9), а также оценки (23) и (25). В результате получаем

$$\mathbf{E}\exp\{-t^2B_l^2(X^s)\}\leqslant c(l)(|t|^{-l}+\delta^l(l))\Lambda_l^{-1}\alpha_\mu^{-l}. \tag{31}$$

Очевидно, что

$$\mathbf{P}(B^2(X^s)\leqslant 2\sqrt{2}|t|\beta_3|X^s|^3/\sqrt{n})\leqslant\mathbf{P}(B_l^2(X^s)\leqslant\delta^2(l))+$$
$$+\mathbf{P}(B_l^2(X^s)>\delta^2(l),\ B^2(X^s)\leqslant 2\sqrt{2}|t|\beta_3|X^s|^3/\sqrt{n}). \tag{32}$$

Вследствие соотношения (31)

$$\mathbf{P}(B_l^2(X^s) \leqslant \delta^2(l)) \leqslant e\mathbf{E}\exp\{-B_l^2(X^s)/\delta^2(l)\} \leqslant c(l)\,\delta^l(l)\,\Lambda_l^{-1}\alpha_\mu^{-l}. \quad (33)$$

Из (30) — (33) и леммы 14 следует утверждение леммы 15.

Вернемся теперь к представлению (19). В силу неравенства Хёфдинга для вероятностей больших уклонений сумм ограниченных СВ (см., например, [12, с. 76])

$$\mathbf{P}\left(\sum_{n-2m+1}^{n} \xi_j < m\right) < e^{-m/2}.$$

Поэтому из формул (19), (20) и леммы 15 вытекает

$$|f_n(t)| \leqslant \sum_{\mu=m}^{2m} \mathbf{E}\left\{E^{1/2}|f_{X^s}(2t)|;\ \sum_{n-2m+1}^{n}\xi_j = \mu\right\} + e^{-\frac{m}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant c(l)\,[\Lambda_l^{-1/2}\alpha^{-l/2}(|t|^{-l/2} + \delta^{l/2}(l))] +$$
$$+ c(l, \gamma)(|t|\,\alpha\sigma^3\beta_3\Lambda_l^{-2/l}n^{-1/2})^{\gamma/2} + (3/4)^{m/4}. \quad (34)$$

Рассмотрим теперь разность $f_n(t) - g(t)$. Очевидно, что

$$f_n(t) - g(t) = -\sum_{1}^{n}(Q_{j+1}(t) - Q_j(t)), \quad (35)$$

где

$$Q_j(t) = \mathbf{E}\exp\left\{\frac{it}{n}\left|\sum_{1}^{j-1} Y_i + \sum_{j}^{n} \overline{X}_i - a\right|^2\right\},$$

Y_j — независимые гауссовские СВ, совпадающие по распределению с Y и не зависящие от X_j. Для оценки разности $Q_{j+1}(t) - Q_j(t)$ используем лемму 10. Мы ограничимся случаем $j < n/4$. Будем также для простоты считать, что n четное. Положим

$$X = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{n/2+1}^{n}\overline{X}_i, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{1}^{j-1} Y_j + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j+1}^{n/2}\overline{X}_i - a,$$

$V = Y_j/\sqrt{n}$ или $\overline{X}_j/\sqrt{n}$. В результате получаем, что

$$Q_{j+1}(t) - Q_j(t) = (\mathbf{E}|Y_j|^2 - \mathbf{E}|\overline{X}_j|^2)\,\mathbf{E}\exp\{it|Z|^2\}(it/n) +$$
$$+ 2\mathbf{E}((Y_j, Z) - (\overline{X}_j, Z))\exp\{it|Z|^2\}(it/\sqrt{n}) +$$
$$+ 2\mathbf{E}((\overline{X}_j, Z)^2 - (Y_j, Z)^2)\exp\{it|Z|^2\}(t/\sqrt{n})^2 + R_{j+1}(t) - R_j(t) \equiv$$
$$\equiv A(t) + R_{j+1}(t) - R_j(t), \quad (36)$$

где $R_j(t)$ и $R_{j+1}(t)$ — остаточные члены в разложении для $Q_j(t)$ и $Q_{j+1}(t)$. В силу леммы 7

$$|\mathbf{E}(\overline{X}_j, Z)\exp\{it|Z|^2\}| = |\mathbf{E}(\overline{X}_j - X_j, Z)\exp\{it|Z|^2\}| \ll$$
$$\ll \mathbf{E}|X_j - \overline{X}_j| \sum_{l+k=1} \mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2l}\,\mathbf{E}^{1/2}|X|^k|X'|^k|f_{X^s}(2t)|. \quad (37)$$

Далее,

$$\mathbf{E}(\overline{X}_j, Z)^2\exp\{it|Z|^2\} = \mathbf{E}(X_j, Z)^2\exp\{it|Z|^2\} +$$
$$+ \mathbf{E}(X_j - \overline{X}_j, Z)^2\exp\{it|Z|^2\}. \quad (38)$$

Так как $\forall x\ \mathbf{E}(X_j, x)^2 = \mathbf{E}(Y_j, x)^2$, то

$$\mathbf{E}(X_j, Z)^2\exp\{it|Z|^2\} = \mathbf{E}(Y_j, Z)^2\exp\{it|Z|^2\}. \quad (39)$$

Вследствие леммы 7

$$|\mathbf{E}(X_j - \overline{X}_j, Z)^2\exp\{it|Z|^2\}| \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{E}|X_j - \overline{X}_j|^2 \sum_{l+k=2}\mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2l}\,\mathbf{E}^{1/2}|X|^k|X'|^k|f_{X^s}(2t)|. \quad (40)$$

Очевидно, что

$$\mathbf{E}|Y_j|^2 - \mathbf{E}|\overline{X}_j|^2 = \mathbf{E}|X_j|^2 - \mathbf{E}|\overline{X}_j|^2 \leqslant \frac{\beta_3}{\sigma\sqrt{n}}, \quad (41)$$

$$\mathbf{E}|X_j - \overline{X}_j| \leqslant \beta_3/\sigma^2 n, \quad \mathbf{E}|X_j - \overline{X}_j|^2 \leqslant \beta_3/\sigma\sqrt{n}.$$

В силу той же леммы 7

$$|\mathbf{E}\exp\{it|Z|^2\}| \leqslant \mathbf{E}^{1/2}|f_{X^s}(2t)|. \quad (42)$$

Наконец,

$$\mathbf{E}(Y_j, Z)\exp\{it|Z|^2\} = 0. \quad (43)$$

Из (37) — (43) следует

$$A(t) \ll \beta_3 n^{-3/2}(\sigma^{-1}|t|\,\mathbf{E}^{1/2}|f_{X^s}(2t)| +$$
$$+ \sigma^{-3}\sum_{1\leqslant j+k\leqslant 2}\sigma^{j+k}|t|^{j+k}\,\mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2j}\,\mathbf{E}^{1/2}|X|^k|X'|^k|f_{X^s}(2t)|). \quad (44)$$

По неравенству Гёльдера

$$\mathbf{E}|X|^k|X'|^k|f_{X^s}(2t)| \leqslant \mathbf{E}^{2/q}|X|^{kq}\,\mathbf{E}^{1/p}|f_{X^s}(2t)|^p, \quad 1/p + 1/q = 1. \quad (45)$$

В силу леммы 15

$$\mathbf{E}^{1/2}|f_{X^s}(2t)|^p \leqslant c(l)\,[\Lambda_l^{-1/2}(|t|^{-l/2} + \delta^{l/2}(l))] +$$
$$+ c(l, \gamma)(|t|\,n^{-1/2}\beta_3\sigma^3\Lambda_l^{-2/l})^{\gamma/2} + (3/4)^{n/4}. \quad (46)$$

С другой стороны, вследствие леммы 13

$$\mathbf{E}^{2/q}|X|^{kq} \leqslant c(k, q)\,\sigma^{2k}, \quad \mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2j} < c(j)(\sigma^j + |a|^j). \quad (47)$$

Из (35), (36), (44) — (47) и оценки остаточного члена в лемме 10 вытекает

$$|f_n(t) - g(t)| \leqslant c(p)\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}\left(\sum_{1}^{2}\sigma^{j-3}|t|^j(\sigma^j + |a|^j) +\right.$$
$$\left.+ \sum_{0}^{3}|t|^{(3+j)/2}(\sigma^j + |a|^j)\right)\min[1, c(l)\,\Lambda_l^{-1/2}(|t|^{-l/2} + \delta^{l/2}(l))^{\gamma/2} +$$
$$+ c(l, \gamma)(\sigma^3\beta_3|t|/\sqrt{n}\,\Lambda_l^{2/l})^{\gamma/2} + (3/4)^{n/4}]^{1/p}. \quad (48)$$

Положим

$$\Delta_n(a) = \sup_{r>0}|\mathbf{P}(|S_n/\sqrt{n} - a|^2 < r) - \mathbf{P}(|X^* - a|^2 < r)|,$$

$$\Gamma_{1,l} = \beta_3\sigma^3/\Lambda^{3/l}, \quad \Gamma_{2,l} = \sum_{1}^{l}\beta_{3,j}/\sigma_j, \quad \tau = \sqrt{n}\min[1/\Gamma_{2,l}, \Lambda_l^{2/l}/\beta_3\sigma^3].$$

Используя неравенство Эссеена (см., например, [11]) и лемму 11, имеем

$$\Delta_n(a) \ll \int_{|t|\leqslant\tau}\frac{|f_n(t) - g(t)|}{|t|}\,dt + (\sigma_1\sigma_2\tau)^{-1}. \quad (49)$$

Положим $\tau_1 = \Lambda_l^{-1/l}$, $\tau_2 = \Lambda_l^{-1/l} (\sqrt{n}/\Gamma_{1,l})^{\gamma/(\gamma+l)}$. Не нарушая общности, можно считать, что $\tau_1 < \tau_2 < \tau$. В этом случае

$$\int\limits_{|t|<\tau} \left| \frac{f_n(t) - g(t)}{t} \right| dt \leqslant \int\limits_{|t|\leqslant\tau_1} \left| \frac{f_n(t) - g(t)}{t} \right| dt + \int\limits_{\tau_1<|t|<\tau_2} \left| \frac{f_n(t) - g(t)}{t} \right| dt +$$

$$+ \int\limits_{\tau_2\leqslant t\leqslant\tau} \left| \frac{f_n(t)}{t} \right| dt + \int\limits_{\tau_2\leqslant t\leqslant\tau} \left| \frac{g(t)}{t} \right| dt = \sum_1^4 I_k. \tag{50}$$

Согласно соотношению (48)

$$I_1 \ll \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} \left(\sum_1^2 \sigma^{j-3} (\sigma^j + |a|^j) \Lambda_l^{-j/l} + \sum_0^3 \Lambda_l^{-(3+j)/2l} (\sigma^j + |a|^j) \right) \equiv A. \tag{51}$$

Очевидно, при $0 < j \leqslant 2$

$$\sigma^{j-3} \leqslant \Lambda_l^{(j-3)/2l}. \tag{52}$$

Поэтому $\sigma^{2j-3} \leqslant \sigma^3 \Lambda_l^{(j-3)/l}$. Следовательно,

$$\sum_1^2 \sigma^{2j-3} \Lambda_l^{-j/l} \leqslant 2\sigma^3 \Lambda_l^{-3/l}. \tag{53}$$

Если $|a| > \sigma$, то в силу (52)

$$\sigma^{j-3} |a|^j = \sigma^{2j-6} |a|^j \sigma^{3-j} < \Lambda_l^{(j-3)/l} |a|^3, \quad 0 \leqslant j \leqslant 3,$$

и, следовательно,

$$\sum_1^2 \sigma^{j-3} |a|^j \Lambda_l^{-j/l} < 2\Lambda_l^{-3/l} |a|^3. \tag{54}$$

Далее,

$$\Lambda_l^{-j/2l} \sigma^j \leqslant \Lambda_l^{-3/2l} \sigma^3, \quad 0 \leqslant j \leqslant 3. \tag{55}$$

Если $|a| > \sigma$, $0 \leqslant j \leqslant 3$, то

$$\Lambda_l^{-j/2l} |a|^j < \sigma^{3-j} |a|^j / \Lambda_l^{3/2l} < |a|^3 \Lambda_l^{-3/2l}. \tag{56}$$

Из (51) и (53) — (56) вытекает

$$I_1 \ll A \ll \beta_3 (|a|^3 + \sigma^3) / \Lambda^{3/l} \sqrt{n}. \tag{57}$$

Оценим теперь I_2. Используя неравенство (57), имеем $\forall\,((2/13)l \geqslant$ $\geqslant p > 1)$

$$\beta_3 \Lambda_l^{-1/2p} n^{-1/2} \int\limits_{|t|>\tau_1} \left(\sum_1^2 \sigma^{j-3} |t|^j (\sigma^j + |a|^j) + \sum_0^3 |t|^{(3+j)/2} (\sigma^j + \right.$$

$$\left. + |a|^j) \right) |t|^{-l/2p-1} dt \ll (\beta_3/n^{-1/2}) \left(\sum_1^2 \sigma^{j-3} \Lambda_l^{-j/l} (\sigma^j + |a|^j) + \right.$$

$$\left. + \sum_0^3 (\sigma^j + a|^j) \ \Lambda_l^{-(3+j)/2l} \right) = A \ll \beta_3 (\sigma^3 + |a|^3) / \Lambda_l^{3/l} \sqrt{n}. \tag{58}$$

Далее, при $|t| < \tau_2$

$$(|t| \sigma^3 \beta_3 / \Lambda_l^{2/l} \sqrt{n})^{\gamma/2} < \Lambda_l^{-1/2} |t|^{-l/2}, \tag{59}$$

$$(3/4)^{n/4} \ll \Lambda_l^{-1/2} \delta^{l/2}(l) \leqslant \Lambda_l^{-1/2} |t|^{-l/2}. \tag{60}$$

Из (58) — (60) следует

$$I_2 \ll \beta_3 (|a|^3 + \sigma^3) / \Lambda_l^{3/l} \sqrt{n}. \tag{61}$$

Теперь оценим I_3. Для этого воспользуемся оценкой (34). Пусть $\alpha = \alpha(t)$, $t > 0$, удовлетворяет уравнению

$$\Lambda_l^{-1/2} (\alpha t)^{-l/2} = (\alpha t \beta_3 \sigma^3 / \Lambda_l^{2/l} \sqrt{n})^{\gamma/2}. \tag{62}$$

Выберем натуральное $m(t)$ так, что

$$|m(t)/n - \alpha^2(t)| = \min_m |m/n - \alpha^2(t)|.$$

Положим в (34) $\alpha^2 = m(t)/n$. Запишем уравнение (62) в виде

$$1/\Lambda_l^{1/2} (\alpha t)^{l/2} = \Lambda_l^{\gamma/2l} (\alpha t \Gamma_{1,l} / \sqrt{n})^{\gamma/2}.$$

Отсюда

$$\alpha t = \Lambda^{-1/l} (\Gamma_{1,l} / \sqrt{n})^{-\gamma(l+\gamma)}. \tag{63}$$

Далее,

$$\alpha(\tau) \geqslant (\Gamma_{1,l} / \sqrt{n})^{l/(l+\gamma)}. \tag{64}$$

Заметим, что $\Gamma_{1,l} \geqslant 1$. Кроме того, не нарушая общности, можно считать, что $\Gamma_{1,l}/\sqrt{n} \leqslant 1$. Таким образом, при $t < \tau$, $\gamma > l\varepsilon$

$$\alpha(t) > \alpha(\tau) > (1/\sqrt{n})^{1/(1+\varepsilon)}. \tag{65}$$

Это означает, что

$$m(t)/n > c(\gamma) \alpha^2(t). \tag{66}$$

В силу равенства (63)

$$\Lambda_l^{-1/2} (\alpha t)^{-l/2} = (\Gamma_{1,l} / \sqrt{n})^{\gamma l/2(l+\gamma)}. \tag{67}$$

Из (34), (62), (66), (67) вытекает

$$I_3 \leqslant c(l, \gamma) \left((\Gamma_{1,l} / \sqrt{n})^{l\gamma/2(l+\gamma)} + (3/4)^{m(\tau)/4} \right) \ln \frac{\tau}{\tau_2}. \tag{68}$$

Нетрудно видеть, что

$$\tau/\tau_2 \leqslant (\Gamma_{1,l} / \sqrt{n})^{-l/(l+\gamma)}. \tag{69}$$

Из (65), (68) и (69) для любого $\eta > 0$ следует

$$I_3 < c(l, \gamma, \eta) (\Gamma_{1,l} / \sqrt{n})^{l\gamma/2(l+\gamma)-\eta}.$$

Полагая теперь $l = 7$ и выбирая γ достаточно близким к $l/2$, а η достаточно малым, например $\gamma = 3$, $\eta = 1/20$, получаем

$$I_3 \ll \Gamma_{1,7} / \sqrt{n}. \tag{70}$$

Нам остается оценить I_4. Нетрудно видеть, что $|g(t)| \leqslant \Lambda_l^{-1/2} |t|^{-l/2}$. Отсюда $\forall\,(0 < \gamma < l/2)$ $\quad I_4 \ll (\Gamma_{1,l}/\sqrt{n})^{\gamma l/2(l+\gamma)}$. Следовательно,

$$I_4 \ll \Gamma_{1,7} / \sqrt{n}. \tag{71}$$

Соотношения (49), (50), (57), (61), (70), (71) влекут неравенство

$$\Delta_n(a) \ll (\beta_3 (\sigma^3 + |a|^3) \Lambda_7^{-3/7} + (\sigma^3 \beta_3 / \Lambda_7^{2/7} + \Gamma_{2,7}) / \sigma_1 \sigma_2) / \sqrt{n}.$$

Чтобы закончить доказательство, достаточно заметить, что $\left| \mathbf{P}(S_n \in A) - \right.$ $\left. -\mathbf{P}\left(\sum_1^n X_j \in A \right) \right| \ll \beta_3 / \sigma^3 \sqrt{n}$ и $\sigma_1 \sigma_2 \geqslant \Lambda_7^{1/7}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nagaev S. V.* On accuracy of normal approximation for distribution of sum of independent Hilbert space valued random variables // IV USSR — Japan symposium on probability theory and mathematical statistics, Tbilisi, aug. 1982: Abstracts of communications.— V. VII.— P. 130—131.

2. *Nagaev S. V.* On accuracy of normal approximation for distribution of sum of independent Hilbert space valued random variables // Probability theory and mathematical statistics: Proc./Fourth USSR — Japan Symporium, Tbilisi, sug. 1982.— Berlin etc.: Springer, 1983.— P. 461—473.— (Lectures notes in Math.; 1021).
3. *Нагаев С. В.* Об оценках типа Берри — Эссеена для сумм независимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР.— 1984.— Т. 276, № 6.— С. 1315—1316.
4. *Нагаев С. В.* О скорости сходимости к нормальному закону в гильбертовом пространстве // Теория вероятностей и ее применения.— 1985.— Т. 30, вып. 1.— С. 19—32.
5. *Sazonov V. V., Ulyanov V. V., Zalesskii B. A.* Normal approximation in Hilbert space // IV международная Вильнюсская конф. по теории вероятностей и мат. статистике, Вильнюс, июнь 1985: Тез. докладов.— Т. IV.— С. 270—272.
6. *Ульянов В. В.* Асимптотическое разложение для распределений сумм независимых случайных величин в H // Теория вероятностей и ее применения.— 1986.— Т. 31, вып. 1.— С. 31—47.
7. *Нагаев С. В., Чеботарев В. И.* О зависимости оценки скорости сходимости к нормальному закону от ковариационного оператора. Случай неодинаково распределенных слагаемых // Теория вероятностей и ее применения.— 1983.— Т. 28, вып. 3.— С. 599, 600.
8. *Gotze F.* Asymptotic expansions for bivariate van Mises functionals // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1979.— Bd 50, H. 3.— S. 333—355.
9. *Нагаев С. В., Чеботарев В. И.* Уточнение оценки погрешности нормальной аппроксимации в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн.— 1986.— Т. 27, № 3.— С. 154—173.
10. *Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р.* Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения.— М.: Наука, 1982.
11. *Нагаев С. В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве // Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы.— Новосибирск: Наука, 1982.— С. 159—167.— (Тр. Ин-та математики/АН СССР. Сиб. отд-ние. Т. 2).
12. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин.— М.: Наука, 1972.

г. Новосибирск

Статья поступила
1 апреля 1987 г.

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXX, № 3 1989

УДК 514.765

М. Н. ПОДОКСЕНОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРУПП ЛИ

Основные результаты

Известно, что любое аффинное преобразование (т. е. биекция, переводящая прямые в прямые) евклидова пространства разлагается в композицию параллельного переноса, вращения, растяжения по координатным осям отражения. Назовем *группопрямыми* одномерные смежные классы группы Ли. Естествен вопрос, поставленный А. В. Левичевым: что можно сказать про преобразования групп Ли, переводящие группопрямые в группопрямые? Назовем такие преобразования *группоаффинными*. Группы Ли всюду подразумеваются конечномерными и вещественными.

З а м е ч а н и е 1. Группоаффинное преобразование может не быть непрерывным. Более того, пусть $Q=\{z=z_0+iz_1+jz_2+kz_3 \mid z_0^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2=1\}$ — группа Ли, состоящая из кватернионов, равным по модулю единице. Положим $f(z)=z$, если все z_i, $i=0, 1, 2, 3$, иррациональны, и $f(z)=z$ в противном случае. Тогда f — группоаффинное преобразование группы Ли Q и f разрывно в каждой точке.

Далее мы рассматриваем только гладкие преобразования и под гладкостью понимаем гладкость класса C^∞.

Известно [1], что на группе Ли существует единственная левоинвариантная линейная связность без кручения, при которой группопрямые и только они являются геодезическими. Назовем ее естественной. Проективные преобразования группы Ли с естественной связностью и только они будут ее гладкими группоаффинными преобразованиями. Обозначим через $P_G(\nabla)$ и $A_G(\nabla)$ соответственно группы проективных и аффинных преобразований группы Ли G с естественной связностью ∇.

Пусть $\{G_\alpha\}$, $\alpha\in I$ — множество компонент связности группы Ли G. Предполагаем, что G удовлетворяет второй аксиоме счетности, а поэтому множество I не более чем счетно.

Лемма 1. *Непрерывное группоаффинное преобразование $f\colon G\to G$ отображает компоненты связности группы Ли на компоненты связности.*

Пусть $L(a)\colon g\to a\cdot g$ — левый сдвиг. В силу леммы 1 любое $f\in P_G(\nabla)$ можно представить в виде $f|_{G_\alpha}=L(a_{\sigma(\alpha)})\circ f_\alpha\circ L^{-1}(a_\alpha)$, где σ — некоторое преобразование множества I, равного (как абстрактное множество) G/G_0, $a_\alpha\in G_\alpha$, $a_{\sigma(\alpha)}\in G_{\sigma(\alpha)}$, а $f_\alpha\in P_{G_0}(\nabla)$. Таким образом, задача сводится к изучению группоаффинных преобразований связных групп Ли. Здесь G_0 — компонента связности единичного элемента $e\in G$.

Говорим, что линейное преобразование A алгебры Ли сохраняет скобку $[[X, Y], Z]$, если выполнено равенство

$$[[AX, AY], AZ]=A[[X, Y], Z] \tag{1}$$

для всех $X, Y, Z\in\mathcal{G}$.

В настоящей работе будут доказаны следующие основные результаты.