ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1998, том 359, № 4, с. 461–463

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ И ТОЧНОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫМИ ЗАКОНАМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

 С. В. Нагаев

Представлено академиком Ю.Г. Решетняком 26.12.95 г.

Поступило 15.02.96 г.

Пусть H – действительное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X, X_1, \ldots, X_n \ldots$, принимающих значения в H.

В настоящем сообщении будут сформулированы некоторые оценки, характеризующие точность приближения распределения суммы $S_n = \sum_1^n X_j$ сопровождающим безгранично делимым законом, а также оценки для функции концентрации S_n. Последние являются необходимым инструментом при изучении точности приближения безгранично делимыми распределениями. Разумеется, они имеют и самостоятельный интерес.

Самый факт сближения с сопровождающими безгранично делимыми законами без каких-либо оценок был установлен в [1, 2].

Введем некоторые дополнительные обозначения. Для любых $x \in H$ и $0 < L \le \infty$ положим

$$B^2(x;\, L) = E\{(X^s, x)^2;\; |X| \wedge |X'| \le L\}.$$

Здесь X' – независимая копия X, $X^s = X - X'$ – симметризация X, $p_L = P(|X| \le L)$. Легко видеть, что

$$B^2(x;\, L) = 2E\{(X - a_L, x)^2;\; X \le L\},$$

где $a_L = E\{X|\, |X| \le L\}$.

Пусть $\sigma_1^2(L) \ge \sigma_2^2(L) \ge \ldots$ – собственные значения квадратичной формы $B^2(x;\, L)$, $\Lambda_l(L) = \prod_1^l \sigma_j^2(L)$, $\sigma^2 = E|X|^2$, $\sigma^2(L) = \sum_1^\infty \sigma_j^2(L)$.

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

Положим $F(A) = P(X \in A)$, $G_n = \exp\{n(F - E_0)\}$, где E_0 – распределение, сосредоточенное в 0. Введем обозначение

$$V(a, r) = \{x;\, x \in H, |x - a| \le r\}.$$

В одномерном случае мы будем пользоваться обозначениями $F(r) = P(X < r)$, $G_n(r) = G_n((-\infty, r))$, $Q(X, \lambda) = \sup_r P(r < X < r + \lambda)$.

Мы начнем с оценок для функции концентрации.

Теорема 1. *Для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $0 < L < \infty$

$$\sup_{r \ge 0,\, a \in H} P(r < |S_n + a|^2 < r + \varepsilon) \ll \ll \frac{\varepsilon/n + L\sigma(L)/\sqrt{n}}{\Lambda_3^{1/3}(L)}. \qquad (1)$$

Здесь и ниже символ $A \ll B$ означает наличие абсолютной постоянной c такой, что $A \ll cB$.

Обратим внимание читателя на то, что оценка (1) равномерна относительно a. Если заменить $|S_n + a|^2$ на $|S_n + a|$, то равномерность нарушается. Заметим, что оценка (1) неприменима к одномерному случаю. Поэтому нам придется рассмотреть этот случай отдельно.

Теорема 2. *Пусть* $H = R_1$. *Тогда*

$$Q(S_n, \varepsilon) \ll (\varepsilon + L)/b(L)\sqrt{n}, \qquad (2)$$

где

$$b^2(L) = E\{|X^s|^2;\; |X^s| \le L\}.$$

Оценка (2) используется при доказательстве теоремы 4. Она в случае $\varepsilon > L$ легко извлекается из классической оценки Эссеена для функции концентрации (см. [3]).

Следующий результат касается устойчивости распределения $|S_n + a|^2$ при изменении n.

Теорема 3. *Если* $EX = 0$ *и* $\sigma^2 < \infty$, *то для любых* $k > 0$ *и* $0 < L < \infty$

$$\left|F^{(n+k)*}(V(a, r)) - F^{n*}(V(a, r))\right| \leqslant$$
$$\leqslant k(\sigma^4 + B^2(a)/n)/\Lambda_5^{2/5}(L) + L\sigma(L)/\Lambda_3^{1/3}\sqrt{n}, \quad (3)$$

где $B^2(a) = B^2(a; \infty)$.

Оценка (3) усиливает теорему 3 работы [8].

Одномерный аналог (3) выглядит следующим образом.

Теорема 4. *Пусть* $H = R_1$, $EX = 0$ *и* $\sigma^2 < \infty$. *Тогда для любых* $k > 0$ *и* $0 < L < \infty$

$$\left|F^{(n+k)*}(r) - F^{n*}(r)\right| \leqslant$$
$$\leqslant k\sigma^2/b^2(L)n + L/b(L)\sqrt{n}. \quad (4)$$

В работе [6] получена оценка

$$\sup_{F \in \mathcal{M}} \left|F^{(n+1)*}(r) - F^{n*}(r)\right| \leqslant n^{-1/2},$$

где $\mathcal{M}$ – класс распределений с нулевой медианой.

Теорема 5. *Если* $EX = 0$ *и* $\sigma^2 < \infty$, *то для любого* $0 < L \leq \infty$

$$\sup_r\left|F^{n*}(V(a, r)) - G_n(V(a, r))\right| \leqslant$$
$$\leqslant (\sigma^4 + B^2(a)/n)/\Lambda_5^{2/5}(L)\sqrt{n} +$$
$$+ L\sigma(L)/\Lambda_3^{1/3}(L)\sqrt{n}. \quad (5)$$

Доказательство. Применяя оценку (3), имеем

$$\left|F^{n*}(V(a, r)) - G_n(V(a, r))\right| <$$
$$< e^{-n}\sum_{k \geq \frac{n}{2}}\left|F^{n*}(V(a, r)) - F^{k*}(V(a, r))\right|\frac{n^k}{k!} +$$
$$+ e^{-n}\sum_{k < \frac{n}{2}}\frac{n^k}{k!} \leqslant n^{-1}e^{-1}\Lambda_5^{-2/5}\left(\sigma^4 + \frac{B^2(a)}{n}\right)\sum_0^\infty|n-k|\frac{n^k}{k!} +$$
$$+ L\sigma(L)/\Lambda_3^{1/3}(L)\sqrt{n} \leqslant \left(\sigma^4 + \frac{B^2(a)}{n}\right)/\Lambda_5^{2/5}(L)\sqrt{n} +$$
$$+ L\sigma(L)/\Lambda_3^{1/3}(L)\sqrt{n}.$$

Теорема 5 усиливает соответствующий результат, полученный в [8].

Теорема 6. *Пусть* $H = R_1$, $EX = 0$. *Тогда для любого* $0 < L < \infty$

$$\sup_r\left|F^{n*}(V(r)) - G_n(V(r))\right| \leqslant \frac{\sigma^2/b^2(L) + L/b(L)}{\sqrt{n}}. \quad (6)$$

Теорема 6 доказывается точно так же, как и теорема 5, с той лишь разницей, что вместо оценки (3) используется оценка (4).

Оценки (5) и (6) являются аналогами оценки Берри–Эссеена в случае, когда в качестве приближающего используется не гауссовский, а сопровождающий безгранично делимый закон. Оценка $O(1/\sqrt{n})$, равномерная в классе симметричных распределений, была получена в [6]. В работе [7] доказано, что в классе распределений с положительной характеристической функцией аппроксимация сопровождающим законом имеет порядок $O(1/n)$.

В отличие от оценок, полученных в [4, 5], оценка (6) учитывает через σ^2 и b^2 индивидуальные свойства распределения слагаемых. Именно за счет этого она является более точной в смысле зависимости от n в случае, когда приближающий безгранично делимый закон является сопровождающим.

Оценка (5) нетривиальна лишь в случае $B^2(a)/\Lambda^{2/5}(L)n^{3/2} \leqslant 1$, т.е. при не слишком большой норме $|a|$. Поэтому мы дополним эту оценку другой, убывающей с ростом $|a|$.

Для любого $a \in H$ положим $a^0 = \dfrac{a}{|a|}$. Пусть

$$\sigma^2(a; \gamma) = E\{(X^s, a)^2;\ |(X, a)| < \gamma\}.$$

Заметим, что $\sigma^2(a; \infty) = B^2(a)$.

Теорема 7. *Если* $EX = 0$ *и* $\sigma^2 < \infty$, *то для любого* $0 < \gamma \leq \infty$

$$\sup_r\left|F^{n*}(V(a, r)) - G_n(V(a, r))\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n^{1/4}\sigma}{|a|^{1/2}\sigma^{1/2}(a^0; \gamma)} + \frac{\sigma^2(a^0)/\sigma^2(a^0; \gamma) + \gamma/\sigma(a^0; \gamma)}{\sqrt{n}}. \quad (7)$$

Доказательство. Очевидно,

$$|S_n + a|^2 = |S_n|^2 + 2(S_n, a) + |a|^2.$$

Полагая $\dfrac{|S_n|^2}{|a|} = \xi_n$, $2(S_n, a^0) + |a| = \eta_n$, имеем

$$|P(\xi_n + \eta_n < r) - P(\eta_n < r)| < P(\xi_n > \varepsilon) + Q(\eta_n, \varepsilon).$$

В силу (2)

$$Q(\eta_n, \varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon + \gamma}{\sigma(a^0; \gamma)\sqrt{n}}.$$

Нетрудно видеть, что

$$P(\xi_n > \varepsilon) < \frac{n\sigma^2}{|a|\varepsilon}.$$

Полагая

$$\varepsilon = \frac{n^{3/4}\sigma^{1/2}(a_0; \gamma)\sigma}{|a|^{1/2}},$$

мы получаем оценку

$$\left|P(|S_n + a|^2 < r) - P(2(S_n, a) < r - |a|^2)\right| \ll$$

$$\ll n^{1/4}\sigma/|a|^{1/2}\ \sigma(a^0;\gamma) + \gamma/\sigma(a^0;\gamma)\sqrt{n}.$$

Эта оценка остается справедливой и для Z_n.

В силу теоремы 6

$$\sup_r\left|P((S_n, a^0) < r) - P((Z_n, a^0) < r)\right| \ll$$

$$\ll \frac{\sigma^2/\sigma^2(a^0;\gamma) + \gamma/\sigma(a^0;\gamma)}{\sqrt{n}}.$$

Из двух последних оценок следует утверждение теоремы.

Комбинируя оценки (5) и (7), получим оценку, равномерную по всем шарам в H. Однако для этого нам придется наложить дополнительное ограничение.

Предположим, что существует γ_0 такое, что для любого a

$$\sigma(a^0; B(a^0)) > \gamma_0 B(a^0). \quad (8)$$

Если $B(a) \le \sigma^2\gamma_0^{1/5} n^{7/10}$, то ввиду (5)

$$\delta_n(a) \equiv \sup_r\left|P(S_n \in V_n(a,r)) - P(Z_n \in V_n(a,r))\right| \ll$$

$$\ll \frac{\gamma_0^{-2/5} n^{-1/10}\sigma^4}{\Lambda_5^{2/5}(L)} + \frac{L\sigma(L)/\Lambda_3^{1/3}(L)}{\sqrt{n}}. \quad (9)$$

Полагая в (7) $\gamma = B(a_0)$, имеем

$$\delta_n(a) \ll \frac{n^{1/4}\sigma}{B^{1/2}(a)\gamma_0^{1/2}} + \frac{1}{\gamma_0^2\sqrt{n}}.$$

Если $B(a) \ge \sigma^2\gamma_0^{1/5} n^{7/10}$, то отсюда следует оценка

$$\delta_n(a) \ll \gamma_0^{-2/5} n^{-1/10} + \frac{1}{\gamma_0^2\sqrt{n}}. \quad (10)$$

Сравнивая оценки (9) и (10), мы убеждаемся, что справедлива

Т е о р е м а 8. *Если $EX = 0$, $\sigma^2 < \infty$ и выполнено условие* (8), *то*

$$\sup_{r,a}\left|F^{n*}(V(a,r)) - G_n(V(a,r))\right| = O(n^{-1/10}).$$

В работе [2] доказывается, что

$$\sup_a\left|F^{n*}(V(a,r)) - G_n(V(a,r))\right| \to 0$$

при $n \to \infty$, если распределение F является симметричным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда Дж. Сороса (грант NQA300).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бакитис Г., Паулаускас В.И.* // Лит. мат. сб. 1987. Т. 27. № 2. С. 224–235.
2. *Бакитис Г.* // Там же. 1989. Т. 29. № 3. С. 423–428.
3. *Esseen C.G.* // Ztschr. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb. 1968. Bd. 9. S. 290–308.
4. *Колмогоров А.Н.* // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 12. С. 437–451.
5. *Le Cam L.* In: Bernoulli, Bayes, Laplace: Anniversary Volume. B.; Heidelberg: N.Y.: Springer, 1965. P. 179-202.
6. *Зайцев А.Ю.* // Теория вероятностей и ее применение. 1981. Т. 26. № 1. С. 152–156.
7. *Арак Т.В.* // Там же. 1980. Т. 25. № 2. С. 225–246.
8. *Nagaev S.V.* // Prepr. № 90–094. Univ. Bielefeld, 1990. P. 1–33.