ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1998, том 359, № 5, с. 590–592

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

# АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ЦЕПЯМ МАРКОВА, ВОЗВРАТНЫМ ПО ХАРРИСУ, И ОЦЕНКА БЕРРИ–ЭССЕЕНА

© 1998 г. С. В. Нагаев

Представлено академиком Ю.Г. Решетняком 09.12.95 г.

Поступило 15.02.96 г.

Пусть $\{X_n\}_0^\infty$ – однородная цепь Маркова с переходной функцией $p(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathbf{S}$, где $(X, \mathbf{S})$ – измеримое пространство. Предположим, что цепь $\{X_n\}$ удовлетворяет следующим двум условиям:

а) существует множество $A_0 \in \mathbf{S}$, неотрицательная мера $\varphi$, определенная на $A_0\mathbf{S}$ с $\varphi(A_0) > 0$, и $n_0 \geq 1$ такие, что для всех $x \in A_0$ и $B \in A_0\mathbf{S}$

$$p^{(n_0)}(x, B) \geq \varphi(B);$$

б) для любого $x$

$$P_x\left(\bigcup_1^\infty \{X_n \in A_0\}\right) = 1.$$

Здесь и в дальнейшем $P_x$ означает вероятность на пространстве траекторий процесса $\{X_n\}$ при условии $X_0 = x$.

Определим субмарковскую переходную функцию $\varphi(\cdot, \cdot)$ равенствами $\varphi(x, B) = \varphi(A_0B)$, если $x \in A_0$ и $\varphi(x, B) = 0$ для $x \in X - A_0$. Положим $\omega(\cdot, \cdot) = p(\cdot, \cdot) - \varphi(\cdot, \cdot)$. Пусть $\omega^{(k)}(\cdot, \cdot)$ – $k$-я итерация переходной функции $\omega(\cdot, \cdot)$. Введем обозначение

$$q(x, \cdot) = \sum_0^\infty \omega^{(k)}(x, \cdot).$$

Здесь $\omega^{(0)}(x, \cdot) = e(x, \cdot)$, где $e(x, \cdot)$ – вероятностная мера, сосредоточенная в $x$.

В заметке [1] доказано, что мера

$$q(\cdot) := \int_{A_0} q(x, \cdot)\varphi(dx)$$

является инвариантной для процесса $\{X_n\}$, т.е.

$$q(\cdot) = \int_X p(x, \cdot)q(dx).$$

Определим субмарковскую цепь $\{X_n^*\}_0^\infty$ набором совместных распределений (несобственных)

$$P_x(X_1^* \in B_1, \ldots, X_n^* \in B_n) :=$$

$$:= \int_{B_1} \omega(x, dx_1) \int_{B_2} \omega(x_1, dx_2) \ldots \int_{B_n} \omega(x_{n-1}, dx_n).$$

Поскольку условие согласованности распределений в данном случае не выполняется, цепь $\{X_n^*\}$ не является процессом в общепринятом смысле.

Нетрудно, однако, описать цепь $\{X_n^*\}$ как некоторое сужение подходящим образом определенной марковской цепи. С этой целью расширим фазовое пространство $X$, добавив к нему новый элемент, скажем $x^0$. Обозначим это расширение $X^0$. Пусть $\mathbf{S}^0$ – наименьшая $\sigma$-алгебра, содержащая $\mathbf{S}$ и $\cup\{x^0\}$.

Введем переходную функцию $p_0(\cdot, \cdot)$ на $(X^0, \mathbf{S}^0)$, полагая $p_0(x^0, \{x^0\}) = 1$, $p_0(x, \{x^0\}) = \varphi(A_0)$ для $x \in A_0$, $p_0(x, \{x^0\}) = 0$ для $x \in X - A_0$, $p_0(x, B) = p(x, B)$, если $x \in X$, $B \in \mathbf{S}$.

Тогда для любых $x \in X$ и $B_j \in \mathbf{S}$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$P_x(X_1^* \in B_1, \ldots, X_n^* \in B_n) =$$

$$= P_x^0(X_1^0 \in B_1, \ldots, X_n^0 \in B_n),$$

где $\{X_n^0\}_0^\infty$ – цепь Маркова, соответствующая переходной функции $p_0(\cdot, \cdot)$, $P_x^0$ означает распределение на траекториях процесса $\{X_n^0\}$ при условии $X_0^0 = x$.

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

Очевидно, $x^0$ является поглощающим состоянием цепи $\{X_n^0\}$. Обозначим через $\mathbf{S}^n$ декартово произведение $n$ экземпляров $\sigma$-алгебры $\mathbf{S}$.

Пусть $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_j \in X$, – любая комплексная функция, измеримая относительно $\mathbf{S}^n$. Введем математическое ожидание

$$E_x g(X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*) =$$
$$= E_x\{g(X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0); N > n\},$$

где $N$ – момент первого попадания в $x^0$.

Положим

$$p_k = \int_{A_0} \omega^{(k-1)}(x, A_0)\varphi(dx),$$

$$\beta_s = \sum_1^\infty k^s p_k, \quad \beta_s(x) = \sum_0^\infty (k+1)^s \omega^{(k)}(x, A_0).$$

Пусть $g(x)$ – действительная функция, измеримая относительно $\mathbf{S}$. Положим

$$a_0 = \int_X g(x)q(dx), \quad b^2 = \int_X g^2(x)q(dx),$$

$$m(x) = \int_X |g(y)| q(x, dy),$$

$$\alpha_s = \sum_{n=0}^\infty \int_{A_0} \varphi(dx) E_x\left\{\left|\sum_{k=0}^n g(X_k^*)\right|^s; X_n^* \in A_0\right\}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $n_0 = 1$, *моменты* $b^2$, $m(x)$, $\alpha_3$, $\beta_3$, $\beta_2(x)$ *конечны*, $\sigma^2 > 0$, $a_0 = 0$. *Тогда*

$$\sup_r \left| P_x\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n g(X_k) < r\right) - \Phi(\mu^{1/2} r/\sigma)\right| <$$
$$< c\left(\left(\frac{\mu^{1/2}\alpha_3}{\sigma^3} + \frac{\beta_3 \mu(x)}{\mu^{5/2}} + \frac{b}{\sigma}\left(\frac{\beta_3}{\mu}\right)^{1/2}\mu(x) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\beta_2(x)\mu^{1/2}}{\beta_2} + \frac{m(x)\mu^{1/2}}{\sigma\varphi(A_0)}\right)n^{-1/2} + \left(\frac{\beta_2}{\varphi(A_0)}\right)^2 (\mu n)^{-1} \ln n\right), \tag{1}$$

*где* $\Phi$ – *стандартный нормальный закон*, $c$ – *абсолютная постоянная*, $\sigma^2 = \alpha_2$, $\mu = \beta_1$, $\mu(x) = \beta_1(x)$.

Оценки вида $O(n^{-1/2})$ были получены в работах [2, 3], однако без явной зависимости от других параметров цепи (правда, в работе [3] говорится о возможности найти эту зависимость в рамках используемого в ней подхода). Авторы цитируемых работ использовали метод расщепления, предложенный в [4, 5].

В отличие от [2, 3] метод доказательства теоремы 1 является чисто аналитическим. В основе его лежит представление характеристической функции суммы $\sum_1^n g(X_k)$ как коэффициента Тейлора некоторой функции комплексного аргумента, аналитической в единичном круге.

Опишем подробнее это ключевое место доказательства. Рассмотрим ядра

$$p(t; x, B) = \int_B e^{itg(y)} p(x, dy),$$

$$\varphi(t; x, B) = \begin{cases} \int_{A_0 B} e^{itg(y)}\varphi(dy), & x \in A_0, \\ 0, \quad x \in X - A_0, \end{cases}$$

$$\omega(t; \cdot, \cdot) = p(t; \cdot, \cdot) - \varphi(t; \cdot, \cdot),$$

зависящие от параметра $t$. Пусть $p^{(n)}$, $\varphi^{(n)}$, $\omega^{(n)}$ – $n$-кратные композиции соответственно ядер $p$, $\varphi$ и $\omega$. Заметим, что

$$p^{(n)}(t; x, X) = E_x e^{itS_n},$$

где $S_n = \sum_1^n g(X_k)$.

Определим производящие функции

$$P(z, t; \cdot, \cdot) = \sum_0^\infty p^{(k)}(t; \cdot, \cdot)z^k, \quad p^{(0)}(t; \cdot, \cdot) = e(\cdot, \cdot),$$

$$\Omega(z, t; \cdot, \cdot) = \sum_0^\infty \omega^{(k)}(t; \cdot, \cdot)z^k, \quad \omega^{(0)}(t; \cdot, \cdot) = e(\cdot, \cdot),$$

$$\Omega(z, t; \cdot) = \int_{A_0} \varphi(dx)\Omega(z, t; x, \cdot)e^{itg(x)}.$$

Отправной точкой в доказательстве сформулированной выше оценки Берри–Эссеена для распределения суммы $S_n$ является следующая

Л е м м а. *Для любого* $|z| < 1$

$$P(z, t; \cdot, \cdot) =$$
$$= \Omega(z, t; \cdot, \cdot) + \frac{z\Omega(z, t; \cdot, A_0)\Omega(z, t; \cdot)}{1 - z\Omega(z, t; A_0)}. \tag{2}$$

В частном случае $t = 0$ формула (2) была выведена в [6].

Перейдем теперь к вопросу о связи нормирующей постоянной $\frac{\sigma}{\sqrt{\mu}}$ в теореме 1 с другими характеристиками, использованными для этой цели в предшествующих работах. Во многих работах центральная предельная теорема для цепей Маркова доказывается в следующей форме:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\sum_0^n \frac{g(X_k)}{\sigma_g \sqrt{n}} < r\right) = \Phi(r),$$

где

$$\sigma_g^2 = E_\pi g^2(X_0) + 2\sum_1^\infty E_\pi g(X_0) g(X_k). \qquad (3)$$

Здесь $E_\pi$ означает математическое ожидание относительно стационарного распределения $\pi$.

Разумеется, предполагается, что

$$E_\pi g(X_0) = 0. \qquad (4)$$

Теорема 2. *Пусть* $\beta_2 < \infty$, $b^2 < \infty$, *ряд* (3) *абсолютно сходится, а также выполнены условия* (4) *и*

$$\int_X |g(x)| q(dx) \int_X |g(y)| q(x, dy) < \infty. \qquad (5)$$

*Тогда*

$$\sigma^2/\mu = \sigma_g^2.$$

Положим $\tau_0 = \min\{k\colon k \geq 1, X_k \in A_0\}$, $q_0(x, B) = P_x\{X_{\tau_0} \in B\}$. Обозначим через $q_1(x, B)$ сужение $q_0(x, B)$ на $A_0$.

Пусть $\pi_0$ – стационарное распределение, соответствующее переходной функции $q_1(\cdot, \cdot)$.

В работах [7, 8] для нормирования используется величина

$$\sigma_0^2 = E_{\pi_0}\left|\sum_0^{\tau_0 - 1} g(X_k)\right|^2 +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^\infty E_{\pi_0} \int_{A_0} \Gamma(X_0, dx) \int_{A_0} q_1^{(k-1)}(x, dy) \Gamma(y, A_0),$$

где $q_1^{(k)}(\cdot, \cdot)$ – $k$-я композиция переходной функции $q_1(\cdot, \cdot)$, $q_1^{(0)}(x, \cdot) = e(x, \cdot)$,

$$\Gamma(x, B) = E_x\left\{\sum_0^{\tau_0 - 1} g(X_k);\ x_{\tau_0} \in B\right\},$$

$E_{\pi_0}$ – математическое ожидание относительно $\pi_0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (4), (5), $b^2 < \infty$, $E_{\pi_0}\tau_0^2 < \infty$ *и*

$$\sup_{x \in A_0} E_x \tau_0 < \infty.$$

*Тогда*

$$\sigma_0^2 = \sigma^2 \varphi(A_0).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 94–01–01766) и Международного научного фонда Дж. Сороса (грант NQA000).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нагаев С.В.* // ДАН. 1982. Т. 263. № 1. С. 27–30.
2. *Bolthausen E.* // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb. 1982. Bd. 60. H. 3. S. 284–289.
3. *Малиновский В.К.* // Теория вероятностей и ее применения. 1986. Т. 31. В. 2. С. 315–332.
4. *Athreya K.B., Ney P.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 245. P. 493–501.
5. *Nummelin E.* // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb. 1978. Bd. 43. H. 4. S. 309–318.
6. *Нагаев С.В.* В сб.: Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент: Фан, 1963. С. 69–74.
7. *Нагаев С.В.* // ДАН. 1961. Т. 130. № 1. С. 34–36.
8. *Нагаев С.В.* // Изв. АНУзССР. Сер. физ.-мат. 1962. № 1. С. 12–20.