93

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Том 46 · 2001 · Выпуск 1

НАГАЕВ С. В.*

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН[1)]

Выводятся нижние оценки вероятностей больших уклонений для суммы независимых случайных величин. Область, в которой действуют эти оценки, описывается в терминах ляпуновского отношения. Полученные оценки сравниваются с нижними оценками, принадлежащими Колмогорову, Феллеру, Ленарту и Архангельскому.

Ключевые слова и фразы: большие уклонения, метод сопряженных распределений, независимые случайные величины, неравенство Колмогорова, ляпуновское отношение, оценки Берри–Эссеена, свертка функций распределения, условие Бернштейна, характеристическая функция.

1. Введение. Формулировка и обсуждение результатов.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины с нулевыми средними и конечными третьими моментами, $S = \sum X_j$. Здесь и в дальнейшем $\sum$ означает $\sum_1^n$, случай $n = \infty$ не исключается.

Мы будем заниматься нижними оценками вероятности $\mathbf{P}\{S > x\}$. Обозначим $\sigma_j^2 = \mathbf{E}X_j^2$, $B^2 = \sum \sigma_j^2$, $\beta_j = \mathbf{E}|X_j|^3$, $C = \sum \beta_j$. Пусть $L = C/B^3$ — ляпуновское отношение.

Пусть $\Phi(x)$ — стандартный нормальный закон. Обозначим $\Phi_1(x)$ функцию Миллса $\sqrt{2\pi}(1-\Phi(x))\,e^{x^2/2}$ (по поводу функции Миллса см., например, [1, с. 204–205]). Положим $\Psi(x) = x\Phi_1(x)$.

Первая нижняя оценка вероятности $\mathbf{P}\{S > x\}$ была получена А. Н. Колмогоровым [2] для равномерно ограниченных случайных величин $|X_j| < M$ в связи с доказательством закона повторного логарифма. В наших обозначениях неравенство Колмогорова выглядит следующим образом: *если* $x^2 > 512$ *и* $a = xM/B \leqslant \frac{1}{256}$, *то*

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > \exp\biggl\{-\frac{x^2}{2}(1+\varepsilon)\biggr\},$$

*Институт математики им. С. Л. Соболева, Университетский пр., 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev-s@mail.ru

1) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01529).

где $\varepsilon = \max\{64\sqrt{a},\ 32\sqrt{\ln x^2}/x\}$. Сформулированный ниже результат принадлежит Ленарту [4].

Если $|X_k| < M$ *и* $0 < xM/B < \frac{1}{12}$, *то*

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} = \exp\biggl\{-\frac{x^2}{2}\,Q(x)\biggr\}\biggl(1 - \Phi(x) + \tau\,\frac{M}{B}\,e^{-x^2/2}\biggr), \tag{1}$$

где $Q(x) = \sum_1^\infty q_k x^k$, $q_1 < M/3B$, $q_k < 8^{-1}(12M/B)^k$, $k = 2, 3, \dots, \infty$, $|\tau| < 7{,}465$ (см. также по этому поводу [5, с. 308]). Этот результат по форме совпадает с результатом Феллера [3] и отличается от последнего несколько меньшими значениями постоянных.

Из (1) нетрудно извлечь неравенство

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} \geqslant (1-\Phi(x))\,\exp\biggl\{-c(\gamma)\,\frac{Mx^3}{B}\biggr\}\biggl(1 - 7{,}465\sqrt{2\pi}\,\frac{Mx}{B\Psi(x)}\biggr), \tag{2}$$

где $1 < x < \gamma B/M$, $c(\gamma) = \frac{1}{6} + 9\gamma/(1-12\gamma)$, $\gamma < \frac{1}{12}$.

Неравенство (2) действует в более широкой области, нежели неравенство Колмогорова, и, кроме того, оно значительно точнее. Чтобы показать последнее, нам понадобятся некоторые вычисления. Прежде всего, используя тождество (76) (см. п. 2), имеем при условии $x^2 > 512$

$$1 - \Phi(x) > \biggl(1 - \frac{1}{x^2}\biggr)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x} > \frac{e^{-x^2/2-\ln cx}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{3}$$

где $c = \frac{512}{511}$. Далее, при $x^2 > 512$ справедливо неравенство $\sqrt{\ln x} < 0{,}0781\,x$, т.е. $\sqrt{2}\ln x < 0{,}0781\,x\sqrt{\ln x^2}$. При $x^2 > 512$ и $c = \frac{512}{511}$

$$\ln cx = \biggl(1 + \frac{\ln c}{\ln x}\biggr)\ln x < 1{,}00063\,\ln x.$$

В результате мы приходим к оценке

$$\ln cx < 0{,}111\,\frac{x^2}{2}\,\frac{\sqrt{\ln x^2}}{x}. \tag{4}$$

С другой стороны,

$$0{,}111\,\frac{\sqrt{\ln x^2}}{x} < 0{,}00346\,\varepsilon, \tag{5}$$

где ε имеет тот же смысл, что и в неравенстве Колмогорова.

Комбинируя (3) и (5), мы заключаем, что

$$1 - \Phi(x) > \frac{\exp\{-(x^2/2)(1 + 0{,}00346\,\varepsilon)\}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{6}$$

если $x^2 > 512$. Оценим теперь $1 - 7{,}465\sqrt{2\pi}\,Mx/(B\Psi(1))$ в предположении, что $x^2 > 512$ и $a := xM/B \leqslant \frac{1}{256}$. Заметим, прежде всего, что

$$\frac{7{,}465}{\Psi(1)} < 11{,}397. \tag{7}$$

Следовательно,

$$z := 7{,}465\sqrt{2\pi}\,\frac{Mx}{B\Psi(1)} < 0{,}113.$$

Используя теперь неравенство (80) (см. ниже п. 2), имеем

$$1 - z > \exp\Big\{-z - \frac{z^2}{1-z}\Big\} > \exp\{-1{,}128z\} > \exp\Big\{-32{,}75\,\frac{Mx}{B}\Big\}.$$

Очевидно, $x < x^3/512$, если $x^2 > 512$. Следовательно,

$$1 - z > \exp\Big\{-0{,}024\,\frac{Mx^3}{B}\Big\}. \qquad (8)$$

Условие $a \leqslant \frac{1}{256}$ соответствует условию $\gamma = \frac{1}{256}$ в неравенстве (2). Несложные вычисления показывают, что

$$c\Big(\frac{1}{256}\Big) < 0{,}204. \qquad (9)$$

Комбинируя неравенства (8), (9) и $a \leqslant \sqrt{a}/16$, мы получаем

$$(1-z)\exp\Big\{-c\Big(\frac{1}{256}\Big)\frac{Mx^3}{B}\Big\} > \exp\Big\{-0{,}268\,\frac{Mx^3}{B}\Big\}$$
$$\geqslant \exp\Big\{-0{,}0335\Big(\frac{x^2\sqrt{a}}{2}\Big)\Big\}. \qquad (10)$$

Заметим, что

$$0{,}0335\sqrt{a} \leqslant 53\cdot 10^{-5}\varepsilon. \qquad (11)$$

Из (2), (6), (10), (11) следует оценка

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > \frac{\exp\{-(1 + 4\cdot 10^{-3}\varepsilon)\,x^2/2\}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Из приведенных выкладок видно, насколько трудоемким является сравнение уже имеющихся оценок, не говоря уже о выводе новых.

Сравним теперь оценку (2) с оценкой из недавней работы [6]:

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > \exp\Big\{-(1+50\alpha)\,\frac{x^2}{2}\Big\}, \qquad (12)$$

которая справедлива при условии

$$\frac{1}{\alpha} < x < \frac{\alpha M}{B}, \quad 0 < \alpha < 10^{-2}. \qquad (13)$$

Прежде всего, вследствие (76)

$$1 - \Phi(x) > \frac{\exp\{\ln(1 - 1/x^2) - \ln x - x^2/2\}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Далее, $1 - 1/x^2 > 0{,}9999$, $\ln x < 0{,}0461x < 0{,}0461\alpha x^2$. Следовательно,

$$1 - \Phi(x) > 0{,}9999\,\frac{\exp\{-(1+0{,}0922\alpha)\,x^2/2\}}{\sqrt{2\pi}}. \qquad (14)$$

Несложные вычисления с использованием (7), (80) и условия (13) приводят к оценке

$$1 - 7{,}465\sqrt{2\pi}\,\frac{Mx}{B\Psi(1)} > \exp\Big\{-28{,}89\,\frac{Mx}{B}\Big\} > \exp\Big\{-58\cdot 10^{-4}\alpha\,\frac{x^2}{2}\Big\}. \qquad (15)$$

Из (2), (14), (15) следует, что при условии (13)

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > \frac{\exp\{-(1+0{,}098\alpha)\,x^2/2\}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Таким образом, оценка (2) точнее, чем (12).

До сих пор речь шла о нижних оценках в случае, когда слагаемые равномерно ограничены. Перейдем к случаю, когда это условие не выполняется. При условии Бернштейна

$$\mathbf{E}\,|X_j|^k \leqslant \frac{k!}{2}\,\sigma_j^2 c^{k-2}, \quad j = 1,\dots,n, \ k = 3,4,\dots, \qquad (16)$$

нижнюю оценку можно извлечь из работы [7] (см. по этому поводу [8]). Существенное продвижение было сделано в работе А. Н. Архангельского [8], который заменил условие равномерной ограниченности слагаемых условием $\sup_j \mathbf{E}|X_j|^{2+\delta}/\sigma_j^2 < \infty$, $\delta > 0$.

Наша цель в настоящей работе заключается в том, чтобы заменить индивидуальные ляпуновские отношения на обычное ляпуновское отношение. Более точно, мы хотим получить аналог оценки (2) с заменой M/B на L.

Сформулируем наши результаты, полученные в этом направлении.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$0 < x < (1-4\gamma)\Big(\frac{\gamma}{L} \wedge \frac{\alpha B}{\max_j \sigma_j}\Big), \quad \gamma < \frac{1}{16}, \ e\alpha^2 < \gamma. \qquad (17)$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > (1-\Phi(x))\exp\Big\{-\Big(c_1(\gamma)\,L + c_2(\gamma,\alpha)\sum\frac{\sigma_j^3}{B^3}\Big)\,x^3\Big\}$$
$$\times\Big(1 - \frac{(c_3(\gamma)\,L + c_4(\alpha)\sum\sigma_j^3/B^3)\,x}{\Psi(x)}\Big), \qquad (18)$$

где $c_1(\gamma) \leqslant 1{,}5/(1-4\gamma)^3$, $c_2(\gamma,\alpha) \leqslant 2\alpha/(1-4\gamma)^3$, $c_3(\gamma) \leqslant 9{,}79 + 76{,}26\gamma$, $c_4(\alpha) \leqslant 106\alpha$.

Близкий результат сформулирован в [9], однако без указания значений постоянных.

Сравним оценку (18) с соответствующим результатом из [8]. Положим $c = \max_j \beta_j/\sigma_j^2$. Из теоремы 1 этой работы следует, что при $a := xc/B < \alpha$ и $x > x_0$

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > (1-\Phi(x))\,\exp\{-\rho a x^2\}\,(1 - Ka), \qquad (19)$$

где $K = K(\alpha, x_0)$, $\rho = \rho(\alpha)$, но явный вид зависимости от α и x_0 не приводится. Отмечается только, что при $\alpha = 0{,}031$, $K = 16{,}37$, $\rho = 3{,}06$. Заметим, что $c^{-1} < (B^2/C) \wedge (1/\max\sigma_j)$. Поэтому из условия $a < \alpha$ следует, что

$$x < \alpha\left(\frac{1}{L} \wedge \frac{B}{\max\sigma_j}\right). \tag{20}$$

Если $\alpha < \frac{3}{4}$, то условие (20) является частным случаем (17). Если $\alpha = 0{,}031$, то (20) переходит в условие (17) с $\gamma = \alpha = 0{,}032$. В этом случае оценка (18) принимает вид

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > (1 - \Phi(x))\, e^{-1{,}858Lx^3}(1 - 8{,}25\, Lx).$$

Учитывая, что $Lx \leqslant a$, мы видим, что в рассматриваемом случае неравенство (18) дает значительно более точный результат, нежели (19).

Следствие 1. *Если выполнены условия* (17), *то*

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > (1 - \Phi(x)) \exp\left\{-c_1(\alpha,\gamma)\, Lx^3\right\} \left(1 - \frac{c_2(\alpha,\gamma)\, Lx}{\Psi(x)}\right), \tag{21}$$

где

$$c_1(\alpha,\gamma) \leqslant \frac{1{,}5 + 2\alpha}{(1-4\gamma)^3}, \qquad c_2(\alpha,\gamma) \leqslant 9{,}79 + 76{,}26\,\gamma + 106\,\alpha. \tag{22}$$

Полагая в (17) $\gamma = \frac{1}{20}$, $\alpha = \frac{1}{20}$ и учитывая, что $\Psi(1{,}7) > 0{,}805$, мы получаем

Следствие 2. *Если* $1{,}7 < x < ((1/L) \wedge (B/\max_j \sigma_j))/25$, *то*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{S > Bx\} &> (1 - \Phi(x))\, e^{-3{,}13Lx^3}(1 - 23{,}4Lx)\\ &> 0{,}06\,(1 - \Phi(x))\, e^{-3{,}13Lx^3}.\end{aligned} \tag{23}$$

Если случайные величины X_i одинаково распределены, то

$$\max_j \frac{\sigma_j}{B} = \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{C}{B^3} = \frac{\beta}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

где σ^2 и β — соответственно второй и третий абсолютный моменты величин X_i.

Если $|X_i| < M$, $i = 1,\ldots,n$, то $C/B^3 < M/B$, $\max_j \sigma_j/B < M/B$. Таким образом, как в случае одинаково распределенных, так и в случае ограниченных слагаемых, можно исключить из условия (17) $B/\max_j \sigma_j$. Сформулируем теперь получающиеся в результате оценки.

Следствие 3. *Если X_i одинаково распределены и*

$$1{,}7 < x \leqslant \frac{1}{25}\sqrt{n}\,\frac{\sigma^3}{\beta}, \tag{24}$$

то

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{S > Bx\} > (1 - \Phi(x)) \exp&\left\{-\frac{(2{,}35\beta/\sigma^3 + 0{,}2)\, x^3}{\sqrt{n}}\right\}\\ &\times\left(1 - \frac{(16{,}88\beta/\sigma^3 + 6{,}58)\, x}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned} \tag{25}$$

Для стандартного нормального закона значения $x \geqslant 3$ следует рассматривать как большие. Заметим в этой связи, что значение $x = 3$ удовлетворяет условию (24) для $n \geqslant 64^2(\beta/\sigma^3)^2$. На статистическом языке это означает, что нам нужно произвести не менее $2^{12} = 4096$ наблюдений, чтобы иметь возможность воспользоваться неравенством (25) для $x \geqslant 3$.

Следствие 4. *Если $|X_j| < M$ и*

$$1{,}7 < x \leqslant \frac{1}{25}\,\frac{B}{M}, \tag{26}$$

то

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > (1 - \Phi(x)) \exp\left\{-2{,}13\,\frac{Mx^3}{B}\right\}\left(1 - 23{,}4\,\frac{Mx}{B}\right). \tag{27}$$

Несложные вычисления показывают, что при $1{,}7 < x < \frac{1}{25} M/B$ неравенство (2) дает более точную оценку, нежели следствие 4:

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > (1 - \Phi(x)) \exp\left\{-1{,}291\,\frac{Mx^3}{B}\right\}\left(1 - 23{,}2\,\frac{Mx}{B}\right).$$

Можно исключить $\max\sigma_j/B$ из условия (17) и в общем случае, однако ценой значительного увеличения постоянных, а именно, справедлива

Теорема 2. *Если* $\frac{3}{2} < x < \gamma/L$, $\gamma < \frac{1}{14^2}$, *то*

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > (1 - \Phi(x)) \exp\left\{-c_1(\gamma)\, Lx^3\right\} (1 - c_2(\gamma)\, Lx),$$

где

$$c_1(\gamma) \leqslant \frac{29 + 38\sqrt{\gamma}}{(1-28\gamma)^3} + \frac{41}{\sqrt{\gamma}}, \qquad c_2(\gamma) \leqslant 60 + 1630\,\gamma + 1212\sqrt{\gamma} + \frac{0{,}63}{\sqrt{\gamma}}. \tag{28}$$

Следствие 5. *Если* $\frac{3}{2} < x < \gamma/L$, $\gamma < \frac{1}{14^2}$, *то*

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > (1 - \Phi(x)) \exp\left\{-1419\, Lx^3\right\} (1 - 164\, Lx). \tag{29}$$

Сформулированные выше нижние оценки лучше использовать в комбинации с неравенством

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > \frac{1}{2}\sum_j \mathbf{P}\{X_j > 2Bx\}, \tag{30}$$

которое справедливо, по крайней мере, для $x > 2$ (см. [10, с. 759]). Если распределения случайных величин X_j имеют тяжелые хвосты, то предлагаемые нами оценки точнее, чем оценка (30), лишь для сравнительно небольших значений x.

Предположим для простоты, что X_j одинаково распределены $\mathbf{P}\{X > x\} > c/x^t$, $x > 1$, $t > 3$. Если $x > b\sqrt{\ln n}$, где $b > \sigma(t-2)^{1/2}$, то для достаточно больших n

$$n\mathbf{P}\{S > 2\sigma x\sqrt{n}\} > 2(1 - \Phi(x)).$$

Поэтому при $x > b\sqrt{\ln n}$ оценка (30) оказывается точнее оценки (25), если n достаточно велико.

Рассмотрим теперь совсем конкретный пример. Пусть плотность $p(x)$ определяется равенством

$$p(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ \dfrac{2}{|x|^5}, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Сравним оценки (25) и (30) в случае, когда X_j одинаково распределены с плотностью $p(x)$, в точке $x = 3$. В данном случае $\sigma^2 = 2$, $\beta = 4$.

При $\gamma = \frac{1}{16}$ оценка (25) применима при $n > 11\,250$. Неравенство (25) при $n > 11\,250$ принимает вид

$$\mathbf{P}\{S > 3\sqrt{2n}\} > 0{,}13\, e^{-1{,}12}(1 - \Phi(3)) > 0{,}042\,(1 - \Phi(3)) > 56 \cdot 10^{-6}.$$

С другой стороны, пользуясь неравенством (30), мы получаем для $n > 11\,250$ оценку

$$\mathbf{P}\{S > 3\sqrt{2n}\} > \frac{n}{2}\mathbf{P}\{X > 6\sqrt{2n}\} > \frac{1}{3^4 \cdot 2^{20}} \sim 11 \cdot 10^{-9}.$$

Мы видим, что при $x = 3$, $n = 11\,250$ оценка (25) на четыре порядка точнее, чем оценка (30). Обратим внимание читателя, что в рассматриваемом примере $x < \sigma((t-2)\ln n)^{1/2}$.

Посмотрим, что в данном случае дает оценка Берри–Эссеена

$$\left|\Phi(3) - \mathbf{P}\{S > 3\sqrt{2n}\}\right| < c_0\sqrt{\frac{2}{n}}$$

с постоянной $c_0 = 0{,}7655$ [11] (см. также [12, с. 229]).

При $n = 11\,250$ мы получаем тривиальную оценку

$$\mathbf{P}\{S > 3\sqrt{2n}\} > 1 - \Phi(3) - 0{,}0103 > -0{,}091.$$

Нетривиальная оценка получается для $n > 643 \cdot 10^3$.

Наши рассмотрения лишний раз показывают, какую большую роль играют постоянные, когда дело касается практических вычислений. На первый взгляд, постоянная $\frac{3}{64}$ в условии (24) не слишком мала, но тем не менее именно она является причиной того, что неравенство (25) справедливо только при больших n.

Доказательство теорем 1 и 2 технически сложно. В основе его лежит модификация метода, предложенного в [13]. Последний является комбинацией урезания с последующим применением метода сопряженных распределений (по поводу последнего см. [5], а также [14]).

В п. 2, в котором собрано 19 лемм, проводится подготовка к доказательству теорем 1 и 2. В п. 3 доказывается теорема 1, а в п. 4 — теорема 2.

В дальнейшем нам понадобятся следующие определения и обозначения.

Определим срезку $X(y)$ случайной величины X равенством

$$X(y) = \begin{cases} X, & X \leqslant y, \\ 0, & X > y. \end{cases}$$

Положим $r(h,y) = \mathbf{E}e^{hX(y)}$, $a(h,y) = \mathbf{E}X(y)\,e^{hX(y)}$, $\sigma^2(h,y) = \mathbf{E}X^2(y)\,e^{hX(y)}$, $\beta(h,y) = \mathbf{E}|X(y)|^3 e^{hX(y)}/r(h,y)$.

Обозначим

$$a(y) = a(0,y), \quad \sigma^2(y) = \sigma^2(0,y), \quad \beta(y) = \beta(0,y).$$

Пусть

$$A(y) = \sum a_j(y), \qquad B^2(y) = \sum \sigma^2(y).$$

Положим

$$m(h,y) = \frac{a(h,y)}{r(h,y)} \equiv \frac{\partial}{\partial h} r(h,y), \qquad M(h,y) = \sum m_j(h,y),$$

$$b^2(h,y) = \frac{\sigma^2(h,y)}{r(h,y)} - m^2(h,y) \equiv \frac{\partial^2}{\partial h^2}\ln r(h,y).$$

Индекс j здесь и ниже означает, что соответствующая характеристика относится к случайной величине X_j. Заметим, что $M(h,y)$ как функция h возрастает при $y > 0$, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial h} M(h,y) = \sum b_j^2(h,y) > 0.$$

С другой стороны, $M(0,y) = A(y) \leqslant 0$. Поэтому уравнение относительно h $M(h,y) = x$ при $x \geqslant 0$ имеет единственное решение, которое мы обозначим через $h(x,y)$.

Положим $F(x) = \mathbf{P}\{X < x\}$, $B^2(h,y) = \sum_j b_j^2(h,y)$. Пусть

$$C(h,y) = \sum \mathbf{E}\,\frac{e^{hX_j(y)}}{r_j(h,y)}\,|X_j(y) - m_j(h,y)|^3.$$

2. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Если* $0 < h \leqslant 1/y$, *то*

$$0 < r(h,y) - 1 - a(y)\,h < \frac{eh^2\sigma^2(y)}{2}. \tag{31}$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из тождества

$$r(h,y) = 1 + a(y)\,h + \int_{-\infty}^{y} (e^{hu} - 1 - hu)\,dF(u)$$

и неравенства $0 < e^u - 1 - u < eu^2/2$, $u < 1$.

Положим $\beta_+ = \mathbf{E}\{X^3; X > 0\}$, $\beta_- = \mathbf{E}\{|X|^3; X < 0\}$.

Лемма 2. *Если* $0 < h \leqslant 1/y$, *то*

$$a(h,y) \geqslant a(y), \tag{32}$$

$$-\frac{\beta_- h^2}{2} < a(h,y) - a(y) - \sigma^2(y)\,h < \beta_+\left(\frac{(e-2)}{y^2} \wedge \frac{eh^2}{2}\right). \tag{33}$$

Доказательство. Неравенство (32) следует из тождества

$$a(h,y)-a(y)=\int_{-\infty}^{y}(e^{hu}-1)\,u\,dF(u) \tag{34}$$

и неравенства $(e^{hu}-1)\,u\geqslant 0$. Выведем теперь неравенство (33). Очевидно, $a(h,y)-a(y)-\sigma^2(y)\,h=\int_{-\infty}^{y}(e^{hu}-1-hu)\,u\,dF(u)$. Остается воспользоваться неравенствами

$$0<e^{hu}-1-hu<\left(\frac{eh^2}{2}\wedge\frac{e-2}{y^2}\right)u^2,\quad u>0,$$

$$e^{hu}-1-hu<\frac{h^2u^2}{2},\quad u<0.$$

Лемма 3. *Пусть* $0<h<1/y$,

$$y>\left(\alpha^{-1}\max_j\sigma_j\right)\vee\frac{C}{\gamma B^2},\quad e\alpha^2<\gamma. \tag{35}$$

Тогда при $\gamma<1$

$$M(h,y)>\left((1-2\gamma)\,h-\frac{2\gamma}{y}\right)B^2. \tag{36}$$

Доказательство. Учитывая, что $a(y)\leqslant 0$, $a(h,y)-a(y)\geqslant 0$ (см. лемму 2), имеем

$$M(h,y)>\frac{A(y)}{\min_j r_j(h,y)}+\frac{\sum_j(a_j(h,y)-a_j(y))}{\max_j r_j(h,y)}. \tag{37}$$

В силу леммы 1 при условии (35)

$$1-e^{-1}\gamma<1-\frac{\sigma^2}{y^2}<r(h,y)<1+\frac{e\sigma^2}{2y^2}<1+\frac{e\alpha^2}{2}. \tag{38}$$

Далее,

$$B^2(y)>B^2-\frac{C}{y}>(1-\gamma)\,B^2. \tag{39}$$

Используя (39) и левое неравенство в (33), мы получаем

$$\sum_j(a_j(h,y)-a_j(y))>B^2(y)\,h-\frac{Ch^2}{2}>\left(1-\frac{3\gamma}{2}\right)B^2h. \tag{40}$$

Наконец,

$$|A(y)|<\frac{C}{y^2}<\frac{\gamma B^2}{y}. \tag{41}$$

Комбинируя (37)–(41), мы заключаем, что

$$M(h,y)>\frac{(1-3\gamma/2)\,B^2h}{1+e\alpha^2/2}-\frac{\gamma B^2}{(1-e^{-1}\gamma)y}.$$

Заметим, что при $e\alpha^2<\gamma$

$$\frac{1}{1+e\alpha^2/2}>1-\frac{e\alpha^2}{2}>1-\frac{\gamma}{2}>\frac{1}{2}. \tag{42}$$

Из двух последних оценок следует утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (35). *Тогда при* $\gamma\leqslant\frac14$

$$h(x,y)<\frac{x+2\gamma B^2/y}{(1-2\gamma)\,B^2}\leqslant\frac{1}{y}, \tag{43}$$

если

$$x\leqslant\frac{(1-4\gamma)\,B^2}{y}. \tag{44}$$

Доказательство. Обозначим $M_1(h,y)=((1-2\gamma)\,h-2\gamma/y)\,B^2$. Согласно (36), при $0<h<1/y$

$$M(h,y)>M_1(h,y). \tag{45}$$

Пусть $h_1(x,y)$ — корень уравнения $M_1(h,y)=x$. Очевидно,

$$M_1\left(\frac{1}{y},y\right)=\frac{(1-4\gamma)\,B^2}{y}. \tag{46}$$

Вследствие (45) и (46) при $x<(1-4\gamma)\,B^2/y$

$$h(x,y)<h_1(x,y)=\frac{x+2\gamma^2B^2/y}{(1-2\gamma)\,B^2}\leqslant\frac{1}{y},$$

что и требовалось доказать.

Положим

$$Q(h,y)=\sum(r_j(h,y)-1),$$

$$C^+=\sum\mathbf{E}\{X_j^3;\ X_j>0\},\quad C^-=\sum\mathbf{E}\{|X_j|^3;\ X_j<0\}.$$

Лемма 5. *Если* $h<1/y$, *то*

$$A(y)\,h+\frac{B^2(y)\,h^2}{2}-\frac{C^-h^3}{6}<Q(h,y)<\frac{eB^2h^2}{2}. \tag{47}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$r(h,y)=1+a(y)\,h+\frac{\sigma^2(y)\,h^2}{2}+\int_{-\infty}^{y}\left(e^{hu}-1-hu-\frac{h^2u^2}{2}\right)dF(u)$$

$$>1+a(y)\,h+\frac{\sigma^2(y)\,h^2}{2}-\frac{h^3\beta_-}{6}.$$

Отсюда вытекает левое неравенство в (47). Правое неравенство следует из оценки $r(h,y)-1<eh^2\sigma^2/2$.

Лемма 6. *Пусть* $0<\gamma<\frac{1}{16}$,

$$y=\frac{(1-4\gamma)\,B^2}{x}, \tag{48}$$

$$x<(1-4\gamma)\,B^2\left(\frac{\gamma B^2}{C}\wedge\frac{\alpha}{\max_j\sigma_j}\right), \tag{49}$$

$$e\alpha^2<\gamma. \tag{50}$$

Тогда при $h = h(x,y)$

$$Q(h,y) - hx > -\frac{x^2}{2B^2} - 1{,}5C\left(\frac{x}{(1-4\gamma)\,B^2}\right)^3. \qquad (51)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, прежде всего, что в силу (48)–(50) y удовлетворяет условию (35). Таким образом, выполняются условия леммы 4, т.е. имеет место неравенство (43). Из (43) и (48) следует

$$h(x,y) < \frac{x}{(1-4\gamma)\,B^2} = \frac{1}{y}. \qquad (52)$$

Комбинируя (47), (52), мы заключаем, что

$$Q(h,y) > \frac{B^2h^2}{2} - C^+\left(\frac{h}{y^2} + \frac{h^2}{2y}\right) - C^-\frac{h^3}{6} > \frac{B^2h^2}{2} - 1{,}5\,\frac{C}{y^3}.$$

Заметим, что $B^2h^2/2 - hx > -x^2/(2B^2)$ при любом $h > 0$. Из двух последних неравенств вытекает утверждение леммы.

Лемма 7. *Пусть* $0 < h < 1/y$ *и выполнено условие* (35). *Тогда при* $\alpha^2 < 1$

$$h(x,y) > \frac{(1-\alpha^2)\,x}{(1+e\gamma/2)\,B^2}. \qquad (53)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя правое неравенство (33), имеем $M(h,y) \leqslant (B^2h + Ceh^2/2)/\min_j r_j(h,y)$. Заметим, что в силу (35) $Ch^2 < \gamma B^2 h$. Согласно левому неравенству (38), при условии (35)

$$r(h,y) > 1 - \frac{\sigma^2}{y^2} > 1 - \alpha^2. \qquad (54)$$

Таким образом,

$$M(h,y) \leqslant \frac{h(1+e\gamma/2)\,B^2}{1-\alpha^2}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 8. *Если выполнены условия* (35) *и* (48), *то при* $h < 1/y$

$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{1+e\gamma/2}{(1-4\gamma)(1-\alpha^2)}\,h(x,y). \qquad (55)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы следует из (48) и (53).

Лемма 9. *Если* $0 < h \leqslant 1/y$, *то*

$$-\frac{\sigma^2}{y} < a(h,y) < \sigma^2\left(eh \wedge \frac{(e-1)}{y}\right). \qquad (56)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (34), нетрудно показать, что

$$a(h,y) - a(y) < \sigma^2\left(eh \wedge \frac{e-1}{y}\right).$$

Остается заметить, что $-\sigma^2/y \leqslant a(y) \leqslant 0$, и воспользоваться оценкой (32).

Лемма 10. *Пусть* $0 < h \leqslant 1/y$ *и выполнены условия*

$$y > \frac{\max_j \sigma_j}{\alpha}, \quad \alpha^2 < \frac{1}{16e}. \qquad (57)$$

Тогда

$$\max_j \frac{|m_j(h,y)|}{\sigma_j} < 1{,}76\alpha. \qquad (58)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (54), (56), (57) $|m(h,y)| < (e-1)\alpha\sigma/(1-\alpha^2)$. Остается воспользоваться условием $\alpha^2 < 1/16e$.

Лемма 11. *В условиях леммы* 10

$$C(h,y) < 2{,}782\,C + 19\alpha\sum\sigma_j^3, \qquad (59)$$

если $\gamma < \frac{1}{16}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве отправной точки мы используем неравенство

$$(1-\alpha^2)\,C(h,y) < \sum\beta_j(h,y) + 3\sum\sigma_j^2(h,y)\,|m_j(h,y)|$$
$$+ 3\sum\alpha_j(h,y)\,m_j^2(h,y) + \sum|m_j(h,y)|^3, \qquad (60)$$

которое нетрудно получить с помощью (54). Здесь $\alpha(h,y) = \int_{-\infty}^{y}|u|e^{hu}\,dF(u)$.

Вследствие оценок (58) и

$$\sigma^2(h,y) < e\sigma^2 \qquad (61)$$

имеем

$$\sum\sigma_j^2(h,y)|m_j(h,y)| < 4{,}79\alpha\sum\sigma_j^3. \qquad (62)$$

Аналогично,

$$\sum\beta_j(h,y) < eC, \quad \sum\alpha_j(h,y)\,m_j^2(h,y) < 8{,}42\alpha^2\sum\sigma_j^3,$$
$$\sum|m_j(h,y)|^3 < 5{,}46\alpha^3\sum\sigma_j^3. \qquad (63)$$

Из (60), (62), (63) следует желаемый результат.

Лемма 12. *Если* $h \leqslant 1/y$, *то*

$$(e-1)\,\frac{\beta}{y} > \sigma^2(h,y) - \sigma^2(y) > -\beta h. \qquad (64)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, $\sigma^2(h,y) = \sigma^2(y) + \int_{-\infty}^{y} u^2(e^{hu} - 1)\,dF(u)$. Далее,

$$\frac{e-1}{y}\,\beta_+ > \int_0^y u^2(e^{hu}-1)\,dF(u) > 0, \qquad \int_{u<0} u^2(1-e^{hu})\,dF(u) < h\beta_-,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 13. *Пусть* $0 < h \leqslant 1/y$ *и выполнены условия* (35) *с* $\gamma < \frac{1}{16}$. *Тогда*

$$B^2(h,y) > \frac{32}{33}\,(1 - 2\gamma - 3{,}2\alpha^2)\,B^2. \qquad (65)$$

Доказательство. Мы начнем с оценки $\sum \sigma_j^2(h,y) > B^2(y) - \sum \beta_j/y > B^2 - 2C/y > (1-2\gamma)\,B^2$, которая следует из (35) и (64).

Принимая теперь во внимание (38), мы находим, что

$$\frac{\sum \sigma_j^2(h,y)}{r_j(h,y)} > \frac{32}{33}\,(1-2\gamma)\,B^2.$$

Согласно (58), $\sum m_j^2(h,y) < 3{,}1\alpha^2 B^2$. Комбинируя приведенные выше неравенства, мы получаем желаемый результат.

Лемма 14. *Пусть $0 < h < 1/y$ и выполнены условия (35) с $\gamma < \frac{1}{16}$. Тогда*

$$\left| hB(h,y) - \frac{M(h,y)}{B(y)} \right| < \frac{2{,}78\alpha \sum \sigma_j^3 h}{By} + 1{,}686\,\frac{C}{By^2}. \tag{66}$$

Доказательство. Прежде всего, согласно (33), (35) и (54),

$$m(h,y) = \sigma^2(y)\,h + \frac{\theta}{1-\alpha^2}\left(\beta_+(e-2)y^{-2} + \alpha h y^{-1}\sigma^2(y)\sigma\right).$$

Здесь и ниже θ означает величину, по модулю не превосходящую 1. Отсюда

$$\frac{M(h,y)}{B(y)} = hB(y) + 1{,}023\,\theta\left(\frac{(e-2)\,C}{y^2 B(y)} + \frac{\alpha h \sum \sigma_j^3}{yB(y)}\right). \tag{67}$$

Аналогично в силу (64) и (54)

$$\frac{\sum \sigma_j^2(h,y)}{r_j(h,y)} = \sum \sigma_j^2(y) + 1{,}023\,\theta\left(\frac{(e-1)\,C}{y} + \frac{\alpha \sum \sigma_j^3}{y}\right).$$

Далее, согласно (57) и (56),

$$\sum m_j^2(h,y) = \theta\Big(\frac{e-1}{1-\alpha^2}\Big)^2 \alpha \sum \frac{\sigma_j^3}{y}. \tag{68}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} B^2(h,y) &:= \frac{\sum \sigma_j^2(h,y)}{r_j(h,y)} - m_j^2(h,y) \\ &= B^2(y) + \theta\left(1{,}023\frac{(e-1)\,C}{y} + 3{,}1\,\alpha \sum \frac{\sigma_j^3}{y}\right). \end{aligned} \tag{69}$$

Очевидно,

$$hB(h,y) = hB(y) + h(B(h,y) - B(y)). \tag{70}$$

Далее,

$$B(h,y) - B(y) = \frac{B^2(h,y) - B^2(y)}{B(h,y) + B(y)}. \tag{71}$$

Заметим, что $B(h,y) + B(y) > 2\sqrt{B(y)\,B(h,y)}$. Используя лемму 13, имеем при $\gamma \leqslant \frac{1}{16}$: $1/\sqrt{B(h,y)} < 1{,}065/\sqrt{B}$. Аналогично, учитывая (39),

получаем $1/\sqrt{B(y)} < 1{,}017/\sqrt{B}$. Из трех последних оценок следует

$$\frac{1}{B(h,y) + B(y)} < \frac{0{,}541}{B}. \tag{72}$$

Комбинируя (69), (71), (72), имеем

$$B(h,y) - B(y) = \frac{\theta(0{,}951C + 1{,}68\alpha \sum \sigma_j^3)}{By}. \tag{73}$$

Из (67), (70), (73) получаем, учитывая (39), оценку (66).

Лемма 15. *Для любых $0 < u_1 \leqslant u_2$*

$$1 < \frac{\Phi_1(u_1)}{\Phi_1(u_2)} < \exp\Big\{\frac{u_2 - u_1}{u_1^2 \Phi_1(u_1)}\Big\}. \tag{74}$$

Доказательство. Исследуем функцию $\ln \Phi_1(u)$. Очевидно,

$$\frac{d}{du}\ln \Phi_1(u) = u - \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}(1-\Phi(u))} = u\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}ue^{u^2/2}(1-\Phi(u))}\right). \tag{75}$$

Нетрудно видеть, что

$$\sqrt{2\pi}ue^{u^2/2}(1-\Phi(u)) = 1 - ue^{u^2/2}\int_u^\infty e^{-v^2/2}v^{-2}\,dv. \tag{76}$$

Функция $g(u) = ue^{u^2/2}(1-\Phi(u))$ возрастает. Действительно,

$$\frac{d}{du}\ln g(u) = u + \frac{1}{u} - \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}(1-\Phi(u))}.$$

Далее, в силу (76)

$$1 - \Phi(u) = \frac{e^{-u^2/2}}{u\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^\infty e^{-v^2/2}v^{-2}\,dv.$$

Отсюда

$$\frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} - u(1-\Phi(u)) = \frac{u}{\sqrt{2\pi}}\int_u^\infty e^{-v^2/2}v^{-2}\,dv < u^{-1}(1-\Phi(u)).$$

Таким образом,

$$\left(u + \frac{1}{u}\right)(1-\Phi(u)) > \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}},$$

т.е. $\frac{d}{du}\ln g(u) \geqslant 0$. Следовательно, $g(u)$ возрастает при $u > 0$. Это в силу (76) означает, что функция $\Phi_2(\mu) = ue^{u^2/2}\int_u^\infty v^{-2}e^{-v^2/2}\,dv$ убывает. Согласно (76),

$$\Phi_2(u) = 1 - \sqrt{2\pi}ue^{u^2/2}(1-\Phi(u)) = 1 - \Psi(u). \tag{77}$$

Используя равенство $1/(1-x) = 1 + x/(1-x)$, мы заключаем, что при $u \geqslant u_1$

$$1 < \frac{1}{1-\Phi_2(u)} < 1 + \frac{\Phi_2(u)}{1-\Phi_2(u_1)}. \tag{78}$$

Из (75)–(78) следует

$$0 < -\frac{d}{du}\ln\Phi_1(u) < \frac{u\Phi_2(u)}{1-\Phi_2(u_1)}, \quad u > u_1.$$

Нетрудно видеть, что $\Phi_2(u) < 1/u^2$. Таким образом,

$$0 < -\frac{d}{du}\ln\Phi_1(u) < \frac{1}{(1-\Phi_2(u_1))\,u},$$

а это равносильно утверждению леммы.

Лемма 16. *Для любых* $0 < u_1 < u_2$

$$\frac{1-\Phi(u_2)}{1-\Phi(u_1)} > \exp\left\{\frac{(u_1-u_2)\,u_2}{\Psi(u_1)}\right\}. \tag{79}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $g(x) = \ln(1-\Phi(x))$. Очевидно, $g'(x) = -\Phi'(x)/(1-\Phi(x)) = -x/\Psi(x)$. Функция $\Psi(x)$ возрастает (см. доказательство леммы 15). Поэтому для $u_2 > x > u_1$

$$-g'(x) < \frac{u_2}{\Psi_1(u_1)}.$$

Из этой оценки легко следует утверждение леммы.

Положим $\lambda(x) = (1-ax)\,e^{-cx^3}(1-\Phi(x))$, где a и c — некоторые постоянные.

Лемма 17. *Если* $a > 0$, *то функция* $\lambda(x)$ *выпукла при* $0 < x \leqslant 1/a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, $\lambda(x) = e^{g(x)}$, где $g(x) = \ln(1-ax) + \ln(1-\Phi(x)) - cx^3$. Нетрудно видеть, что

$$g'(x) = -3cx^2 - \frac{a}{1-ax} - \frac{1}{\Phi_1(x)},$$

$$g''(x) = -6cx - \frac{a^2}{(1-ax)^2} - \frac{1}{\Phi_1^2(x)} + \frac{x}{\Phi_1(x)}.$$

Если $0 < x \leqslant 1/a$, то $g'^2(x) > 6cx + a^2(1-ax)^{-2} + 1/\Phi_1^2(x)$. Таким образом, при $0 \leqslant x \leqslant 1/a$ имеем $g'^2(x) + g''(x) > 0$ и, следовательно, $\lambda''(x) = (g'^2(x) + g''(x))\,e^{g(x)} \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 18. *Для любого* $0 < x < 1$

$$e^{-x-x^2/(1-x)} < 1 - x. \tag{80}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что $1/(1+y) > e^{-y}$, т.е.

$$e^{-y} < 1 - \frac{y}{1+y}. \tag{81}$$

Полагая $x = y/(1+y)$, имеем $y = x/(1-x) = x + x^2/(1-x)$. Подставляя это выражение в (81), мы получаем нужный результат.

Лемма 19. *Если выполнено условие* $\max_j \sigma_j < B\varepsilon$, *то для любого* $h > 0$

$$\left|h\int_0^\infty e^{-hx}\left(\mathbf{P}\{S<x\} - \Phi\left(\frac{x}{B}\right)\right)dx\right| < \frac{L(\varepsilon)}{6\sqrt{2\pi}(1-0{,}61L^{2/3}(\varepsilon))^{3/2}}$$
$$+ \frac{2{,}473\,C^2h}{\pi B^5} + \frac{L^{2/3}}{\pi}\left(0{,}607e^{-0{,}82L^{-2/3}} + 0{,}304e^{-1{,}64L^{-2/3}}\right)$$
$$+ L^2e^{-0{,}225L^{-2}}, \tag{82}$$

где $L(\varepsilon) = C/B_\varepsilon^3$, $B_\varepsilon^2 = (1-\varepsilon^2)\,B^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего,

$$\int_0^\infty e^{-hx}\left(\Phi\left(\frac{x}{B}\right) - \mathbf{P}\{S<x\}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{g(t)-e^{-B^2t^2/2}}{it(h+it)}\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{|t|<\tau_1}\frac{g(t)-e^{-B^2t^2/2}}{it(h+it)}\,dt + \int_{\tau_1<|t|\leqslant\tau_2}\frac{g(t)\,dt}{it(h+it)}\right.$$
$$+ \int_{\tau_2<|t|<\tau_3}\frac{g(t)\,dt}{it(h+it)} + \int_{|t|>\tau_3}\frac{g(t)\,dt}{it(h+it)}$$
$$\left. - \int_{|t|>\tau_1}\frac{e^{-B^2t^2/2}}{it(h+it)}\,dt\right) = \sum_1^5 I_j. \tag{83}$$

Здесь $g(t) = \mathbf{E}e^{itS}$, $\tau_1 = (6/C)^{1/3}$, $\tau_2 = 1{,}5\,B^2/C$, $\tau_3 = 2{,}4\,B^2/C$. Для любой характеристической функции $f(t)$

$$|f(t)| < \exp\left\{\frac{1}{2}\left(|f(t)|^2 - 1\right)\right\}.$$

Отсюда

$$|\mathbf{E}e^{itX}| < \exp\left\{-\frac{\sigma^2t^2}{2} + \frac{\beta|t|^3}{6}\right\}, \tag{84}$$

поскольку $|f(t)|^2 < 1 - \sigma^2t^2 + \beta|t|^3/3$. Используя теперь неравенство $|\prod_1^n a_j - \prod_1^n b_j| < \sum_{j=1}^n |a_j - b_j|\prod_{k=1}^{j-1}|a_k|\prod_{l=j+1}^n|b_l|$, имеем

$$\left|g(t) - e^{-B^2t^2/2}\right| < \frac{C|t|^3}{6}\exp\left\{-\frac{B_\varepsilon^2t^2}{2} + \frac{C|t|^3}{6}\right\}. \tag{85}$$

Несложные вычисления показывают, что при $|t| < \tau_1$

$$\frac{B_\varepsilon^2t^2}{2} - \frac{C|t|^3}{6} > \frac{B_\varepsilon^2}{2}(1-0{,}61L^{2/3}(\varepsilon)). \tag{86}$$

Из (85) и (86) следует оценка

$$|I_1| < \frac{\bar{L}(\varepsilon)}{6\sqrt{2\pi}(1-0{,}61L^{2/3}(\varepsilon))^{3/2}h}. \tag{87}$$

В силу (84)

$$\pi h|I_2| < \int_{\tau_1<t<\tau_2}\exp\left\{-\frac{B^2t^2}{2} + \frac{Ct^3}{6}\right\}\frac{dt}{t} < \int_{t>\tau_1} e^{-B^2t^2/4}\,\frac{dt}{t} < \frac{2e^{-B^2\tau_1^2/4}}{B^2\tau_1^2}.$$

Отсюда

$$|I_2| < \frac{2}{6^{2/3}\pi h} L^{2/3} e^{-6^{2/3}/4L^{-2/3}} < \frac{0{,}607}{\pi h} L^{2/3} e^{-0{,}82L^{-2/3}}. \tag{88}$$

Аналогично,

$$|I_3| < \frac{L^2}{\pi h} e^{-0{,}225L^{-2}}, \qquad |I_4| < \frac{0{,}304}{\pi h} L^{2/3} e^{-1{,}64L^{-2/3}}. \tag{89}$$

Используя (84), получаем оценку

$$\int_{t>\tau_2} \frac{|g(t)|\,dt}{t^2} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s_k^2} \int_{\Delta_k} |g(t)|\,dt, \tag{90}$$

где $s_k = \tau_2 + 1{,}3kB^2/C$, $\Delta_k = [s_k, s_{k+1})$. В силу леммы 3 из работы [15]

$$\int_{\Delta_k} |g(t)|\,dt < \frac{5{,}86}{B}. \tag{91}$$

С другой стороны,

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{s_k^2} < 0{,}422 \frac{C^2}{B^4}. \tag{92}$$

Из (90)–(92) следует

$$|I_5| < 2{,}473 \frac{C^2}{\pi B^5}. \tag{93}$$

Комбинируя тождество (83) и оценки (87)–(89), (93), мы получаем желаемый результат.

3. Доказательство теоремы 1. Поскольку $X_j(y) \leqslant X_j$, то

$$\mathbf{P}\{S > x\} \geqslant \mathbf{P}\{S(y) > x\}, \tag{94}$$

где $S(y) = \sum X_j(y)$. Пусть $G(x;y) = \mathbf{P}\{S(y) < x\}$. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\{S(y) > x\} = R(h,y) \int_x^{\infty} e^{-hu}\, G_h(du),$$

где $R(h,y) = \mathbf{E}e^{hS(y)} = \prod r_j(h,y)$, $G_h(du) = e^{hu}G(du;y)/R(h,y)$. Полагая $\overline{G}_h(u) = G_h(u+x)$, имеем

$$\mathbf{P}\{S(y) > x\} = R(h,y)\, e^{-hx} \int_0^{\infty} e^{-hu}\, d\overline{G}_h(u). \tag{95}$$

Функция распределения G_h является сверткой функций распределения $F_j(u;h,y)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где $F(du;h,y) = e^{hu}F(du;y)/r(h,y)$. Нетрудно видеть, что $\int_{-\infty}^{y} u\,F(du;y) = m(h,y)$, $\int_{-\infty}^{y}(u - m(h,y))^2 F(du;y) = \sigma^2(h,y)$. Следовательно, функции распределения G_h соответствуют математическое ожидание $M(h,y) = \sum m_j(h,y)$ и дисперсия $B^2(h,y) = \sum b_j^2(h,y)$.

В дальнейшем будем считать, что y удовлетворяет условию (48). Положим теперь $h = h(x,y)$. Тогда, согласно определению, $x = M(h,y)$ (см. п. 1).

Не нарушая общности, можно считать, что

$$x \geqslant 1{,}7. \tag{96}$$

Действительно, согласно оценке Берри–Эссеена,

$$\mathbf{P}\{S > x\} > (1 - \Phi(x))\left(1 - \frac{c_0 L}{1 - \Phi(x)}\right), \tag{97}$$

где $c_0 < 0{,}7915$ (см. [11], а также [12, с. 229]). С другой стороны, $c_3(\gamma)$ в (18) не может быть меньше 9,79. Поэтому оценка (97) заведомо точнее (18), если $(1/\sqrt{2\pi})\, e^{-x^2/2} > c_0/9{,}79$, т.е. $x < 1{,}7$.

Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-hu}\, d\overline{G}_h(u) &= \int_0^{\infty} e^{-hu}\, d\Phi\left(\frac{u}{B(h,y)}\right) + h\int_0^{\infty} e^{-hu} r_h(u)\,du - r_h(0)\\ &= I_1 + hI_2 - r_h(0),\end{aligned} \tag{98}$$

где $r_h(u) = \overline{G}_h(u) - \Phi(u/B(h,y))$. Нетрудно показать, что

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{h^2B^2(h,y)/2} \int_{hB(h,y)}^{\infty} e^{-u^2/2}\,du = \frac{\Phi_1(hB(h,y))}{\sqrt{2\pi}}. \tag{99}$$

Пусть $\Delta(h,y) = hB(h,y) - M(h,y)/B(y)$. Предположим, что $\Delta(h,y) > 0$. В силу леммы 14, а также равенства (48)

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(h,y)\,B(y)}{x} &< \frac{x(1{,}686C + 2{,}78\alpha\sum\sigma_j^3)}{(1-4\gamma)^2B^4}\\ &< \frac{x((1{,}686 + 20\gamma)\,C + 6{,}26\alpha\sum\sigma_j^3)}{B^4}.\end{aligned}$$

Полагая в лемме 15 $u_1 = x/B(y)$, $u_2 = hB(h,y)$ и используя предыдущую оценку, имеем

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi} I_1 &= \Phi_1(hB(h,y)) > \Phi_1\left(\frac{x}{B(y)}\right)\\ &\times \exp\left\{-\frac{((1{,}686 + 20\gamma)\,C + 6{,}26\alpha\sum\sigma_j^3)\,x}{B^4\Psi(x/B)}\right\}.\end{aligned} \tag{100}$$

Мы учитывали здесь, что $\Psi(x/B) < \Psi(x/B(y))$. Пусть теперь $u_1 = x/B$, $u_2 = x/B(y)$. Подставляя эти значения в неравенство (74), находим, что

$$\Phi_1\left(\frac{x}{B(y)}\right) > \Phi_1\left(\frac{x}{B}\right) \exp\left\{-\frac{1 - B/B(y)}{\Psi(x/B)}\right\}.$$

Используя (39) и (48), имеем

$$\frac{B}{B(y)} - 1 = \frac{B^2 - B^2(y)}{B(y)(B + B(y))} < \frac{C}{2yB^2(y)} < \frac{Cx}{2(1-\gamma)(1-4\gamma)\,B^4}.$$

Таким образом,

$$\Phi_1\left(\frac{x}{B(y)}\right) > \Phi_1\left(\frac{x}{B}\right)\left(1 - \frac{(1 + 6{,}76\gamma)\,Cx}{2\Psi(x/B)\,B^4}\right). \tag{101}$$

Из (100) и (101) следует

$$\sqrt{2\pi} I_1 > \Phi_1\Big(\frac{x}{B}\Big) \exp\Big\{-\frac{((2{,}186 + 23{,}38\gamma)\, C + 6{,}26\alpha \sum \sigma_j^3)\, x}{B^4 \Psi(x/B)}\Big\}. \tag{102}$$

Если $\Delta(h,y) < 0$, то $\Phi_1(hB(h,y)) > \Phi_1(x/B(y))$. Отсюда, используя (101), мы получаем, что при $\Delta(h,y) < 0$

$$\sqrt{2\pi} I_1 > \Phi_1\Big(\frac{x}{B}\Big)\Big(1 - \frac{(1 + 6{,}76\gamma)\, Cx}{2\Psi(x/B)\, B^4}\Big). \tag{103}$$

Перейдем теперь к оценке I_2. Для этого мы применим лемму 19 к сумме независимых случайных величин с функцией распределения $\overline{G}_h$. Нетрудно видеть, что ляпуновское отношение $L(h,y)$, соответствующее $\overline{G}_h$, равно $C(h,y)/B^3(h,y)$. Из леммы 11 следует, что при $\alpha^2 < 1/16e$

$$C(h,y) < 5{,}67\, C. \tag{104}$$

Положим $B_1^2(h,y) = \inf_j (B^2(h,y) - b_j^2(h,y))$. В силу леммы 13 $B_1^2(h,y) > 0{,}777(B^2 - \sup_j \sigma_j^2)$. Заметим, что вследствие (17) $x/B < 3\alpha(B/(4\max\sigma_j))$. Отсюда в силу (96)

$$\Big(\frac{\max\sigma_j}{B}\Big)^2 < \Big(\frac{3}{4x}\Big)^2 \alpha^2 < 0{,}005. \tag{105}$$

Таким образом,

$$B_1^2(h,y) > 0{,}773 B^2. \tag{106}$$

Сравнивая (104) и (106), имеем

$$\frac{C^{2/3}(h,y)}{B_1^2(h,y)} < 4{,}15 L^{2/3}. \tag{107}$$

Вследствие (17) и (96)

$$L < \frac{3}{64x} < 0{,}028. \tag{108}$$

Комбинируя (107) и (108), получаем после несложных вычислений

$$R_1 := \frac{L_1(h,y)}{6\sqrt{2\pi}(1 - 0{,}61 L_1^{2/3}(h,y))^{3/2}} < 0{,}075 L_1(h,y), \tag{109}$$

где $L_1(h,y) = C(h,y)/B_1^3(h,y)$.

В силу (65) и (105)

$$B_1^2(h,y) > 0{,}96 B^2(1 - 2\gamma - 3{,}2\alpha^2). \tag{110}$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{(1 - 2\gamma - 3{,}2\alpha^2)^{3/2}} < \frac{1}{(1 - 3{,}178\gamma)^{3/2}} < 1 + 6{,}3\gamma < 1{,}394. \tag{111}$$

Из (59), (110), (111) следует

$$L_1(h,y) < \frac{(2{,}96 + 18{,}7\gamma)\, C + 28{,}2\alpha \sum \sigma_j^3}{B^3}. \tag{112}$$

Сравнивая (109) и (112), получаем

$$R_1 < \frac{(0{,}24 + 1{,}515\gamma)\, C + 2{,}285\alpha \sum \sigma_j^3}{B^3}. \tag{113}$$

В силу (17), (43) и (48) $h(x,y) < x/(1 - 4\gamma)\, B^2 < \gamma B^2/C < B^2/16C$. Отсюда, учитывая (59) и (65), заключаем, что

$$\frac{hC^2(h,y)}{B^5(h,y)} < 1{,}08\, \frac{2{,}782^2 C + (38 \cdot 2{,}782\alpha + 361\alpha^2) \sum \sigma_j^3}{16(1 - 3{,}178\gamma)^{5/2} B^3}.$$

Следовательно,

$$\frac{2{,}473 hC^2(h,y)}{\pi B^5(h,y)} < \frac{(0{,}412 + 4{,}89\gamma)\, C + 14{,}91\alpha \sum \sigma_j^3}{B^3}. \tag{114}$$

Подставляем теперь в правую часть (82) вместо L и $L(\varepsilon)$ соответственно $L(h,y)$ и $L_1(h,y)$. Первые два слагаемых оцениваются посредством (113) и (114). Что касается остальных, то, как показывают вычисления, ими можно пренебречь. В результате мы приходим к оценке

$$h|I_2| < \frac{(0{,}652 + 6{,}1\gamma)\, C + 17{,}195\alpha \sum \sigma_j^3}{B^3}. \tag{115}$$

Далее, согласно оценке Берри–Эссеена,

$$\sup_u |r_h(u)| < \frac{c_0 C(h,y)}{B^3(h,y)}. \tag{116}$$

Применяя теперь леммы 11 и 13, получаем

$$\begin{aligned} |r_h(0)| &< \frac{1{,}08 c_0 (2{,}782 C + 19\alpha \sum \sigma_j^3)}{(1 - 2\gamma - 3{,}5\alpha^2)^{3/2} B^3} \\ &< \frac{(2{,}38 + 15\gamma)\, C + 22{,}65\alpha \sum \sigma_j^3}{B^3}. \end{aligned} \tag{117}$$

Между прочим, можно было бы воспользоваться неравенством (116) и для оценки hI_2, поскольку $h|I_2| < \sup_u |r(u)|$.

Так до сих пор и поступали, начиная с основополагающей работы Крамера [14]. Однако при этом мы бы проиграли в точности. Чтобы в этом убедиться, достаточно сравнить оценки (115) и (117). В значительной степени потеря точности связана с тем, что оценка для c_0, которой мы пользовались, не является оптимальной.

Продолжая доказательство, заметим, что в силу (38) и (54) при $e\alpha^2 < \gamma$, $\gamma < \frac{1}{16}$

$$|r(h,y) - 1| < \frac{1}{32}.$$

Отсюда, используя лемму 18 и неравенство $1 + x > e^{x - x^2/(1-x)}$, где $0 < x < \frac{1}{2}$, имеем

$$R(h,y) > \exp\Big\{Q(h,y) - \frac{32}{31} \sum (r_j(h,y) - 1)^2\Big\} \tag{118}$$

(определение $Q(h,y)$ см. перед леммой 5). Вследствие (31) и (55) $|r(h,y)-1| < eh^2\sigma^2/2 \vee \sigma^2 h/y \leqslant e\sigma^2/(2y^2)$. Отсюда, используя (31) и условия (48), (49), имеем

$$\sum (r_j(h,y)-1)^2 < \left(\frac{e}{2}\right)^2 y^{-4} \max_l \sigma_l \sum \sigma_j^3 < \frac{x^4 \max_l \sigma_l \sum \sigma_j^3}{(1-4\gamma)^4 B^8} \left(\frac{e}{2}\right)^2 < \frac{1{,}85\alpha x^3 \sum \sigma_j^3}{(1-4\gamma)^3 B^6}. \tag{119}$$

Из (51), (118), (119) следует

$$e^{-hx} R(h,y) > \exp\left\{-\frac{x^2}{2B^2} - \frac{(1{,}5C + 1{,}91\alpha \sum \sigma_j^3)\, x^3}{(1-4\gamma)^3 B^6}\right\}. \tag{120}$$

Комбинируя (94), (95), (98), (102), (103), (115), (117), (120), получаем

$$\mathbf{P}\{S > x\} > \left[\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{B}\right)\right) \exp\left\{-\frac{((2{,}186 + 23{,}38\gamma)\, C + 6{,}26\alpha \sum \sigma_j^3)\, x}{B^4 \Psi(x/B)}\right\} - \frac{e^{-x^2/2B^2}}{B^3}\left((3{,}032 + 21{,}1\gamma)\, C + 39{,}845\alpha \sum \sigma_j^3\right)\right] \times \exp\left\{-\frac{(1{,}5C + 1{,}98\alpha \sum \sigma_j^3) x^3}{(1-4\gamma)^3 B^6}\right\}. \tag{121}$$

Очевидно,

$$e^{-x^2/2B^2} = \sqrt{2\pi}\, \frac{(1 - \Phi(x/B))\, x}{\Psi(x/B)\, B}. \tag{122}$$

Из (121) и (122) следует утверждение теоремы.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть числа γ и $\alpha > 0$ связаны равенством $\gamma = \alpha^2$. Предположим, что выполняется неравенство

$$x < \frac{\gamma B^4}{C}. \tag{123}$$

Определим

$$N(x) = \left\{j\colon \sigma_j < \frac{\alpha B^2}{3x}\right\}.$$

Положим $S_1 = \sum' X_j$, $S_2 = \sum'' X_j$. Здесь и ниже $\sum' = \sum_{j \in N(x)}$, $\sum'' = \sum_{j \notin N(x)}$. Пусть $B_1^2 = \sum' \sigma_j^2$, $B_2^2 = \sum'' \sigma_j^2$, $C_1 = \sum' \beta_j$. Тогда

$$B_2^2 < \frac{3xC}{\alpha B^2} < 3\frac{\gamma B^2}{\alpha} = 2\sqrt{\gamma} B^2. \tag{124}$$

Если $\gamma < \frac{1}{14^2}$, то $B_2^2 < 3B^2/14$, т.е.

$$B_1^2 > \frac{11}{14} B^2. \tag{125}$$

Положим $\gamma_1 = 3{,}5\gamma$. Очевидно,

$$\frac{(1-4\gamma_1)\alpha B_1^2}{\max_{j\in N(x)} \sigma_j} \geqslant \frac{33(1-14\gamma)\, x}{14} > 2x,$$

если $\gamma \leqslant 1/14^2$. Далее, при $\gamma < \frac{1}{14^2}$

$$\frac{\gamma B^4}{C} < \left(\frac{14}{11}\right)^2 \frac{\gamma_1 B_1^4}{3{,}5 C_1} < \frac{(1-4\gamma_1)\, \gamma_1 B_1^4}{2C_1}.$$

Таким образом, при $\gamma < \frac{1}{14^2}$ ($\gamma_1 < \frac{1}{16}$) выполняется условие

$$2x < (1-4\gamma_1)\, B_1^2 \left(\frac{\gamma_1 B_1^2}{C_1} \wedge \frac{\alpha}{\max_{j \in N(x)} \sigma_j}\right),$$

т.е. для S_1 и x, удовлетворяющих неравенству (123), выполняется условие (17) с $\gamma = \gamma_1$.

Применяя теперь к S_1 следствие 1, мы заключаем, что при $B_1 < x < \omega = (1-4\gamma_1)\, B_1^2 (\gamma_1 B_1^2 / C_1 \wedge \alpha / \max_{j\in N(x)} \sigma_j)$

$$\mathbf{P}\{S_1 > x\} > \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{B_1}\right)\right) \exp\left\{-\frac{c_1(\alpha,\gamma_1)\, C_1 x^3}{B_1^3}\right\} \times \left(1 - \frac{c_2(\alpha,\gamma_1)\, C_1 x}{B_1^4 \Psi(1)}\right) \equiv f(x),$$

где $c_j(\cdot,\cdot)$ определяются равенствами (22). Отсюда, обозначая $\mathbf{P}\{S_i \leqslant x\} = G_i(x)$, $i = 1, 2$, имеем

$$\mathbf{P}\{S > x\} = \int_{-\infty}^{\infty} (G_1(x-u))\, dG_2(u) > \int_{u_1}^{u_2} f(x-u)\, dG_2(u) + f(x)\, (1 - G_2(u_2)), \tag{126}$$

где $u_1 = x - \omega$, $u_2 = x - B_1$. Согласно лемме 17, функция $f(x-u)$ выпукла по u при $u_1 \leqslant u < x$. Следовательно, по неравенству Юнга

$$\int_{u_1}^{u_2} f(x-u)\, dG_2(u) > pf(x-q), \tag{127}$$

где $p = G_2(u_2) - G_2(u_1)$, $q = \int_{u_1}^{u_2} u\, dG_2(u)/p$. Если $3B/2 < x < \omega/2$, то $|u_1| > \omega/2 > 3B/2$ и, согласно (124),

$$G_2(u_1) < \frac{B_2^2}{u_1^2} < \frac{8}{9} \frac{xC}{\alpha B^4}. \tag{128}$$

Оценим теперь величину q. Если $x > B$, то в силу (124)

$$-\int_{u_1}^{u_2} u\, dG_2(u) < \frac{B_2^2}{u_2} < \frac{3B_2^2}{x} < \frac{6C}{\sqrt{\gamma} B^2}. \tag{129}$$

Далее, $p > 1 - B_2^2/u_1^2 \wedge u_2^2$. Согласно (124), при $3B/2 < x < \omega/2$

$$\frac{B_2^2}{u_1^2} < \frac{4}{9}\sqrt{\gamma}, \quad \frac{B_2^2}{u_2^2} < \frac{4B_2^2}{B^2} < 4\sqrt{\gamma}.$$

Таким образом,

$$p > 1 - 4\sqrt{\gamma} > 0{,}465, \tag{130}$$

если $3B/2 < x < \omega/2$, $\gamma < \frac{1}{56}$. Из (129) и (130) следует

$$-q < \frac{12{,}91C}{\sqrt{\gamma}B^2} = \eta. \tag{131}$$

Используя лемму 16 и оценку (131), заключаем, что при $3B/2 < x < \omega/2$, $\gamma < \frac{1}{14^2}$

$$\begin{aligned} f(x-q) > \Big(1 - \Phi\Big(\frac{x}{B_1}\Big)\Big) \\ \times \exp\Big\{-\frac{1}{\Psi(3/2)}\Big(\frac{x\eta}{B_1^2} + \frac{\eta^2}{B_1^2}\Big) - \frac{c_1(\alpha,\gamma_1)(x+\eta)^3 C}{B_1^6}\Big\} \\ \times\Big(1 - \frac{c_2(\alpha,\gamma_1)(x+\eta)\,C}{B_1^4\Psi(3/2)}\Big). \end{aligned} \tag{132}$$

Согласно условию (123), при $\gamma < \frac{1}{14^2}$

$$\frac{Cx}{\sqrt{\gamma}B^4} < \sqrt{\gamma} < \frac{1}{2\sqrt{14}}.$$

Отсюда $L/\sqrt{\gamma} < \frac{1}{3\sqrt{14}}$, поскольку $x > 3B/2$. Следовательно,

$$\frac{\eta}{B} < 1{,}16, \qquad \frac{\eta^2}{B^2} < 1{,}16\frac{\eta}{B} < \frac{14{,}98C}{\sqrt{\gamma}B^3}. \tag{133}$$

В силу (133) и (125)

$$\frac{x\eta + \eta^2}{B_1^2} < 63{,}76\,\frac{Cx}{\sqrt{\gamma}B^4} < 27{,}89\,\frac{Cx^3}{\sqrt{\gamma}B^6}, \tag{134}$$

$$x + \eta < x + 1{,}16B < 1{,}774x. \tag{135}$$

Из (132) в силу (125), (134), (135) вытекает

$$\begin{aligned} f(x-q) > \Big(1 - \Phi\Big(\frac{x}{B_1}\Big)\Big)\exp\Big\{-\Big(\frac{36{,}07}{\sqrt{\gamma}} + 18{,}85c_1(\alpha,\gamma_1)\Big)\frac{Cx^3}{B^6}\Big\} \\ \times\Big(1 - \frac{4c_2(\alpha,\gamma_1)\,Cx}{\Psi(1)\,B^4}\Big). \end{aligned} \tag{136}$$

Из (124), (125) и леммы 16 следует

$$\begin{aligned} 1 - \Phi\Big(\frac{x}{B_1}\Big) &\geqslant \Big(1 - \Phi\Big(\frac{x}{B}\Big)\Big)\exp\Big\{-\frac{B_2^2x^2}{B_1^2B(B_1+B_2)\Psi(3/2)}\Big\} \\ &> \Big(1 - \Phi\Big(\frac{x}{B}\Big)\Big)\exp\Big\{-\frac{3\sqrt{3}Cx^3}{\sqrt{2\gamma}B^6\Psi(3/2)}\Big\}, \end{aligned} \tag{137}$$

если $3B/2 < x < \gamma B^4/C$, $\gamma < \frac{1}{14^2}$. Комбинируя оценки (126), (128), (136), (137), мы заключаем, что при $3B/2 < x < \gamma B^4/C$, $\gamma < \frac{1}{14^2}$

$$\mathbf{P}\{S > x\} > \Big(1 - \Phi\Big(\frac{x}{B}\Big)\Big)\exp\Big\{-\frac{c_1'(\alpha,\gamma)\,Cx^3}{B^4}\Big\}\Big(1 - \frac{c_2'(\alpha,\gamma)\,Cx}{B^4}\Big),$$

где

$$c_1'(\alpha,\gamma) = 18{,}85c_1(\alpha,\ 3{,}5\gamma) + \frac{3{,}68}{\sqrt{\gamma}\Psi(3/2)} + \frac{36{,}07}{\sqrt{\gamma}},$$

$$c_2'(\alpha,\gamma) = \frac{4c_2(\alpha,\ 3{,}5\gamma)}{\Psi(1)} + \frac{0{,}89}{\sqrt{\gamma}}, \qquad \alpha = \sqrt{\gamma}.$$

Отсюда, подставляя вместо $c_1(\cdot,\cdot)$ и $c_2(\cdot,\cdot)$ их выражения (22), мы получаем после не очень сложных вычислений требуемое неравенство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кендалл М. Дж., Стьюарт А.* Теория распределений. М.: Наука, 1966, 587 с.
2. *Kolmogoroff A. N.* Über das Gesetz des iterierten Logarithmus. — Math. Ann., 1929, B. 101, S. 126–135.
3. *Feller W.* Generalization of a probability limit theorem of Cramer. — Trans. Amer. Math. Soc., 1943, v. 54, № 3, p. 361–372.
4. *Lenart C.* On certain theorems of Berry and a limit theorem of Feller. — Mat. casopis, 1968, v. 18, № 1, p. 59–75.
5. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
6. *Розовский Л. В.* Одно обобщение теоремы Колмогорова о законе повторного логарифма. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 1, с. 134–143.
7. *Statulevicius V. A.* On large deviations. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1966, B. 6, H. 2, S. 133–144.
8. *Архангельский А. Н.* Нижние оценки для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. 34, в. 4, с. 625–635.
9. *Нагаев С. В.* Некоторые уточнения вероятностных неравенств. — Вестник МГУ, 1996, № 6, с. 64–66.
10. *Nagaev S. V.* Large deviations of sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
11. *Шиганов И. С.* Об уточнении верхней оценки константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. — Проблемы устойчивости стохастических моделей. М.: ВНИИСИ, 1982, с. 109–115.
12. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 415 с.
13. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 231–254.
14. *Cramer H.* Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités. — Actualités Sci. Indust., 1938, № 736.
15. *Нагаев С. В., Ходжабагян С. С.* Об оценке функции концентрации сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 655–665.

Поступила в редакцию
2.VII.1998