Доклады Академии наук СССР
1957. Том 115, № 2

МАТЕМАТИКА

С. В. НАГАЕВ

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 II 1957)

Пусть дано абстрактное пространство X и σ-алгебра $\mathcal{F}_X$ его подмножеств. Пусть $p(\eta, A)$, $\eta \in X$, $A \in \mathcal{F}_X$ — функция вероятностей перехода В дальнейшем мы будем предполагать, что существует стационарное распределение вероятностей $p(A)$ такое, что при некоторых $\rho < 1$ и c

$$|p^{(n)}(\eta, A) - p(A)| < c\rho^n \tag{1}$$

равномерно относительно $\eta \in X$ и $A \in \mathcal{F}_X$, где $p^{(n)}(\eta, A)$ — вероятность перехода из состояния η в состояние, принадлежащее множеству A, за n шагов. Функция $p(\eta, A)$ вместе с начальным распределением вероятностей $\pi(A)$ определяет последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова, причем

$$P(x_1 \in A) = \pi(A), \quad P(x_n \in A) = \int_X p^{(n-1)}(\eta, A)\, \pi(d\eta). \tag{2}$$

Пусть $f(\eta)$ — действительная функция, заданная на X и измеримая относительно $\mathcal{F}_X$.

Теорема 1. *Если*

$$\int |f(\eta)|^2 p(d\eta) < \infty,$$

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} M\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} (f(x_m) - Mf(x_m))\right] > 0$$

(*математическое ожидание вычисляется в предположении, что начальным распределением является стационарное*), *то при любом начальном распределении* $\pi(A)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} \left(f(x_m) - \int_X f(\eta)\, p(d\eta)\right) < x\right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2\sigma^2}\, du. \tag{3}$$

Эта теорема является аналогом известной теоремы П. Леви, которая утверждает, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $\sigma^2 = Dx_i < \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du,$$

где a — математическое ожидание x_i. До настоящего времени центральная предельная теорема для однородной цепи Маркова с произвольным множеством состояний доказывалась в предположении, что при некотором $\delta > 0$ ([1, 2, 8])

$$\int_X |f(\eta)|^{2+\delta} p(d\eta) < \infty.$$

Теорема 2. *Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения $F(x)$ такой, что*

$$F(x) = p(f(\eta) < x)$$

(здесь $p(A)$ — стационарное распределение). Если для некоторой последовательности постоянных A_n и $B_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{B_n}\left(\sum_{m=1}^{n} u_m - A_n\right) < x\right) = V_\alpha(x),$$

где $V_\alpha(x)$ — устойчивый закон с характеристическим показателем $\alpha <$ и для некоторого $0 < \nu \leqslant 1$

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/2} B_n^{-\nu} \sup_{\xi} \int |f(\eta)|^{\nu} p(\xi, d\eta) = 0, \quad |f(\eta)| < B_n \tau, \tag{4}$$

каково бы ни было $\tau > 0$, то при произвольном начальном распределении $\pi(A)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{B_n}\left(\sum_{m=1}^{n} f(x_m) - A_n\right) < x\right) = V_\alpha(x). \tag{4'}$$

Условие (4) выполняется, например, когда при некотором $\varepsilon < \alpha/2$ моменты $\int_X |f(\eta)|^{\alpha-\varepsilon} p(\xi, d\eta)$ равномерно ограничены по ξ.

Теорема 3. *Если при некотором $0 < \alpha < 2$ $\int_X |f(\eta)|^{\alpha} p(d\eta) < \infty$, то при некотором выборе постоянных A_n и произвольном начальном распределении*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n^{1/\alpha}}\left(\sum_{m=1}^{n} f(x_m) - A_n\right) < x\right) = E(x), \tag{5}$$

где $E(x)$ — несобственный закон.

Следствие. Если $\int_X |f(\eta)| p(d\eta) < \infty$, то последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ подчиняется закону больших чисел.

Пусть теперь X — счетное множество $\{\omega_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и

$$\beta = \inf_{(i,j)} \sum_{k=1}^{\infty} \min(p_{ik}, p_{jk}), \tag{6}$$

где p_{ik} — вероятность перехода из ω_i в ω_k за один шаг (смысл условия (6) разъясняется в ([3])).

Предположим далее, что все состояния ω_i являются существенными и образуют положительный класс ([4]). В силу (6) этот класс состоит из одного подкласса. Пусть $f(\omega_j) = a + k_j h$, где a — произвольное действительное число, k_j — целое число и $h > 0$.

Теорема 4. *Если общий наибольший делитель k_j равен 1, $\sum_{j=1}^{\infty} f^2(\omega_j)\, p_j < \infty$ и $\sigma > 0$ (p_j — финальные вероятности; σ определяется так же, как в теореме 1), то равномерно относительно s*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma\sqrt{n}}{h} P_{\pi n}(s) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z_{ns}^2/2}\right) = 0, \tag{7}$$

где $P_{\pi n}$ — вероятность того, что

$$\sum_{m=1}^{n} f(x_m) = an + sh,$$

при условии, что начальным распределением является $\pi(A)$, и

$$z_{ns} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(an + sh - n\sum_{j=1}^{\infty} f(\omega_j)\, p_j\right).$$

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы 4 и, кроме того, для некоторого целого $k \geqslant 3$ и некоторого $\delta > 0$*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f(\omega_j)|^{k+\delta} p_{ij} < M < \infty$$

равномерно для всех i, то

$$P_{\pi n}(s) = \frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\left\{\varphi(z_{ns}) + \sum_{m=1}^{k-2} \frac{1}{n^{m/2}} T_{\pi m}(\varphi(z_{ns})) + o\left(\frac{1}{n^{(k-2)/2}}\right)\right\}. \tag{8}$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad T_{\pi m}(\varphi(x)) = \sum_{l=m+2}^{3m} a_{\pi m l} \frac{d^l}{dx^l}\varphi(x),$$

где коэффициенты $a_{\pi m l}$ зависят от начального распределения $\pi(A)$ и $\rho(\eta, A)$.

Теоремы 4 и 5 являются обобщением результатов С. Х. Сираждинова ([5]). Все сформулированные выше теоремы получаются при помощи метода, основанного на применении спектральной теории линейных операторов в банаховом пространстве ([7]). Этот метод является естественным обобщением матричного метода и метода интегральных уравнений, изложенных, например, в ([6]); его можно использовать и для доказательства многомерных предельных теорем.

В заключение автор благодарит Р. Л. Добрушина и В. М. Золотарева за ценные замечания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Doeblin, Bull. Math. Soc. Roum. Sci., 39, № 2, 3 (1937). [2] Е. Б. Дынкин, Укр. матем. журн., 6, № 1, 21 (1954). [3] Р. Л. Добрушин, Теория вероятностей и ее приложения, 1, 1, 72 (1956). [4] А. Н. Колмогоров, Бюлл. МГУ, 1, 3 (1937). [5] С. Х. Сираждинов, ДАН, 84, № 6 (1952). [6] Т. А. Сарымсаков, Основы теории процессов Маркова, М., 1954. [7] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, М., 1953. [8] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М., 1956, стр. 207