Теорема 3. *Если $n \to \infty$, $a \to 0$ и $t \to \infty$, то равномерно по z и по γ, изменяющемся в конечных пределах $0 \leqslant \gamma \leqslant c$, где c — произвольная константа,*

$$|H(z) - h(z, \gamma)| \to 0,$$

где

$$h(z, \gamma) = \frac{e^{-\gamma}\gamma}{(1 - l^{-\gamma})^{3/2}} \int_0^z e^{-\frac{y\gamma}{1-l^{-\gamma}}} y^{-1/2} I_1\left(2\gamma \sqrt{\frac{y}{1-l^{-\gamma}}}\right) dy, \quad z > 0$$

и

$$I_1(y) = \frac{y}{2} + \frac{1}{1!2!}\left(\frac{y}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!4!}\left(\frac{y}{2}\right)^5 + \dots$$

функция Бесселя.

Доказательство этой теоремы использует теоремы 1 и 2, а также обобщенную теорему Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Н. А. Дмитриев, ДАН, СССР, 56, № 1 (1947).
[2] А. Н. Колмогоров, Изв. НИИ матем. и мех. Томск. ун-та, 2 (1938), 7—12.
[3] А. М. Яглом, ДАН СССР, 56, № 8 (1947).
[4] Б. А. Севастьянов, Успехи матем. наук, VI, № 6 (1951).

Скороход А. В., **Предельные теоремы для случайных процессов** (Skorohod A. V., Limit theorems for stochastic processes).

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», том. I, вып. 3.

Заседание 30 октября.

Нагаев С. В., **О некоторых предельных теоремах для однородных цепей Маркова** (Nagaev S. V., On several limit theorems for homogeneous Markov chains).

Пусть дано абстрактное пространство X и борелевское тело F_X множеств, принадлежащих X. Пусть $P(\eta, A)$, $\eta \in X$, $A \in F_X$ — функция вероятностей перехода. Допустим, что существует стационарное распределение вероятностей $P(A)$ такое, что

$$|P^{(n)}(\xi, A) - P(A)| < \gamma\rho^n, \quad \rho < 1, \tag{1}$$

равномерно относительно $\xi \in X$ и $A \in F_X$. Функция $P(\eta, A)$ вместе с начальным распределением вероятностей определяет последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$ случайных величин, связанных в цепь Маркова.

Пусть $f(\eta)$ — действительная функция, заданная на X и измеримая относительно F_X

Теорема 1. *Если*

$$\int_X f^2(\eta) P(d\eta) < \infty$$

и

$$\sigma^2 = \lim_{n \to \infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} (f(x_m) - \mathrm{E} f(x_m))\right]^2 > 0$$

(*математическое ожидание вычисляется в предположении, что начальное распределение является стационарным*), *то при любом начальном распределении* $\pi(A)$

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}_\pi \left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} (f(x_m) - \mathrm{E} f(x_m)) \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть распределение $F(x) = \mathrm{P}(f(\eta) < x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона $V_\alpha(x)$ с показателем α и для некоторого ν, $0 < \nu \leqslant 1$.*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} B_n^{-\nu} \sup_{\xi} \int_{|f(\eta)| < B_n \psi(n)} |f(\eta)|^\nu P(\xi, d\eta) = 0,$$

где $\psi(n)$ *монотонно возрастает и* $\lim_{n\to\infty}\psi(n)=\infty$, *то при некотором выборе постоянных* A_n *и* B_n *и любом начальном распределении* π

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_\pi\left(\frac{\sum_{m=1}^{n} f(x_m)-A_n}{B_n}<x\right)=V_\alpha(x). \tag{3}$$

Пусть теперь Ω — счетное множество возможных состояний $\{\omega_i\}$, p_{ik} — вероятность перейти из состояния ω_i в состояние ω_k за один шаг. Предположим, что множество состояний образует один существенный класс, состоящий из одного подкласса и

$$B=\inf_{(i,j)}\sum_{k=1}^{\infty}\min(p_{ik},p_{jk})>0.$$

Пусть, далее, $f(\omega_j)=a+k_jh$ — общий наибольший делитель разностей $\frac{f(\omega_j)-f(\omega_i)}{n}$ i, $j=\overline{1,\infty}$), равен 1, $\sum_j f^2(\omega_j)p_j<\infty$ и $\sigma>0$ (σ определяется так же, как в теореме 1). Тогда справедлива

Теорема 3. *Равномерно по* n

$$\lim_{n\to\infty}\left(p_n^{(\gamma)}(s)-\frac{h}{\sigma\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{z_{ns}^2}{2}}\right)=0, \tag{4}$$

где $p_n^{(\gamma)}(s)$ — *вероятность того, что*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-\mathbf{E}f(x_k)]}{\sigma\sqrt{n}}=an+sh$$

при условии, что $x_1=\omega_\gamma$ *и* $z_{ns}=\frac{an+sh}{\sigma\sqrt{n}}$.

При дополнительном предположении

$$\sum_j|f(\omega_j)|^k p_{ij}<M,\quad k\geqslant 4 \tag{5}$$

равномерно относительно i, имеет место

Теорема 4.

$$p_n^{(\gamma)}(t)=\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\left\{\varphi(z_{ns})+\sum_{j=1}^{k-3}\frac{1}{n^{j/2}}p_j^{(\gamma)}(-\varphi(z_{ns}))\right\}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}}\right),$$

где $p_j^{(\gamma)}(-\varphi)$ *вычисляется как* $p_j^{(\gamma)}(\ \ u)$ *с заменой* u^r *на* $\frac{d^r}{dx^r}\varphi(x)$, *а* $p_j^{(\gamma)}(\ \ u)$ — *некоторый полином.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] I. L. Doob, Stochastic Prozesses, New York, 1953.

[2] Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, Изд. ин. лит., 1954.

[3] Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы. Изд. Ин. лит., 1951.

[4] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, 1949.

[5] Е. Б. Дынкин, О некоторых предельных теоремах для цепей Маркова, Украинский матем.журн., VI, № 1 (1954).

[6] С. Х. Сираждинов, Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова, ДАН СССР, 84, № 6 (1952), 1143—1146.

[7] Р. Л. Добрушин, Об условиях центральной предельной теоремы для неоднородных цепей Маркова, ДАН СССР, 108, № 6 (1956).

Заседание 13 ноября.

Севастьянов Б. А., Финальные вероятности ветвящихся случайных процесов (Sevastjanov B. A., Final probabilities for branching stochastic processes).

Изучается процесс размножения частиц типов $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_s$. Обозначим через $P_k^\alpha(t)$ — вероятность того, что за время t одна частица типа T_k переходит в α_i частиц тела T_i, $i=0, 1, 2, \ldots, s$, $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. Введем производящие функции

$$F_k(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_s, t)=\sum_\alpha P_k^\alpha(t)\, x_0^{\alpha_0}, x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_s^{\alpha_s}, \quad k=0, 1, 2, \ldots, s,$$

причем

$$F_k(x_0, x_1, \ldots, x_s, \Delta t)=x_k+f_k(x_0, x_1, \ldots, x_s)\,\Delta t+o(\Delta t),$$

где $f_k(x_0, x_1, \ldots, x_s)=\sum_\alpha P_k^\alpha x_0^{\alpha_0} \ldots\ x_s^{\alpha_s}$.

Пусть частицы типа T_0 финальны, т. е. с вероятностью единица при любом t. Каждая частица T_0 остается без изменения. Обозначим через q_k^n вероятность того, что процесс, начавшийся с одной частицы типа T_k, рано или поздно кончится, произведя «n» финальных частиц T_0.

Пусть $s=1$. Обозначим через μ_n число частиц типа T_0, которое n частиц T_1 производит при $t\to\infty$.

Теорема 1. *Если производящая функция $f_1(x_0, x_1)$ аналитична при $|x_0|<R$, $|x_1|<R$, $R>1$, $a=\frac{\partial f_1(1,1)}{\partial x_1}=0$, $b=\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x_1^2}>0$ и $a_{10}=\frac{\partial f_1(1,1)}{\partial x_0}>0$, то при $x>0$ и $n\to\infty$*

$$\mathrm{P}\left\{\frac{\mu_n}{\frac{2a_{10}}{b}n^2}<x\right\}\to\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{1}{4t}}x^{-3/2}\,dt.$$

Теорема 2. *Если $f_1(x_0, x_1)$ аналитична при $|x_0|<R$, $|x_1|<R$, $R>1$, $b>0$, то при $n\to\infty$, $a<0$, $a\to\infty$ так, что $k=na$ постоянно, $\eta_n=\frac{\mu_n}{\frac{2a_{10}}{b}n^2}$ в пределе имеет безгранично делимый закон распределения с характеристической функцией, логарифм которой равен*

$$\ln\varphi(\tau)=\int_0^\infty\left(e^{iu\tau}-1-\frac{iu\tau}{1+u^2}\right)dN(u),$$

$$N(x)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-1/2}e^{-\frac{k^2}{b^2}x^2}.$$

Пусть $s>1$. Предполагаем, что $f_i(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ аналитичны при $|x_i|<R$, $R>1$ $i=1, 2, \ldots, s$. Обозначим $a_{ij}=\frac{\partial f_i(1,1,\ldots,1)}{\partial x_j}$, $i, j=1, 2, \ldots, S$. Пусть все характеристические корни матрицы $A=\|a_{i,j}\|$ имеют неположительные действительные части. Тогда имеет место

Теорема 3. *Пусть μ_n — число частиц финального типа T_0, которое получается в конце процесса, начинающегося с «n» частиц типа T_i. Если существует собственный предельный при $n\to\infty$ закон распределения для $\frac{\mu_n}{n^{2^r}}$, то этот закон устойчивый с $\alpha=\frac{1}{2^r}$, $1\leqslant r\leqslant S$.*