

© 2011 г. НАГАЕВ С. В.*, ЧЕБОТАРЕВ В. И.**

**ОБ ОЦЕНКЕ БЛИЗОСТИ БИНОМИАЛЬНОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ К НОРМАЛЬНОМУ¹⁾**

В работе найдены оценки погрешности гауссовской аппроксимации биномиального распределения в зависимости от вероятности успеха и числа наблюдений. В качестве следствия выводится верхняя оценка постоянной в неравенстве Берри–Эссеена для множества двухточечных распределений, которая отличается от асимптотической — 0.409732... — не больше чем на 0.012.

Ключевые слова и фразы: наименьшее значение абсолютной константы в неравенстве Берри–Эссеена, метод сглаживания, погрешность в интегральной теореме Муавра–Лапласа.

1. Введение. Формулировка основных результатов. Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и конечным третьим моментом. Обозначим $b^2 = \mathbf{E} X^2$, $\alpha_k = \mathbf{E} X^k$, $\beta_k = \mathbf{E} |X|^k$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Пусть $\Phi(x)$ — стандартный нормальный закон.

А. Берри [1] и К.-Г. Эссеен [2] доказали, что

$$\Delta_n := \sup_x |\mathbf{P}(n^{-1/2} S_n < bx) - \Phi(x)| \leq C_0 \frac{\beta_3}{b^3 \sqrt{n}},$$

где C_0 — абсолютная постоянная.

Поиску оптимального значения C_0 посвящено большое количество работ (см., например, [3]–[15]). Мы не даем исторического обзора, поскольку это достаточно подробно сделано в недавней статье В. Ю. Королева и И. Г. Шевцовой [15], а также препринте авторов [14]. Отметим только, что в обеих работах впервые обращается внимание читателя на роль результатов С. Цаля [6] и Х. Правитца [12].

*Институт математики им. С. Л. Соболева, пр-т Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev@math.nsc.ru, nagaevs@hotmail.com, nagaevs@academ.org

**Вычислительный центр ДВО РАН, ул. Ким Ю Чена 65, 680000 Хабаровск, Россия; e-mail: chebotarev@as.khb.ru, cheb.8@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-98524-р-восток-а), Сибирского отделения РАН (проект № 30), а также Дальневосточного отделения РАН (проекты 09-II-CO-01-003 и 09-I-OMH-02).

Кроме того, остановимся на следующем результате Эссеена [17, с. 56] (см. также [18, гл. 8, § 43, теорема 1, с. 228]): если решетчатая случайная величина X принимает значения вида $w + kh$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, то

$$\mathbf{P}(n^{-1/2}S_n < bx) - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-x^2/2} \left[\frac{\alpha_3}{6b^3} (1 - x^2) + \frac{h}{b} \psi_n(x) \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (1.1)$$

равномерно по x , где $\psi_n(x) = S((xb\sqrt{n} - nw)/h)$, $S(x) = [x] - x + 1/2$. Используя (1.1), нетрудно убедиться в существовании следующего предела (см. также [16]): для любой решетчатой случайной величины X с шагом h

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \Delta_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{|\alpha_3|}{6b^3} + \frac{h}{2b} \right). \quad (1.2)$$

Обозначим

$$p_0 = \frac{4 - \sqrt{10}}{2} = 0.418861\dots, \quad q_0 = 1 - p_0 = \frac{\sqrt{10} - 2}{2} = 0.581138\dots,$$

а через X_0 обозначим случайную величину со следующим двухточечным распределением: $\mathbf{P}(X_0 = -p_0h) = q_0$, $\mathbf{P}(X_0 = q_0h) = p_0$. Эссеен [16] показал, что для всех дискретных распределений, у которых расстояние между атомами не меньше чем h , справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{|\alpha_3|}{6b^3} + \frac{h}{2b} \right) \leq C_E \frac{\beta_3}{b^3}, \quad (1.3)$$

где $C_E = (\sqrt{10} + 3)/(6\sqrt{2\pi}) = 0.409732\dots$. При этом равенство в (1.3) достигается только тогда, когда $X = X_0$ или $X = -X_0$. Из этого результата вытекает, что $C_0 \geq C_E$.

Что касается верхних оценок для C_0 , то наилучший результат в этом направлении получен в [15], а именно,

$$C_0 \leq 0.5129. \quad (1.4)$$

На самом деле, в [15] получен более сильный результат

$$\Delta_n \leq \frac{0.34445\beta_3 + 0.16844b^3}{b^3\sqrt{n}}, \quad (1.5)$$

из которого очевидным образом следует (1.4).

В настоящей работе мы дадим оценку для C_0 в частном случае, когда X принимает только два значения. Итак, пусть

$$\mathbf{P}(X = a) = q, \quad \mathbf{P}(X = d) = p, \quad p + q = 1, \quad a < 0 < d, \quad \mathbf{E} X = 0. \quad (1.6)$$

Будем считать для простоты, что

$$b^2 = 1. \quad (1.7)$$

Тогда (см. лемму 3.1)

$$\beta_3 = \beta_3(p) \equiv \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{pq}}, \quad \alpha_3 = \alpha_3(p) = \frac{q - p}{\sqrt{pq}}, \quad d - a = \frac{1}{\sqrt{pq}}. \quad (1.8)$$

Определим функцию $\mathcal{E}(p)$ равенством

$$\mathcal{E}(p) = \frac{1}{\beta_3(p)\sqrt{2\pi}} \left(\frac{|\alpha_3(p)|}{6} + \frac{d - a}{2} \right). \quad (1.9)$$

В дальнейшем будем называть $\mathcal{E}(p)$ функцией Эссеена. В случае распределения (1.6) и при условии (1.7) результат Эссеена (1.2) можно записать в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \Delta_n(p) = \mathcal{E}(p)\beta_3(p). \quad (1.10)$$

Здесь и далее мы вместо Δ_n пишем $\Delta_n(p)$, чтобы подчеркнуть зависимость от параметра p .

Не ограничивая общности, будем предполагать, что

$$0 < p \leq 0.5. \quad (1.11)$$

Используя формулы (1.8) и условие (1.11), нетрудно вывести представление

$$\mathcal{E}(p) = \frac{2 - p}{3\sqrt{2\pi} [p^2 + (1 - p)^2]}.$$

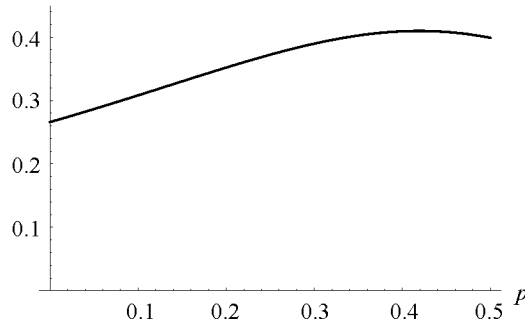


Рис. 1.1. График $\mathcal{E}(p)$

З а м е ч а н и е 1.1. Отметим, что

$$\mathcal{E}(0.5) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1.12)$$

Кроме того,

$$\max_{0 < p \leq 0.5} \mathcal{E}(p) = \mathcal{E}(p_0).$$

Это следует из равенства $\mathcal{E}'(p) = (1/\sqrt{2\pi})(2p^2 - 8p + 3)/(3(p^2 + q^2)^2)$ и того факта, что квадратное уравнение $2p^2 - 8p + 3 = 0$ имеет только один корень $p = p_0$, удовлетворяющий условию $0 \leq p \leq 1$. В свою очередь, соотношения $2 - p_0 = \sqrt{10}/2$ и $p_0^2 + q_0^2 = \sqrt{10}(\sqrt{10} - 3)$ влекут за собой равенство

$$\mathcal{E}(p_0) = C_E.$$

Приступим к формулировке основного результата нашей работы — теоремы 1.1. Но прежде сформулируем четыре утверждения, из которых и следует теорема.

При доказательстве теоремы 1.1 используется, как и почти во всех работах, посвященных оценке постоянной в неравенстве Берри–Эссеена, метод сглаживания. Однако, в отличие от традиционного (после работы Цаля [6]) сглаживания посредством обобщенных мер с финитными преобразованиями Фурье, мы применяем с этой целью равномерное распределение, сосредоточенное на отрезке $[-1/(2\sqrt{pq}), 1/(2\sqrt{pq})]$.

Сформулируем лемму сглаживания. Пусть G и G_0 — некоторые функции распределения. Предполагается, что G_0 абсолютно непрерывна и $D \equiv \sup |G'_0(x)| < \infty$. Обозначим: $\delta(x) = G(x) - G_0(x)$, $\Delta = \sup_x |\delta(x)|$, $P(x)$ — функция симметрического финитного распределения с носителем $[-\varkappa, \varkappa]$, $\varkappa > 0$, $(P * \delta)(x) = \int_{-\varkappa}^{\varkappa} \delta(x - y) dP(y)$.

Лемма 1.1. Для любого $\varkappa > 0$

$$\Delta \leq \sup_{x \in \mathbf{R}} |(P * \delta)(x)| + D \varkappa.$$

Заметим, что лемма 1.1 представляет собой очень простой вариант утверждений типа неравенств сглаживания (ср., например, с [5, лемма 2] или [20]).

Пусть теперь случайная величина X имеет распределение (1.6), $f(t)$ — ее характеристическая функция. Из леммы 1.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.2. Для любых $\varkappa > 0$ и $x > 0$

$$\Delta_n(p) \leq \frac{1}{2\pi} |I| + \frac{\varkappa}{\sqrt{2\pi n}},$$

где

$$I \equiv I(x, \varkappa) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt, \quad (1.13)$$

$$v(t) \equiv v(t, x, \varkappa) = \frac{f^n(t) - e^{-nt^2/2}}{-it} \hat{p}(t) e^{-itx}, \quad \hat{p}(t) = \frac{\sin(t\varkappa)}{t\varkappa}.$$

Доказательство лемм 1.1, 1.2 приводится в п. 2.

Представим $v(t)$ в виде суммы двух функций, исходя из следующей алгебраической формулы: для любых $n \in \mathbf{N}$, $x_1 \in \mathbf{C}$ и $x_2 \in \mathbf{C}$

$$x_1^n - x_2^n = n(x_1 - x_2)x_2^{n-1} + (x_1 - x_2)^2 \sum_{j=0}^{n-2} (j+1) x_1^{n-2-j} x_2^j.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f^n(t) - e^{-nt^2/2} &= n[f(t) - e^{-t^2/2}]e^{-(n-1)t^2/2} \\ &+ [f(t) - e^{-t^2/2}]^2 \sum_{j=0}^{n-2} (j+1) f^{n-2-j}(t) e^{-jt^2/2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t),$$

где

$$v_1(t) = n \frac{f(t) - e^{-t^2/2}}{-it} e^{-(n-1)t^2/2} \hat{p}(t) e^{-itx}, \quad (1.14)$$

$$v_2(t) = \sum_{j=0}^{n-2} (j+1) \frac{(f(t) - e^{-t^2/2})^2}{-it} f^{n-2-j}(t) e^{-jt^2/2} \hat{p}(t) e^{-itx}. \quad (1.15)$$

Пусть $\tau > 0$ произвольно. Обозначим

$$I_1 = \int_{|t| \leq \tau} v_1(t) dt, \quad I_2 = \int_{|t| \leq \tau} v_2(t) dt, \quad I_3 = \int_{|t| > \tau} v(t) dt. \quad (1.16)$$

Интеграл (1.13) можно записать в виде

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценки интегралов I_k , $k = 1, 2, 3$, с

$$\tau = \left(\frac{6}{\beta_3(p)n} \right)^{1/3}, \quad (1.17)$$

$$\varkappa = \frac{1}{2\sqrt{pq}} \quad (1.18)$$

получены в леммах 1.3–1.5. Соответствующие доказательства приводятся в пп. 4–6.

Обозначим

$$\sigma = \sigma(p, n) = \sqrt{npq},$$

$$\begin{aligned} \omega_3(p) &= q - p, & \omega_4(p) &= |q^3 + p^3 - 3pq|, \\ \omega_5(p) &= q^4 - p^4, & \omega_6(p) &= q^5 + p^5 + 15(pq)^2, \end{aligned}$$

$$K_1(p, n) = \frac{\omega_3(p)}{4\sigma\sqrt{2\pi}(n-1)} \left(1 + \frac{1}{4(n-1)}\right) + \frac{\omega_4(p)}{12\sigma^2\pi} \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 + \frac{\omega_5(p)}{40\sigma^3\sqrt{2\pi}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{5/2} + \frac{\omega_6(p)}{90\sigma^4\pi} \left(\frac{n}{n-1}\right)^3. \quad (1.19)$$

Лемма 1.3. *Имеет место оценка*

$$\frac{1}{2\pi} |I_1| \leq \frac{\alpha_3(p)}{6\sqrt{2\pi n}} + K_1(p, n). \quad (1.20)$$

Обозначим

$$\omega(p) = p^2 + q^2, \quad \zeta(p) = \left(\frac{\omega(p)}{6}\right)^{2/3}, \quad e(n, p) = \exp\left\{\frac{1}{24\sigma^{2/3}\zeta^2(p)}\right\}, \quad (1.21)$$

$$e_5 = 0.0277905, \quad \tilde{\omega}_5(p) = p^4 + q^4 + 5! e_5(pq)^{3/2},$$

$$A_k(n) = \left(\frac{n}{n-2}\right)^{k/2} \frac{n-1}{n}, \quad (1.22)$$

$$V_6(p) = \omega_3^2(p), \quad V_7(p) = \omega_3(p)\omega_4(p), \quad (1.23)$$

$$V_8(p) = \frac{2\tilde{\omega}_5(p)\omega_3(p)}{5!3!} + \left(\frac{\omega_4(p)}{4!}\right)^2,$$

$$V_9(p) = \tilde{\omega}_5(p)\omega_4(p), \quad V_{10}(p) = \tilde{\omega}_5^2(p), \quad (1.24)$$

$$\gamma_6 = \frac{1}{9}, \quad \gamma_7 = \frac{5\sqrt{2\pi}}{96}, \quad \gamma_8 = 24, \quad \gamma_9 = \frac{7\sqrt{2\pi}}{4!16}, \quad \gamma_{10} = \frac{2^6 \cdot 3}{(5!)^2},$$

$$\tilde{\gamma}_6 = \frac{2}{3}, \quad \tilde{\gamma}_7 = \frac{7}{8}, \quad \tilde{\gamma}_8 = \frac{10}{9}, \quad \tilde{\gamma}_9 = \frac{11}{8}, \quad \tilde{\gamma}_{10} = \frac{5}{3},$$

$$K_2(p, n) = \frac{1}{\pi\sigma} \sum_{j=1}^5 \frac{\gamma_{j+5} A_{j+5}(n) V_{j+5}(p)}{\sigma^j} \left[1 + \frac{\tilde{\gamma}_{j+5} e(n, p) n}{\sigma^2 (n-2)}\right]. \quad (1.25)$$

Лемма 1.4. *Справедливы неравенства*

$$\frac{1}{2\pi} |I_2| < K_2(p, n), \quad (1.26)$$

$$\frac{\sqrt{n}}{2\pi\beta_3(p)} |I_2| < \frac{\sigma}{\omega(p)} K_2(p, n), \quad (1.27)$$

причем правая часть (1.27) убывает по $n \geq 3$.

Обозначим

$$A_1 = 5.405, \quad A_2 = 7.521, \quad A_3 = 5.233, \quad \mu = \frac{3\pi^2 - 16}{\pi^4},$$

$$\begin{aligned}\chi(p, n) &= \frac{2\zeta(p)}{\sigma^{2/3}} \text{ при } 0 < p < 0.085, \\ \chi(p, n) &= 0 \text{ при } 0.085 \leq p \leq 0.5,\end{aligned}\tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}K_3(p, n) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{12\sigma^2} + \left(\frac{1}{36} + \frac{\mu}{8} \right) \frac{1}{\sigma^4} + \left(\frac{1}{36} e^{A_1/6} + \frac{\mu}{8} \right) \frac{1}{\sigma^6} + \frac{5\mu}{24} e^{A_2/6} \frac{1}{\sigma^8} \right. \\ &\quad + \frac{1}{3} \exp \left\{ -\sigma\sqrt{A_1} + \frac{A_1}{6} \right\} + (\pi - 2)\mu \exp \left\{ -\sigma\sqrt{A_2} + \frac{A_2}{6} \right\} \\ &\quad + \exp \left\{ -\sigma\sqrt{A_3} + \frac{A_3}{6} \right\} \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\pi^4 \sigma^2}{4A_3} \right) \\ &\quad \left. + \exp \left\{ -\frac{\sigma^{2/3}}{2\zeta(p)} \right\} \left[\frac{2\zeta(p)}{\sigma^{2/3}} + e^{A_3/6} \frac{1 + \chi(p, n)}{24\zeta(p)\sigma^{4/3}} \right] \right\}.\end{aligned}\tag{1.29}$$

Лемма 1.5. Если

$$\frac{4}{n} \leq p \leq 0.5, \quad n \geq 200,\tag{1.30}$$

то справедлива оценка

$$\frac{1}{2\pi} |I_3| \leq K_3(p, n),$$

причем для каждого фиксированного p функция $(\sqrt{n}/\beta_3(p)) K_3(p, n)$ убывает по $n \geq \max\{200, 4/p\}$.

Теорема 1.1. Пусть выполнено условие (1.30). Тогда

$$\Delta_n(p) \leq \frac{\beta_3(p)}{\sqrt{n}} \mathcal{E}(p) + R(p, n),\tag{1.31}$$

где $R(p, n) = K_1(p, n) + K_2(p, n) + K_3(p, n)$, причем

$$R_0(p, n) \equiv \frac{\sqrt{n}}{\beta_3(p)} R(p, n),\tag{1.32}$$

убывая по n , стремится к нулю при каждом $0 < p \leq 0.5$.

Доказательство теоремы 1.1. Из лемм 1.2–1.5 вытекает, что при условии (1.30)

$$\Delta_n(p) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{\alpha_3(p)}{6} + \varkappa \right) + \sum_{j=1}^3 K_j(p, n).$$

Следовательно,

$$\frac{\sqrt{n}}{\beta_3(p)} \Delta_n(p) \leq \frac{1}{\beta_3(p)\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha_3(p)}{6} + \varkappa \right) + R_0(p, n).$$

В свою очередь, из (1.9) и (1.18) мы находим, что

$$\frac{1}{\beta_3(p)\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\alpha_3(p)}{6} + \varkappa\right) = \mathcal{E}(p).$$

Тем самым теорема доказана.

Определим функцию

$$E(p, n) = \mathcal{E}(p) + R_0(p, n)$$

при $n \geq 200$ и $4/n \leq p \leq 0.5$.

З а м е ч а н и е 1.2. Рассмотрим функцию $E(p, n)$ при $n = 200$ и $n = 800$ (см. рис. 1.2). Визуально $E(p, 200)$ и $E(p, 800)$ близки к функции Эссеена $\mathcal{E}(p)$ только при p , отделенных от нуля. Это отражает тот факт, что нормальное распределение является хорошим приближением к биномиальному только, если величина npq достаточно велика. При малых npq имеет смысл воспользоваться пуассоновским приближением. Так мы и поступили в препринте [14, раздел 7]. Однако в настоящей работе ради сокращения ее объема применяется результат статьи [15] (см. обоснование неравенства (1.37)).

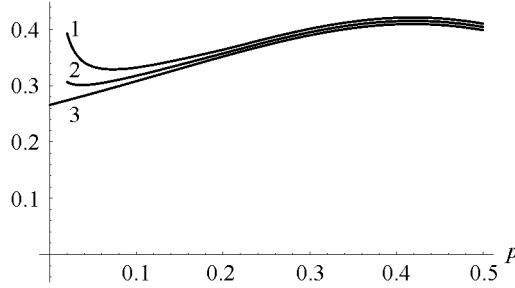


Рис. 1.2. 1 — график $E(p, 200)$ при $p \in [0.02, 0.5]$, 2 — график $E(p, 800)$ при $p \in [0.02, 0.5]$, 3 — график $\mathcal{E}(p)$ при $p \in [0, 0.5]$

Заметим, что левая граница промежутка $[4/n, 0.5]$ для аргумента p в теореме 1.1 выбрана исходя из следующих соображений: $E(0.02, 200) < 0.393 < C_E$, однако $E(0.015, 200) > 0.432 > 0.4215$. Вычисления показывают, что с ростом n величина $E(4/n, n)$ убывает. Например, $E(4/n, n)|_{n=800} < 0.387$.

Теорема 1.1 влечет за собой следующее утверждение.

Следствие 1. При условии (1.30) справедлива оценка

$$\sqrt{n}\beta_3^{-1}(p)\Delta_n(p) \leq E(p, n),$$

причем для каждого фиксированного $p \in (0, 0.5]$ функция $E(p, n)$ сходится к $\mathcal{E}(p)$, монотонно убывая при $n \geq \max\{200, 4/p\}$.

З а м е ч а н и е 1.3. Согласно следствию 1, при $n \geq 200$ конечная задача сводится к нахождению $M \equiv \max_{p \in [0.02, 0.5]} E(p, 200)$. В виду крайней сложности функции $E(p, n)$ эту цель практически невозможно осуществить без использования компьютера. Для решения задачи применялись два способа, которые дали результаты, отличающиеся друг от друга не более чем на $7 \cdot 10^{-5}$.

Процедура, используемая в п. 7, организована так, что вычисления производятся лишь для одиннадцати значений переменной p . Функция $E(p, 200)$ на каждом из десяти интервалов, образованных выбранными точками, оценивается сверху. При этом используются результаты вычислений в этих точках и свойства монотонности каждой из 23 функций, участвующих в определении $E(p, n)$. В итоге мы получаем оценку $M < 0.421498$, которая формулируется ниже в виде теоремы 1.2.

Альтернативный подход используется в [14, раздел 9]. Была создана программа счета величины M по сетке на промежутке $[0.02, 0.5]$ с шагом 10^{-4} . В результате была получена оценка $M < 0.421421$.

Заметим, что преимуществом первого подхода является значительно меньший объем вычислений.

Теорема 1.2. При $n \geq 200$ имеет место неравенство

$$\max_{p \in [0.02, 0.5]} \sqrt{n} \beta_3^{-1}(p) \Delta_n(p) < 0.4215. \quad (1.33)$$

З а м е ч а н и е 1.4. Для сравнения приведем результат Я. В. Успенского [21, с. 130] относительно точности нормального приближения в схеме Бернулли. Пусть p — вероятность успеха в одном испытании, n — число испытаний, а S_n — число успехов. Тогда при условии

$$npq \geq 25 \quad (1.34)$$

для любых $a < b$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(np + a\sqrt{npq} \leq S_n \leq np + b\sqrt{npq}) &= \Phi(b) - \Phi(a) \\ &+ \frac{q-p}{6\sqrt{npq}} \left[\varphi''(a) - \varphi''(b) \right] + \frac{(1/2 - \theta_1)e^{-a^2/2} + (1/2 - \theta_2)e^{-b^2/2}}{\sqrt{2\pi npq}} + r, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где $\varphi(x) = \Phi'(x)$, θ_1 и θ_2 — дробные части чисел $nq - a\sqrt{npq}$ и $np + b\sqrt{npq}$ соответственно, а r удовлетворяет неравенству

$$|r| < \frac{0.2 + 0.25|p - q|}{npq} + e^{-3\sqrt{npq}/2}.$$

Следовательно, при условии (1.34)

$$\Delta_n(p) \leq \frac{|q - p|}{6\sqrt{2\pi npq}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi npq}} + |r|.$$

Отсюда находим, что при $p \leq 0.5$ и $npq \geq 25$

$$\frac{\sqrt{n}}{\beta_3(p)} \Delta_n(p) < \mathcal{E}(p) + R, \quad (1.36)$$

где $R = |r|\sqrt{npq}/\omega(p)$, $\omega(p)$ — функция, определенная в (1.21).

Мы видим, что оценки (1.31) и (1.36) отличаются только формой остатка и условиями, при которых они выполняются. Очевидно, если $n \geq 200$, то условие (1.34) является более ограничительным по сравнению с (1.30). С другой стороны, в отличие от теоремы 1.1 условие (1.34) допускает значения $n < 200$. Что касается точности сравниваемых оценок, то вычисления показывают, что при $n = 200$ максимум правой части неравенства (1.36) равен $0.4796\dots$. Достигается он в точке $p = 0.382397\dots$, т.е. когда $npq = 47.23\dots$. В то же время максимум правой части оценки (1.31) в силу теоремы 1.2 не превосходит 0.4215 .

Пусть теперь $0 < p < 0.02$. В этом случае при всех $n \geq 1$

$$\sqrt{n}\beta_3^{-1}(p)\Delta_n < 0.369. \quad (1.37)$$

Действительно, так как $\beta_3(p)$ убывает с ростом p и $\beta_3^{-1}(0.02) < 0.145712$, то из оценки (1.5) следует, что при $0 < p < 0.02$

$$\Delta_n(p) < \frac{\beta_3(p)}{\sqrt{n}} (0.34445 + 0.16844 \beta_3^{-1}(0.02)) < 0.368994 \frac{\beta_3(p)}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1.$$

Из теоремы 1.2 и оценки (1.37) получаем следующее неравенство.

Теорема 1.3. Для любых $0 < p \leq 0.5$ и $n \geq 200$

$$\Delta_n(p) \leq 0.4215 \frac{\beta_3(p)}{\sqrt{n}}. \quad (1.38)$$

З а м е ч а н и е 1.5. В 1975 г. Правитц [12] анонсировал следующий результат: для любого распределения F с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным третьим абсолютным моментом β_3

$$\Delta_n \leq \left(C_P \beta_3 + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{c_1 \beta_3^2 + c_2 \beta_3 + c_3}{n-1}, \quad (1.39)$$

где $C_P = 2/(3\sqrt{2\pi}) = \mathcal{E}(0)$, а c_j — некоторые абсолютные константы. По поводу множителя C_P он замечает, что последний не может быть уменьшен. Из (1.39) следует, что

$$\Delta_n \leq \frac{7}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Этот результат позднее получил В. Бенткус [23], [24] в виде неравенства

$$\Delta_n \leq \frac{7}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + c \left(\frac{\beta_3}{\sqrt{n}} \right)^{4/3}. \quad (1.40)$$

Недавно И. Г. Шевцова [22] доказала, что постоянная C_P в неравенстве (1.39) не может быть уменьшена.

Как показывают вычисления, в случае двухточечных распределений

$$\mathcal{E}(p)\beta_3(p) \leq C_P\beta_3(p) + \frac{\tilde{c}}{\sqrt{2\pi}},$$

где $\tilde{c} = 0.3933\dots$. Тогда в силу теоремы 1.1

$$\Delta_n(p) \leq \left(C_P\beta_3(p) + \frac{\tilde{c}}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + O(1/n). \quad (1.41)$$

Нетрудно объяснить причину различия между оценками (1.39) и (1.41). Дело в том, что если разность $f(t) - e^{-t^2/2}$ оценивается в терминах абсолютного третьего момента, то вместо функции Эссеена появляется функция

$$\tilde{\mathcal{E}}(p) = \frac{1}{\beta_3(p)\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\beta_3(p)}{6} + \frac{1}{2\sqrt{pq}} \right).$$

Легко видеть, что

$$\tilde{\mathcal{E}}(p)\beta_3(p) \leq C_P\beta_3(p) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}},$$

где константа $1/(2\sqrt{2\pi})$ не может быть уменьшена. Максимум функции $\tilde{\mathcal{E}}(p)$ достигается в точке $p = 0.5$ и равен $7/(6\sqrt{2\pi})$. Это вполне согласуется с оценкой (1.40). Кроме того, мы можем сделать вывод, что оценка Правитца (1.39) не может быть улучшена, если при оценке разности характеристических функций используется β_3 .

Что касается случая $1 \leq n \leq 200$, то прямые вычисления приводят к оценке

$$\max_{1 \leq n \leq 200} \sup_{0.02 \leq p \leq 0.5} \sqrt{n}\beta_3^{-1}(p)\Delta_n(p) < 0.4096. \quad (1.42)$$

Эта часть исследований будет опубликована в другой нашей работе, совместной с К. В. Михайловым и А. С. Кондриком.

Из теоремы 1.3 и оценки (1.42) вытекает следующий результат.

Теорема 1.4. Для любых $0 < p \leq 0.5$ и $n \geq 1$

$$\Delta_n(p) \leq 0.4215 \frac{\beta_3(p)}{\sqrt{n}}. \quad (1.43)$$

Мы видим, что постоянная в правой части неравенства (1.43) отличается от C_E приблизительно на 0.0118. Это дает основание предполагать с большой долей уверенности, что наименьшая постоянная в неравенстве Берри–Эссеена для класса двухточечных распределений на

самом деле равна C_E . В этой связи уместно упомянуть недавнюю работу [19], где получена неупрощаемая оценка

$$\sup_n \sqrt{n} \Delta_n(0.5) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

(ср. с (1.12)). Кстати, в этой работе метод сглаживания не используется.

Авторы благодарят А. С. Кондрика и К. В. Михайлова, младших научных сотрудников ВЦ ДВО РАН, за помощь в компьютерных вычислениях.

2. Доказательство лемм 1.1, 1.2.

Доказательство леммы 1.1. Можно показать (см., например, [1]), что существует такая точка x_0 , что либо $\delta(x_0+) = \Delta$, либо $-\delta(x_0) = \Delta$. Рассмотрим, например, случай $\delta(x_0+) = \Delta$. Тогда для любого $s > 0$

$$\begin{aligned} \delta(x_0 + s) &= G(x_0 + s) - G_0(x_0 + s) \\ &\geq G(x_0+) - G_0(x_0) + [G_0(x_0) - G_0(x_0 + s)] \geq \Delta - Ds. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (P * \delta)(x_0 + \kappa) &= \int_{-\kappa}^{\kappa} \delta(x_0 + \kappa - y) dP(y) \\ &\geq \int_{-\kappa}^{\kappa} [\Delta - D(\kappa - y)] dP(y) = \Delta - D\kappa. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 1.2. Применяя лемму 1.1 в случае, когда $G(x) = F(x)$, $G_0(x) = \Phi(x/\sqrt{n})$, получаем

$$\Delta_n(p) \leq (P * \delta)(x) + \frac{\kappa}{\sqrt{2\pi n}}. \quad (2.1)$$

Возьмем в качестве $P(x)$ равномерное распределение на $[-\kappa, \kappa]$. Так как $\hat{p}(t) = \sin(t\kappa)/(t\kappa)$, то по формуле обращения

$$(P * \delta)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^n(t) - e^{-t^2 n/2}}{-it} \frac{\sin(t\kappa)}{t\kappa} e^{-itx} dt = \frac{1}{2\pi} I(x, \kappa). \quad (2.2)$$

Заметим, что равенство (2.2) корректно, поскольку интеграл $I(x, \kappa)$ абсолютно сходится. Утверждение леммы 1.2 вытекает из (2.1) и (2.2).

3. Два вспомогательных утверждения.

Лемма 3.1. Пусть случайная величина X имеет двухточечное распределение (1.6). Тогда

$$a = -b \sqrt{\frac{p}{q}}, \quad d = b \sqrt{\frac{q}{p}}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{E} X^k = b^k \frac{q^{k-1} + (-1)^k p^{k-1}}{(pq)^{k/2-1}}, \quad \mathbf{E} |X|^k = b^k \frac{q^{k-1} + p^{k-1}}{(pq)^{k/2-1}}. \quad (3.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенств $p + q = 1$, $aq + dp = 0$ и $a^2q + d^2p = b^2$ следует, что $a/d = -p/q$ и $a^2q/p = b^2$. Отсюда вытекают равенства (3.1) и (3.2).

Мы будем пользоваться следующей леммой о моментах стандартного нормального распределения. Обозначим

$$M_k(m) = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^k e^{-mt^2/2} dt, \quad k > 0, \quad m > 0.$$

Лемма 3.2. Для любых $k > 0$, $m > 0$ и $c > 0$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} M_k(m) &= \mathbf{E} |Y|^k \frac{\sqrt{2\pi}}{m^{(k+1)/2}} \\ &= \frac{1}{m^{(k+1)/2}} \begin{cases} (k-1)!! \sqrt{2\pi}, & \text{если } k \text{ четно,} \\ \left(\frac{k-1}{2}\right)! \cdot 2^{(k+1)/2}, & \text{если } k \text{ нечетно;} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\int_c^{\infty} e^{-mt^2/2} dt \leq \frac{1}{mc} e^{-mc^2/2}, \quad (3.4)$$

$$\int_c^{\infty} \frac{1}{t} e^{-mt^2/2} dt \leq \frac{1}{mc^2} e^{-mc^2/2}, \quad (3.5)$$

$$\int_c^{\infty} \frac{1}{t} e^{-mt^2/2} dt \leq \left(\frac{1}{mc^2} - \frac{2}{(mc^2)^2} + \frac{8}{(mc^2)^3} \right) e^{-mc^2/2}, \quad (3.6)$$

$$\int_c^{\infty} t^3 e^{-mt^2/2} dt = c^4 \left(\frac{1}{mc^2} + \frac{2}{(mc^2)^2} \right) e^{-mc^2/2}, \quad (3.7)$$

$$\int_c^{\infty} t^4 e^{-mt^2/2} dt \leq c^5 \left(\frac{1}{mc^2} + \frac{3}{(mc^2)^2} + \frac{3}{(mc^2)^3} \right) e^{-mc^2/2}. \quad (3.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все соотношения проверяются без труда. Приведем, например, доказательство (3.6). Во-первых,

$$\int_c^{\infty} \frac{1}{t} e^{-mt^2/2} dt = \frac{1}{2} \int_{mc^2/2}^{\infty} \frac{1}{y} e^{-y} dy.$$

Далее, интегрируя три раза по частям, находим, что при $a > 0$

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{y} e^{-y} dy = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{-a} - 6 \int_a^{\infty} \frac{1}{y^4} e^{-y} dy.$$

Отсюда следует (3.6).

4. Доказательство леммы 1.3. Далее мы будем применять обозначения

$$a_j = \frac{\mathbf{E}(X^j - Y^j)}{j!}, \quad \tilde{a}_j = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{j-1}}{(j-1)!} \mathbf{E}[e^{it\theta X} X^j - e^{it\theta Y} Y^j] d\theta. \quad (4.1)$$

Доказательство леммы 1.3. Из формулы Тейлора находим, что для любого $k \geq 3$

$$|f(t) - e^{-t^2/2}| \leq \sum_{j=3}^{k-1} |t|^j |a_j| + |t|^k |\tilde{a}_k|. \quad (4.2)$$

Согласно (1.14), (1.16) и (4.2) с $k = 6$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} |I_1| &\leq \frac{n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t) - e^{-t^2/2}|}{|t|} e^{-(n-1)t^2/2} dt \leq \\ &\leq \frac{n}{2\pi} \left[\sum_{j=3}^5 |a_j| M_{j-1}(n-1) + \left(\frac{\mathbf{E}X^6}{6!} + \frac{1}{48} \right) M_5(n-1) \right]. \end{aligned}$$

В силу (3.3)

$$M_2(m) = \frac{\sqrt{2\pi}}{m^{3/2}}, \quad M_3(m) = \frac{4}{m^2}, \quad M_4(m) = \frac{3\sqrt{2\pi}}{m^{5/2}}, \quad M_5(m) = \frac{16}{m^3}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi} |I_1| \leq n \left[\frac{|a_3|}{\sqrt{2\pi} m^{3/2}} + \frac{2|a_4|}{\pi m^2} + \frac{3|a_5|}{\sqrt{2\pi} m^{5/2}} + \left(\frac{\mathbf{E}X^6}{6!} + \frac{1}{48} \right) \frac{8}{\pi m^3} \right] \Big|_{m=n-1} \quad (4.3)$$

Из формулы Тейлора для $(1+x)^{3/2}$ следует, что

$$\frac{n}{(n-1)^{3/2}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{3}{2(n-1)} + \frac{3}{8(n-1)^2} \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{n|a_3|}{m^{3/2}} \Big|_{m=n-1} &< \frac{|\mathbf{E}X^3|}{6\sqrt{n}} \left(1 + \frac{3}{2m} + \frac{3}{8m^2} \right) \Big|_{m=n-1} \\ &= \frac{|\mathbf{E}X^3|}{6\sqrt{n}} + \frac{\omega_3(p)}{4\sigma m} \left(1 + \frac{1}{4m} \right) \Big|_{m=n-1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Заметим, что в силу (1.11) моменты $\mathbf{E}X^k$ нечетного порядка положительны. Неравенства (4.3), (4.4) и представление (3.2) приводят к (1.20).

Следствие 2. Справедлива оценка

$$\frac{\sqrt{n}|I_1|}{2\pi\beta_3(p)} \leq \frac{\alpha_3(p)}{\beta_3(p)6\sqrt{2\pi}} + r, \quad (4.5)$$

где

$$|r| = \frac{\sqrt{n}}{\beta_3(p)} K_1(p, n), \quad (4.6)$$

причем правая часть (4.6) убывает по n .

5. Доказательство леммы 1.4.**Лемма 5.1.** *При всех $t \in \mathbf{R}$*

$$|f(t)| \leq \exp \left\{ -2pq \sin^2 \frac{t}{2\sqrt{pq}} \right\}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} |f(t)|^2 &= f(t)\overline{f(t)} = (qe^{ita} + pe^{itb})(qe^{-ita} + pe^{-itb}) \\ &= q^2 + p^2 + 2pq \cos[t(b-a)] = 1 - 2pq(1 - \cos[t(b-a)]) \\ &= 1 - 4pq \sin^2 \frac{t(b-a)}{2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Из (3.1) вытекает, что $b-a = 1/\sqrt{pq}$. Утверждение леммы доказано.

Определим $E_5(t) = t^{-5} (e^{-t^2/2} - 1 + t^2/2 - t^4/8)$. С помощью компьютера находим, что $\max_{t \in \mathbf{R}} |E_5(t)| < e_5 \equiv 0.0277905$. Заметим, что $\tilde{a}_5 = \int_0^1 ((1-\theta)^4/4!) \mathbf{E} e^{it\theta X} X^5 d\theta - E_5(t)/i^5$, откуда

$$|\tilde{a}_5| \leq \frac{\beta_5}{5!} + e_5.$$

Лемма 5.2. *Справедливо неравенство*

$$|f(t) - e^{-t^2/2}|^2 \leq \sum_{k=6}^{10} d_k |t|^k, \quad (5.2)$$

где

$$d_6 = a_3^2, \quad d_7 = 2|a_3 a_4|, \quad d_8 = 2|\tilde{a}_5 a_3| + a_4^2, \quad d_9 = 2|a_4 \tilde{a}_5|, \quad d_{10} = |\tilde{a}_5|^2.$$

Доказательство. Согласно (4.2), при $k=5$

$$|f(t) - e^{-t^2/2}| \leq |a_3| |t|^3 + |a_4| t^4 + |\tilde{a}_5| |t|^5.$$

Возводя обе части в квадрат, получаем (5.2).

Лемма 5.3. *Справедлива оценка*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|} |f(t) - e^{-t^2/2}|^2 e^{-(n-2)t^2/2} dt \leq \sum_{k=6}^{10} d_k M_{k-1}(n-2),$$

причем

$$\begin{aligned} M_5(m) &= \frac{16}{m^3}, \quad M_6(m) = \frac{15\sqrt{2\pi}}{m^{7/2}}, \quad M_7(m) = \frac{96}{m^4}, \\ M_8(m) &= \frac{105\sqrt{2\pi}}{m^{9/2}}, \quad M_9(m) = \frac{4! 2^5}{m^5}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 5.2

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|} |f(t) - e^{-t^2/2}|^2 e^{-(n-2)t^2/2} dt &\leq \sum_{k=6}^{10} d_k \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{k-1} e^{-(n-2)t^2/2} dt \\ &= \sum_{k=6}^{10} d_k M_{k-1}(n-2). \end{aligned}$$

Применяя (3.3), приходим к утверждению леммы.

Обозначим

$$S_1(n, p) = \frac{n^{3/2}(n-1)}{4\pi\beta_3(p)}, \quad S_2(n, p) = \frac{n-2}{72pq} S_1(n, p) e(n, p),$$

где $e(n, p)$ — из (1.21).

Лемма 5.4. *Справедлива оценка*

$$\frac{\sqrt{n}}{2\pi\beta_3(p)} |I_2| \leq S_1(n, p) \sum_{k=6}^{10} d_k M_{k-1}(n-2) + S_2(n, p) \sum_{k=6}^{10} d_k M_{k+3}(n-2),$$

причем $M_j(m)$, когда $10 \leq j \leq 13$, удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} M_{10}(m) &= \frac{9!! \sqrt{2\pi}}{m^{11/2}}, & M_{11}(m) &= \frac{5! 2^6}{m^6}, \\ M_{12}(m) &= \frac{11!! \sqrt{2\pi}}{m^{13/2}}, & M_{13}(m) &= \frac{6! 2^7}{m^7}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1.15) и (1.16) вытекает, что

$$|I_2| \leq \sum_{j=0}^{n-2} (j+1) \int_{|t| \leq \tau} \frac{1}{|t|} |f(t) - e^{-t^2/2}|^2 e^{-jt^2/2} |f(t)|^{n-2-j} dt. \tag{5.5}$$

Применяя формулу Тейлора, убеждаемся, что при всех $t \in \mathbf{R}$

$$\sin^2 t = \frac{1}{2} (1 - \cos(2t)) \geq t^2 - \frac{1}{3} t^4. \tag{5.6}$$

Пусть $j = 0, 1, \dots, n-2$. Из леммы 5.1 и неравенства (5.6) следует

$$\begin{aligned} e^{-jt^2/2} |f(t)|^{n-2-j} &\leq \exp \left\{ -\frac{jt^2}{2} - 2(n-2-j)pq \sin^2 \frac{t}{2\sqrt{pq}} \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{jt^2}{2} - 2(n-2-j)pq \left[\left(\frac{t}{2\sqrt{pq}} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{t}{2\sqrt{pq}} \right)^4 \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{(n-2)t^2}{2} + \frac{(n-2-j)t^4}{24pq} \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{(n-2)t^2}{2} \right\} \left(1 + \frac{(n-2-j)t^4}{24pq} \exp \left\{ \frac{n\tau^4}{24pq} \right\} \right). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Учитывая (1.17) и используя обозначение $\zeta(p)$ из (1.21), получаем $n\tau^4/(24pq) = 1/(24(npq)^{1/3}\zeta^2(p))$. Кроме того, поскольку

$$\sum_{j=0}^{n-2} (j+1) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \sum_{j=0}^{n-2} (j+1)(n-2-j) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

то из (5.5) и (5.7) мы выводим неравенство

$$\begin{aligned} |I_2| \leq & \frac{n(n-1)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|} |f(t) - e^{-t^2/2}|^2 e^{-(n-2)t^2} dt \\ & + \frac{n(n-1)(n-2)}{6 \cdot 24pq} \exp \left\{ \frac{1}{24(npq)^{1/3}\zeta^2(p)} \right\} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} |t|^3 |f(t) - e^{-t^2/2}|^2 e^{-(n-2)t^2/2} dt. \end{aligned}$$

Первый интеграл оценен в лемме 5.3. Для оценки второго интеграла воспользуемся леммой 5.2. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^3 |f(t) - e^{-t^2/2}|^2 e^{-(n-2)t^2/2} dt < \sum_{k=6}^{10} d_k M_{k+3}(n-2).$$

В силу (3.3) $M_j(m)$ удовлетворяют равенствам (5.4). Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}}{2\pi\beta_3(p)} |I_2| \leq & \frac{n^{3/2}(n-1)}{4\pi\beta_3(p)} \\ & \times \sum_{k=6}^{10} d_k \left[M_{k-1}(n-2) + \frac{n-2}{72pq} \exp \left\{ \frac{1}{24(npq)^{1/3}\zeta^2(p)} \right\} M_{k+3}(n-2) \right]. \end{aligned}$$

Лемма 5.5. *Справедливы представления*

$$S_1(n, p) \sum_{k=6}^{10} d_k M_{k-1}(n-2) = \frac{1}{\pi\omega(p)} \sum_{k=6}^{10} \frac{\gamma_k A_k(n) V_k(p)}{\sigma^{k-5}}, \quad (5.8)$$

$$S_2(n, p) \sum_{k=6}^{10} d_k M_{k+3}(n-2) = \frac{e(n, p)}{\pi\omega(p)} \sum_{k=6}^{10} \frac{B_k(n) W_k(p)}{\sigma^{k-3}}, \quad (5.9)$$

где γ_k , $A_k(n)$, $V_k(p)$ — из (1.22)–(1.24), а $B_k(n)$ и $W_k(p)$ определены равенствами

$$\begin{aligned} B_k(n) &= A_k(n) \frac{n}{n-2}, \\ W_6(p) &= \frac{2\omega_3^2(p)}{27}, \\ W_7(p) &= \frac{35\sqrt{2\pi}}{2^8 \cdot 3} \omega_3(p) \omega_4(p), \\ W_8(p) &= \frac{5! \cdot 2}{9} \left[\frac{2\tilde{\omega}_5(p) \omega_3(p)}{5! \cdot 3!} + \left(\frac{\omega_4(p)}{4!} \right)^2 \right], \\ W_9(p) &= \frac{77\sqrt{2\pi}}{2^{10} \cdot 3} \tilde{\omega}_5(p) \omega_4(p), \quad W_{10}(p) = \frac{\tilde{\omega}_5^2(p)}{45}. \end{aligned}$$

Доказательство. Детальные вычисления при каждом $k = \overline{6, 10}$ приводят к равенствам

$$\begin{aligned} S_1(n, p) d_k M_{k-1}(n-2) &= \frac{\gamma_k A_k(n) V_k(p)}{\pi \omega(p) (npq)^{(k-5)/2}}, \\ S_2(n, p) d_k M_{k+3}(n-2) &= \frac{e(n, p) B_k(n) W_k(p)}{\pi \omega(p) (npq)^{(k-3)/2}}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 1.4. Оценка (1.27) с

$$K_2(p, n) = \frac{1}{\pi \sigma} \sum_{j=1}^5 \left[\frac{\gamma_{j+5} A_{j+5}(n) V_{j+5}(p)}{\sigma^j} + \frac{e(n, p) B_{j+5}(n) W_{j+5}(p)}{\sigma^{j+2}} \right]$$

следует из лемм 5.4 и 5.5. Так как

$$\begin{aligned} W_6(p) &= \gamma_6 \tilde{\gamma}_6 V_6(p), & W_7(p) &= \gamma_7 \tilde{\gamma}_7 V_7(p), & W_8(p) &= \gamma_8 \tilde{\gamma}_8 V_8(p), \\ W_9(p) &= \gamma_9 \tilde{\gamma}_9 V_9(p), & W_{10}(p) &= \gamma_{10} \tilde{\gamma}_{10} V_{10}(p), \end{aligned}$$

лемма 1.4 доказана. Заключение о монотонности опирается на монотонное убывание функции $A_k(x)$. Неравенство (1.26) эквивалентно (1.27).

Следствие 3. Если $n = 200$, $p = p_0$, то

$$\frac{\sqrt{n}}{2\pi\beta_3(p)} |I_2| < 0.00043516. \quad (5.10)$$

6. Доказательство леммы 1.5. Очевидно, если $\tau \leq \pi\sqrt{pq}$, то

$$|I_3| = \left| \int_{|t|>\tau} v(t) dt \right| \leq 2(I_{30} + I_{31} + I_{32}), \quad (6.1)$$

где

$$\begin{aligned} I_{30} &= \int_{\tau}^{\pi\sqrt{pq}} \frac{1}{t} |f(t)|^n dt, & I_{31} &= \int_{\pi\sqrt{pq}}^{\infty} \frac{|f^n(t) \sin(t\kappa)|}{t^2 \kappa} dt, \\ I_{32} &= \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{t} e^{-nt^2/2} dt. \end{aligned}$$

Если же $\tau > \pi\sqrt{pq}$, то (6.1) верно с $I_{30} = 0$.

Отметим, что в силу (3.5)

$$\frac{1}{\pi} I_{32} \leq \frac{1}{\pi n \tau^2} e^{-n\tau^2/2} = \frac{\zeta(p)}{\pi \sigma^{2/3}} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{2/3}}{2\zeta(p)} \right\}. \quad (6.2)$$

Замечание 6.1. При $p = p_0$ и $n = 200$

$$\frac{\sqrt{n}}{\beta_3(p)\pi} I_{32} < 0.00001894. \quad (6.3)$$

Лемма 6.1. Пусть $\delta > 0$, $n > 0$ и $k \geq 0$. Тогда для любого $A > 0$

$$\int_0^{\pi/2} \exp \left\{ -\frac{n\delta^2}{2} \sin^2 t \right\} t^k \sin t \, dt \leq \frac{\sqrt{2\pi} \mathbf{E} |Y|^{k+1}}{2(\delta\sqrt{n})^{k+2}} + R_1 + R_2, \quad (6.4)$$

где

$$R_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{12(\delta\sqrt{n})^{k+4}} \left(\mathbf{E} |Y|^{k+5} + \frac{e^{A/6}}{12\delta^2 n} \mathbf{E} |Y|^{k+9} \right),$$

$$R_2 = \exp \left\{ -\frac{\delta\sqrt{n}A}{2} + \frac{A}{6} \right\} \int_0^{\pi/2} t^k \sin t \, dt.$$

Доказательство. Пусть $A > 0$. Определим t_n равенством

$$n\delta^2 t_n^4 = A. \quad (6.5)$$

Пусть сначала

$$t_n \equiv \left(\frac{A}{\delta^2 n} \right)^{1/4} \leq \frac{\pi}{2}. \quad (6.6)$$

Из (5.6) и (6.5) вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \int_{t_n}^{\pi/2} \exp \left\{ -\frac{n\delta^2}{2} \sin^2 t \right\} t^k \sin t \, dt \\ & < \exp \left\{ -\frac{n\delta^2}{2} t_n^2 + \frac{n\delta^2}{6} t_n^4 \right\} \int_0^{\pi/2} t^k \sin t \, dt = R_2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из (5.6) также следует, что

$$\int_0^{t_n} \exp \left\{ -\frac{n\delta^2}{2} \sin^2 t \right\} t^k \sin t \, dt < \int_0^{t_n} \exp \left\{ -\frac{n\delta^2}{2} t^2 + \frac{n\delta^2}{6} t^4 \right\} t^{k+1} \, dt.$$

Легко видеть, что при $0 \leq t \leq t_n$

$$\exp \left\{ \frac{n\delta^2}{6} t^4 \right\} \leq 1 + \frac{n\delta^2}{6} t^4 + \left(\frac{n\delta^2}{6} t^4 \right)^2 \frac{e^{A/6}}{2}. \quad (6.8)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_n} \exp \left\{ -\frac{n\delta^2}{2} \sin^2 t \right\} t^k \sin t \, dt < \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{n\delta^2}{2} t^2 \right\} \\ & \times \left(1 + \frac{n\delta^2}{6} t^4 + \left(\frac{n\delta^2}{6} t^4 \right)^2 \frac{e^{A/6}}{2} \right) t^{k+1} \, dt \stackrel{\text{из (3.3)}}{=} \frac{\sqrt{2\pi} \mathbf{E} |Y|^{k+1}}{2(\delta\sqrt{n})^{k+2}} + R_1. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Из (6.7) и (6.9) следует (6.4).

Если условие (6.6) нарушается, то неравенство (6.4) тем более верно. Действительно, в этом случае $\delta^2 n (\pi/2)^4 < A$. Поэтому оценка (6.8) по-прежнему справедлива. Тогда аналогично (6.9) получаем

$$\int_0^{\pi/2} \exp \left\{ -\frac{n\delta^2}{2} \sin^2 t \right\} t^k \sin t \, dt < \frac{\sqrt{2\pi} \mathbf{E} |Y|^{k+1}}{2(\delta\sqrt{n})^{k+2}} + R_1.$$

Следствие 4. Пусть $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $n > 0$. Тогда для любого $A > 0$

$$\int_0^{\pi/2} \exp \left\{ -2npq \sin^2 t \right\} \sin t \, dt \leq \frac{1}{4npq} + R, \quad (6.10)$$

$$\int_0^{\pi/2} \exp \left\{ -2npq \sin^2 t \right\} t^2 \sin t \, dt \leq \frac{1}{8(npq)^2} + \tilde{R}, \quad (6.11)$$

где

$$R = \frac{1}{12(npq)^2} + \frac{1}{12(npq)^3} e^{A/6} + \exp \left\{ -\sqrt{npqA} + \frac{A}{6} \right\},$$

$$\tilde{R} = \frac{1}{8(npq)^3} + \frac{5}{24(npq)^4} e^{A/6} + (\pi - 2) \exp \left\{ -\sqrt{npqA} + \frac{A}{6} \right\}.$$

Доказательство. Полагая $k = 0$ и $k = 2$ в лемме 6.1, для любого $\delta > 0$ получаем

$$\int_0^{\pi/2} \exp \left\{ -\frac{n\delta^2}{2} \sin^2 t \right\} \sin t \, dt \leq \frac{\sqrt{2\pi} \mathbf{E}|Y|}{2\delta^2 n} + R_1 + R_2, \quad (6.12)$$

$$\int_0^{\pi/2} \exp \left\{ -\frac{n\delta^2}{2} \sin^2 t \right\} t^2 \sin t \, dt \leq \frac{\sqrt{2\pi} \mathbf{E}|Y|^3}{2\delta^4 n^2} + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2, \quad (6.13)$$

где

$$R_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{12(\delta\sqrt{n})^4} \left(\mathbf{E}|Y|^5 + \frac{e^{A/6}}{12\delta^2 n} \mathbf{E}|Y|^9 \right),$$

$$R_2 = \exp \left\{ -\frac{\delta\sqrt{nA}}{2} + \frac{A}{6} \right\},$$

$$\tilde{R}_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{12(\delta\sqrt{n})^6} \left(\mathbf{E}|Y|^7 + \frac{e^{A/6}}{12\delta^2 n} \mathbf{E}|Y|^{11} \right),$$

$$\tilde{R}_2 = \exp \left\{ -\frac{\delta\sqrt{nA}}{2} + \frac{A}{6} \right\} (\pi - 2).$$

Положим $\delta^2 = 4pq$. Учитывая, что согласно (3.3)

$$\mathbf{E}|Y| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathbf{E}|Y|^5 = \frac{16}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathbf{E}|Y|^9 = \frac{4! 2^5}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\mathbf{E}|Y|^3 = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathbf{E}|Y|^7 = \frac{3! 2^4}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathbf{E}|Y|^{11} = \frac{5! 2^6}{\sqrt{2\pi}},$$

из (6.12) выводим (6.10), а из (6.13) получаем (6.11).

Лемма 6.2. Пусть $0 \leq x < c$. Тогда для некоторого $0 \leq \theta \leq 1$

$$\frac{1}{(c+x)^2} + \frac{1}{(c-x)^2} = \frac{2}{c^2} + \frac{2x^2}{(c^2 - x^2)^2} + \frac{4\theta x^2 c^2}{(c^2 - x^2)^3}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, можно считать, что $c = 1$. Далее,

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = 2 \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

По теореме Лагранжа для каждого $0 \leq y < 1$ существует такое число $0 \leq \theta_1 \leq 1$, что $1/(1-y)^2 = 1 + 2y/(1-\theta_1 y)^3$. В свою очередь, по y и θ_1 можно найти $0 \leq \theta \leq 1$ такое, что $1/(1-y)^2 = 1 + 2\theta y/(1-y)^3$. Следовательно,

$$\frac{1}{(1-x^2)^2} = 1 + \frac{2\theta x^2}{(1-x^2)^3}, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

откуда

$$\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = 1 + \frac{2\theta x^2}{(1-x^2)^3} + \frac{x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Лемма 6.3. При любых $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$

$$\begin{aligned} I_{31} &< \frac{1}{12\sigma^2} + \left(\frac{1}{36} + \frac{\mu}{8}\right) \frac{1}{\sigma^4} + \left(\frac{1}{36} e^{A_1/6} + \frac{\mu}{8}\right) \frac{1}{\sigma^6} + \frac{5\mu}{24} e^{A_2/6} \frac{1}{\sigma^8} \\ &+ \frac{1}{3} \exp\left\{-\sigma\sqrt{A_1} + \frac{A_1}{6}\right\} + (\pi-2)\mu \exp\left\{-\sigma\sqrt{A_2} + \frac{A_2}{6}\right\}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}}{\beta_3(p)\pi} I_{31} &< \frac{1}{\omega(p)\pi} \left\{ \frac{1}{12\sigma} + \left(\frac{1}{36} + \frac{\mu}{8}\right) \frac{1}{\sigma^3} + \left(\frac{1}{36} e^{A_1/6} + \frac{\mu}{8}\right) \frac{1}{\sigma^5} + \frac{5\mu}{24} e^{A_2/6} \frac{1}{\sigma^7} \right. \\ &+ \frac{\sigma}{3} \exp\left\{-\sigma\sqrt{A_1} + \frac{A_1}{6}\right\} \\ &\left. + \sigma(\pi-2)\mu \exp\left\{-\sigma\sqrt{A_2} + \frac{A_2}{6}\right\} \right\}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

где $\mu = (3\pi^2 - 16)/\pi^4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем I_{31} в виде

$$I_{31} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi\sqrt{pq}}^{(2k+1)\pi\sqrt{pq}} \frac{|f^n(t) \sin(t\kappa)|}{t^2 \kappa} dt.$$

Делая замену переменной $x = t/(2\sqrt{pq}) - k\pi$ и учитывая, что $\kappa = 1/(2\sqrt{pq})$, получаем

$$\int_{(2k-1)\pi\sqrt{pq}}^{(2k+1)\pi\sqrt{pq}} \frac{|f^n(t) \sin(t\kappa)|}{t^2 \kappa} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f((x+k\pi)2\sqrt{pq})|^n \frac{|\sin x|}{(x+k\pi)^2} dx.$$

В силу (5.1) $|f(t)|$ — периодическая функция с периодом $2\pi\sqrt{pq}$. Следовательно, с учетом леммы 5.1,

$$I_{31} < \sum_{k=1}^{\infty} L_k,$$

где

$$L_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp\{-2\sigma^2 \sin^2 x\} \frac{|\sin x|}{(x + k\pi)^2} dx.$$

Очевидно, что

$$L_k = \int_0^{\pi/2} \exp\{-2\sigma^2 \sin^2 x\} \sin x \left(\frac{1}{(k\pi + x)^2} + \frac{1}{(k\pi - x)^2} \right) dx.$$

Применяя лемму 6.2, получаем

$$L_k = \int_0^{\pi/2} \exp\{-2\sigma^2 \sin^2 x\} \sin x \left(\frac{2}{(k\pi)^2} + \frac{2x^2}{[(k\pi)^2 - x^2]^2} + \frac{4\theta x^2 (k\pi)^2}{[(k\pi)^2 - x^2]^3} \right) dx,$$

откуда

$$I_{31} < \mu_1 \int_0^{\pi/2} \exp\{-2\sigma^2 \sin^2 x\} \sin x dx + \mu_2 \int_0^{\pi/2} \exp\{-2\sigma^2 \sin^2 x\} x^2 \sin x dx,$$

где

$$\mu_1 = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \mu_2 = \frac{2}{\pi^4} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - 1/4)^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - 1/4)^3} \right).$$

Известно, что $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ [25, с. 651, подраздел 5.1.2], $\sum_{k=1}^{\infty} 1/[k^2 - 1/4]^2 = \pi^2 - 8$ [25, с. 687, подраздел 5.1.25, п. 25], $\sum_{k=1}^{\infty} k^2/[k^2 - 1/4]^3 = \pi^2/4$ [25, с. 688, подраздел 5.1.25, п. 38].

Следовательно,

$$\mu_1 = \frac{1}{3}, \quad \mu_2 = \frac{3\pi^2 - 16}{\pi^4}.$$

Применяя оценки (6.10) и (6.11), приходим к (6.14) и (6.15).

Следствие 5. При $p = p_0$, $n = 200$

$$\frac{\sqrt{n}}{\pi\beta_3(p)} I_{31} < 0.00749458. \quad (6.16)$$

Доказательство. Фиксируем $p = p_0$, $n = 200$. Минимизируя

$$e^{A_1/6} \left(\frac{1}{36\sigma^6} + \frac{1}{3} e^{-\sigma\sqrt{A_1}} \right) \quad \text{и} \quad e^{A_2/6} \left(\frac{5}{24\sigma^8} + (\pi - 2) e^{-\sigma\sqrt{A_2}} \right)$$

по A_1 и A_2 соответственно, выбираем $A_1 = 5.405$ и $A_2 = 7.521$. Применяя оценку (6.15) с этими константами, приходим к утверждению следствия.

Лемма 6.4. Пусть выполнено условие (1.30). Тогда для любого A_3 , удовлетворяющего условию

$$0 < A_3 \leq 5.4, \quad (6.17)$$

справедливо неравенство

$$\begin{aligned} I_{30} < \exp \left\{ -\sigma \sqrt{A_3} + \frac{A_3}{6} \right\} \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\pi^4 \sigma^2}{4A_3} \right) \\ + \exp \left\{ -\frac{\sigma^{2/3}}{2\zeta(p)} \right\} \left[\frac{\zeta(p)}{\sigma^{2/3}} + e^{A_3/6} \frac{1 + \chi(p, n)}{24 \zeta(p) \sigma^{4/3}} \right], \end{aligned} \quad (6.18)$$

где $\chi(p, n)$ — функция из (1.28).

Доказательство. Применяя лемму 5.1, получаем

$$I_{30} < \int_{\tau}^{\pi \sqrt{pq}} \exp\{-2\sigma^2 \sin^2(t\kappa)\} \frac{dt}{t} = \int_{\tau\kappa}^{\pi/2} \exp\{-2\sigma^2 \sin^2 x\} \frac{dx}{x}.$$

Определим t_n формулой (6.5) с $\delta = 1/\kappa = 2\sqrt{pq}$ и $A = A_3$. Так как $np \geq 4$, $A_3 \leq 5.4$ и $q \geq 0.5$, то $t_n = (A_3/(4npq))^{1/4} \leq (5.4/(16q))^{1/4} < 1 < \pi/2$. Аналогично (6.7),

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{\pi/2} \exp\{-2\sigma^2 \sin^2 x\} \frac{dx}{x} &\leq \exp\{-2\sigma^2 \sin^2 t_n\} \int_{t_n}^{\pi/2} \frac{dx}{x} \\ &\leq \exp \left\{ -2\sigma^2 t_n^2 + \frac{2\sigma^2}{3} t_n^4 \right\} \ln \frac{\pi}{2t_n} \\ &= \exp \left\{ -\sigma \sqrt{A_3} + \frac{A_3}{6} \right\} \frac{1}{4} \ln \frac{\pi^4 \sigma^2}{4A_3} \equiv L. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Предположим, что $\tau\kappa \leq t_n$. Применяя (5.6), приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \int_{\tau\kappa}^{t_n} \exp\{-2\sigma^2 \sin^2 x\} \frac{dx}{x} &\leq \int_{\tau\kappa}^{t_n} \exp \left\{ -2\sigma^2 x^2 + \frac{2\sigma^2}{3} x^4 \right\} \frac{dx}{x} \\ &\leq \int_{\tau\kappa}^{\infty} \exp\{-2\sigma^2 x^2\} \left(1 + e^{A_3/6} \frac{2\sigma^2}{3} x^4 \right) \frac{dx}{x}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Из (3.6) и равенства $(2\sigma\tau\kappa)^2 = \frac{\sigma^{2/3}}{\zeta(p)}$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{\tau\kappa}^{\infty} e^{-2\sigma^2 x^2} \frac{dx}{x} &< \left(\frac{1}{(2\sigma\tau\kappa)^2} - \frac{2}{(2\sigma\tau\kappa)^4} + \frac{8}{(2\sigma\tau\kappa)^6} \right) \exp\{-2\sigma^2(\tau\kappa)^2\} \\ &= \left(\frac{\zeta(p)}{\sigma^{2/3}} - \frac{2\zeta^2(p)}{\sigma^{4/3}} + \frac{8\zeta^3(p)}{\sigma^2} \right) \exp \left\{ -\frac{\sigma^{2/3}}{2\zeta(p)} \right\}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

В свою очередь, из (3.7) вытекает, что

$$\begin{aligned} & e^{A_3/6} \frac{2\sigma^2}{3} \int_{\tau\kappa}^{\infty} e^{-2\sigma^2 x^2} x^3 dx \\ &= e^{A_3/6-2(\sigma\tau\kappa)^2} \frac{2\sigma^2(\tau\kappa)^4}{3} \left(\frac{1}{(2\sigma\tau\kappa)^2} + \frac{2}{(2\sigma\tau\kappa)^4} \right) \\ &= e^{A_3/6} \left(\frac{1}{24\sigma^{4/3}\zeta(p)} + \frac{1}{12\sigma^2} \right) \exp \left\{ -\frac{\sigma^{2/3}}{2\zeta(p)} \right\}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Из (6.19)–(6.22) мы получаем оценку

$$\begin{aligned} & \int_{\tau\kappa}^{\pi/2} \exp\{-2\sigma^2 \sin^2 x\} \frac{dx}{x} \\ & \leq L + \left[\frac{\zeta(p)}{\sigma^{2/3}} - \frac{2\zeta^2(p)}{\sigma^{4/3}} + \frac{8\zeta^3(p)}{\sigma^2} + e^{A_3/6} \left(\frac{1}{24\sigma^{4/3}\zeta(p)} + \frac{1}{12\sigma^2} \right) \right] \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{\sigma^{2/3}}{2\zeta(p)} \right\}. \end{aligned}$$

При $0.085 \leq p \leq 0.5$, $n \geq 200$ и условию (6.17) функция $-2\zeta^2(p)/\sigma^{4/3} + 8\zeta^3(p)/\sigma^2 + e^{A_3/6}(12\sigma^2)^{-1}$ отрицательна. Тем самым, оценка (6.18) доказана при $\tau\kappa \leq t_n$, $0.085 \leq p \leq 0.5$.

Пусть $4/n \leq p < 0.085$. Теперь для интеграла $\int_{\tau\kappa}^{\infty} e^{-2\sigma^2 x^2}/x dx$ вместо (3.6) (см. (6.21)) применим более простую оценку (3.5). В результате,

$$\int_{\tau\kappa}^{\infty} e^{-2\sigma^2 x^2} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{(2\sigma\tau\kappa)^2} e^{-2(\sigma\tau\kappa)^2} = \frac{\zeta(p)}{\sigma^{2/3}} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{2/3}}{2\zeta(p)} \right\}. \quad (6.23)$$

Из (6.19), (6.20), (6.22) и (6.23) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\tau\kappa}^{\pi/2} \exp\{-2\sigma^2 \sin^2 x\} \frac{dx}{x} \\ & \leq L + \left[\frac{\zeta(p)}{\sigma^{2/3}} + e^{A_3/6} \left(\frac{1}{24\sigma^{4/3}\zeta(p)} + \frac{1}{12\sigma^2} \right) \right] \exp \left\{ -\frac{\sigma^{2/3}}{2\zeta(p)} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к (6.18) при $4/n \leq p < 0.085$.

В случае $\tau\kappa > t_n$ задача оценки интеграла $\int_{\tau\kappa}^{t_n}$ не возникает и поэтому неравенство (6.18) тем более верно.

Следствие 6. При $p = p_0$, $n = 200$

$$\frac{\sqrt{n}}{\beta_3(p)\pi} I_{30} < 0.0000343. \quad (6.24)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $p = p_0$, $n = 200$. Минимизируя функцию

$$\exp \left\{ -\sigma\sqrt{A_3} + \frac{A_3}{6} \right\} \frac{1}{4} \ln \frac{\pi^4 \sigma^2}{4A_3} + \exp \left\{ -\frac{\sigma^{2/3}}{2\zeta(p)} \right\} e^{A_3/6} \frac{1}{24\zeta(p)\sigma^{4/3}}$$

по аргументу A_3 , выберем $A_3 = 5.233$. В результате вычислений, из леммы 6.4 получаем утверждение следствия.

Доказательство леммы 1.5. При условии (1.30) утверждение леммы 1.5 следует из (6.1), (6.2), (6.14) и (6.18) с $A_1 = 5.405$, $A_2 = 7.521$ и $A_3 = 5.233$.

Заметим, что условие (1.30) эквивалентно выполнению неравенств $n \geq \max\{200, 4/p\}$, $p \leq 0.5$. Тогда из (1.29) следует, что для каждого фиксированного $p \in (0, 0.5]$ функция $\sqrt{n}K_3(p, n)/\beta_3(p)$ монотонно убывает по n , удовлетворяющим (1.30).

7. Доказательство теоремы 1.2. Обозначим $p_4 = 0.2113248 \dots$ и $p_6 = 0.2879 \dots$ — корни уравнений

$$\omega_4(p) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dp} \frac{\omega_6(p)}{\omega(p)(pq)^{3/2}} = 0$$

соответственно.

В следующих трех леммах указываются интервалы монотонности по p слагаемых, из которых состоят функции $\sqrt{n}K_i(p, n)/\beta_3(p)|_{n=200}$, $i = 1, 2, 3$.

Лемма 7.1. *Справедливо представление*

$$\frac{\sqrt{n}}{\beta_3(p)} K_1(p, n) = \sum_{i=1}^4 b_{1i}(n) J_{1i}(p), \quad (7.1)$$

где

$$\begin{aligned} J_{11}(p) &= \frac{\omega_3(p)}{\omega(p)}, & J_{12}(p) &= \frac{\omega_4(p)}{\omega(p)\sqrt{pq}}, \\ J_{13}(p) &= \frac{\omega_5(p)}{\omega(p)pq}, & J_{14}(p) &= \frac{\omega_6(p)}{\omega(p)(pq)^{3/2}}, \end{aligned}$$

$$b_{11}(n) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}(n-1)} \left(1 + \frac{1}{4(n-1)}\right), \quad b_{12}(n) = \frac{1}{12\pi\sqrt{n}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^2,$$

$$b_{13}(n) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}n} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{5/2}, \quad b_{14}(n) = \frac{1}{90\pi n^{3/2}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^3.$$

Функции $J_{11}(p)$ и $J_{13}(p)$ убывают на $(0, 0.5]$. Функции $J_{12}(p)$ и $J_{14}(p)$ убывают на $[0.02, p_4]$. Подынтервалы монотонности $J_{12}(p)$ и $J_{14}(p)$ на $[p_4, 0.5]$ указаны в табл. 7.2.

Таблица 7.1

	$J_{12}(p)$	$J_{14}(p)$
$[p_4, p_6]$	$\nearrow$	$\searrow$
$[p_6, 0.5]$	$\nearrow$	$\nearrow$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
J_{21}(p) &= \frac{\omega_3^2(p)}{\beta_3(p)pq} = \frac{\omega_3^2(p)}{\omega(p)\sqrt{pq}}, \\
J_{22}(p) &= \frac{\omega_3(p)\omega_4(p)}{\beta_3(p)(pq)^{3/2}} = \frac{\omega_3(p)\omega_4(p)}{\omega(p)pq}, \\
J_{23}(p) &= \frac{1}{\omega(p)(pq)^{3/2}} \left[\frac{2\omega_3(p)\tilde{\omega}_5(p)}{5!3!} + \left(\frac{\omega_4(p)}{4!} \right)^2 \right], \\
J_{24}(p) &= \frac{\omega_4(p)\tilde{\omega}_5(p)}{\beta_3(p)(pq)^{5/2}} = \frac{\omega_4(p)\tilde{\omega}_5(p)}{\omega(p)(pq)^2}, \\
J_{25}(p) &= \frac{(\tilde{\omega}_5(p))^2}{\beta_3(p)(pq)^3} = \frac{(\tilde{\omega}_5(p))^2}{\omega(p)(pq)^{5/2}}, \\
\tilde{J}_{2i}(p, n) &= J_{2i}(p) \frac{e(n, p)}{pq}, \quad i = \overline{1, 5},
\end{aligned}$$

функция $e(n, p)$ определена в (1.21). Обозначим также

$$p_{22} = 0.3304\dots, \quad \tilde{p}_{22} = 0.31802\dots$$

— корни уравнений $\frac{d}{dp} J_{22}(p) = 0$ и $\frac{d}{dp} \tilde{J}_{22}(p, 200) = 0$ соответственно.

Лемма 7.2. *Справедливо представление*

$$\frac{\sqrt{n}}{\beta_3(p)} K_2(p, n) = \sum_{i=1}^5 (b_{2i}(n) J_{2i}(p) + \tilde{b}_{2i}(n) \tilde{J}_{2i}(p, n)), \quad (7.2)$$

где

$$b_{2i}(n) = \frac{\gamma_{i+5} A_{i+5}(n)}{\pi n^{i/2}}, \quad \tilde{b}_{2i}(n) = b_{2i}(n) \frac{\tilde{\gamma}_{i+5}}{n-2}.$$

На интервале $(0, p_4]$ все функции $J_{2i}(p)$ и $\tilde{J}_{2i}(p, 200)$, $i = \overline{1, 5}$, положительны и убывают.

На интервале $[p_4, 0.5]$ функции $J_{2i}(p)$ и $\tilde{J}_{2i}(p, 200)$ убывают, если i нечетно. Подынтервалы монотонности для $J_{2i}(p)$ и $\tilde{J}_{2i}(p, 200)$ при $i = 2, 4$ указаны в таблице 7.2.

Таблица 7.2

	$J_{22}(p)$	$J_{24}(p)$	$\tilde{J}_{22}(p, 200)$	$\tilde{J}_{24}(p, 200)$
$[p_4, \tilde{p}_{22}]$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$[\tilde{p}_{22}, p_{22}]$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
$[p_{22}, 0.5]$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Введем обозначения

$$J_{31}(p) = \frac{1}{\omega(p)\sqrt{pq}}, \quad J_{32}(p) = \frac{1}{\omega(p)(pq)^{3/2}},$$

$$\begin{aligned}
J_{33}(p) &= \frac{1}{\omega(p)(pq)^{5/2}}, & J_{34}(p) &= \frac{1}{\omega(p)(pq)^{7/2}}, \\
\tilde{J}_{31}(p, n) &= \frac{\sqrt{npq}}{\omega(p)} e^{-\sqrt{A_1 npq}}, & \tilde{J}_{32}(p, n) &= \frac{\sqrt{npq}}{\omega(p)} e^{-\sqrt{A_2 npq}}, \\
\tilde{J}_{33}(p, n) &= \frac{\sqrt{npq}}{\omega(p)} e^{-\sqrt{A_3 npq}} \ln \frac{\pi^4 npq}{4A_3}, \\
\tilde{J}_{34}(p, n) &= \exp \left\{ -\frac{(npq)^{1/3}}{2\zeta(p)} \right\} \frac{(npq)^{1/6} \zeta(p)}{\omega(p)}, \\
\tilde{J}_{35}(p, n) &= \frac{\sqrt{n}}{\beta_3(p)} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{2/3}}{2\zeta(p)} \right\} \frac{1 + \chi(p, n)}{\zeta(p) \sigma^{4/3}} \\
&= \exp \left\{ -\frac{(npq)^{1/3}}{2\zeta(p)} \right\} \frac{1}{\omega(p) \zeta(p) (npq)^{1/6}} \\
&\quad \times \begin{cases} 1 + \frac{2\zeta(p)}{(npq)^{1/3}}, & \text{если } 0 < p < 0.085, \\ 1, & \text{если } 0.085 \leq p \leq 0.5. \end{cases}
\end{aligned}$$

Лемма 7.3. *Справедливо представление*

$$\frac{\sqrt{n}}{\beta_3(p)} K_3(p, n) = \sum_{i=1}^4 b_{3i}(n) J_{3i}(p) + \sum_{i=1}^5 \tilde{b}_{3i} \tilde{J}_{3i}(p, n), \quad (7.3)$$

где

$$\begin{aligned}
b_{31}(n) &= \frac{1}{12\pi\sqrt{n}}, & b_{32}(n) &= \left(\frac{1}{36} + \frac{\mu}{8} \right) \frac{1}{\pi n^{3/2}}, \\
b_{33}(n) &= \left(\frac{1}{36} e^{A_1/6} + \frac{\mu}{8} \right) \frac{1}{\pi n^{5/2}}, & b_{34}(n) &= \frac{5\mu}{24\pi n^{7/2}} e^{A_2/6}, \\
\tilde{b}_{31} &= \frac{e^{A_1/6}}{3\pi}, & \tilde{b}_{32} &= \mu e^{A_2/6} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right), & \tilde{b}_{33} &= \frac{e^{A_3/6}}{4\pi}, & \tilde{b}_{34} &= \frac{2}{\pi}, & \tilde{b}_{35} &= \frac{e^{A_3/6}}{24\pi}.
\end{aligned}$$

Функции $J_{3i}(p)$, $i = \overline{2, 4}$, и $\tilde{J}_{3i}(p, 200)$, $i = \overline{1, 5}$, убывают на интервале $(0, 0.5]$. Функция $J_{31}(p)$ убывает при $p \in (0, p_4]$, возрастает при $p \in (p_4, 0.5]$.

Доказательства лемм 7.1–7.3 не приводятся. Дело в том что равенства (7.1)–(7.3) непосредственно вытекают из (1.19), (1.25) и (1.29) соответственно. Утверждения о монотонности функций $J_{ki}(p)$, $k = 1, 2, 3$, и $\tilde{J}_{mi}(p, 200)$, $m = 2, 3$, проверяются с помощью стандартного, хотя и громоздкого, анализа.

Множество всех функций $J_{ki}(p)$, $k = 1, 2, 3$, и $\tilde{J}_{mi}(p, 200)$, $m = 2, 3$, разобьем на два подмножества:

$$\begin{aligned}
J_{1i}(p), & \quad i = 1, 3, & J_{2i}(p), \tilde{J}_{2i}(p, 200), & \quad i = 1, 3, 5, \\
J_{3i}(p), & \quad i = 2, 3, 4, & \tilde{J}_{3i}(p, 200), & \quad i = \overline{1, 5},
\end{aligned} \quad (7.4)$$

и

$$J_{12}(p), \quad J_{14}(p), \quad J_{22}(p), \quad J_{24}(p), \quad \tilde{J}_{22}(p, 200), \quad \tilde{J}_{24}(p, 200), \quad J_{31}(p) \quad (7.5)$$

Из лемм 7.1 – 7.3 вытекает следующее утверждение.

Лемма 7.4. *Функции из (7.4) являются убывающими на $[0.02, 0.5]$. Функции из (7.5) убывают на $[0.02, p_4]$. Их поведение при $p \in [p_4, 0.5]$ с точки зрения монотонности указано в таблице 7.3.*

Таблица 7.3

	$J_{12}(p)$	$J_{14}(p)$	$J_{22}(p)$	$J_{24}(p)$	$\tilde{J}_{22}(p, 200)$	$\tilde{J}_{24}(p, 200)$	$J_{31}(p)$
$[p_4, p_6]$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$[p_6, \tilde{p}_{22}]$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$[\tilde{p}_{22}, p_{22}]$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$[p_{22}, 0.5]$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Далее мы будем использовать следующее простое неравенство: если $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает на $[a, b]$, то

$$\sup_{a \leq x \leq b} (f(x) + g(x)) \leq f(b) + g(a). \quad (7.6)$$

З а м е ч а н и е 7.1. Пусть $[a, b]$ — такой промежуток, на котором функции из (7.4) и (7.5) монотонны. Кроме того, пусть $\mathcal{E}(p)$ возрастает на $[a, b]$. Тогда $E(p, 200)$ можно представить в виде

$$E(p, 200) = \mathcal{E}(p) + R_{01}(p) + R_{02}(p), \quad (7.7)$$

где $R_{01}(p)$ возрастает, а $R_{02}(p)$ убывает. Из (7.6) и (7.7) следует, что

$$\max_{a \leq p \leq b} E(p, 200) \leq \mathcal{E}(b) + R_{01}(b) + R_{02}(a). \quad (7.8)$$

Используя этот метод, мы построим разбиение отрезка $[0.02, 0.5]$ на подотрезки, для каждого из которых будет выполнено неравенство $E(p, 200) < 0.4215$. Заметим, что $E(p_0, 200) < 0.421373$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned} \Pi(p) = \sum_{i=2,4} \left[(b_{1i}(200)J_{1i}(p) + b_{2i}(200)J_{2i}(p) + \tilde{b}_{2i}(200)\tilde{J}_{2i}(p, 200)) \right] \\ + b_{31}(200)J_{31}(p). \end{aligned}$$

Заметим, что $\Pi(p)$ является той частью остатка $R_0(p, 200)$, определенного в (1.32), которая содержит в своей записи функции из списка (7.5). Она играет основную роль при формировании функции $R_{01}(p)$ из (7.7).

Лемма 7.5. Пусть

$$R_0(p, 200) = R_{01}(p) + R_{02}(p),$$

где $R_{01}(p)$ возрастает, а $R_{02}(p)$ убывает. Тогда для промежутков из табл. 7.3 вид $R_{01}(p)$ определяется в табл. 7.4.

Таблица 7.4

	$R_{01}(p)$
$[p_4, p_6]$	$\Pi(p) - b_{14}(200)J_{14}(p)$
$[p_6, \tilde{p}_{22}]$	$\Pi(p)$
$[\tilde{p}_{22}, p_{22}]$	$\Pi(p) - \tilde{b}_{22}(200)\delta\tilde{J}_{22}(p, 200)$
$[p_{22}, 0.5]$	$\Pi(p) - \tilde{b}_{22}(200)\delta\tilde{J}_{22}(p, 200) - b_{22}(200)J_{22}(p)$

Доказательство. Утверждение следует из определения (1.32), лемм 7.1–7.3 и табл. 7.3.

Доказательство теоремы 1.2. В силу теоремы 1.1 функция $E(p, n)$ убывает по n . Поэтому достаточно рассмотреть случай $n = 200$. Докажем, что

$$\max_{p \in (0.02, 0.5]} E(p, 200) < 0.421498. \quad (7.9)$$

Из леммы 7.4 и свойств функции Эссеена $\mathcal{E}(p)$ (см. замечание 1.1 и рис. 1.1) следует, что на каждом из пяти промежутков: $[0.02, p_4]$, $[p_4, p_6]$, $[p_6, \tilde{p}_{22}]$, $[p_{22}, p_0]$ и $[p_0, 0.5]$ функции из (7.4), (7.5), а также функция $\mathcal{E}(p)$ монотонны. Дальнейшая процедура состоит в следующем. Если на каком-либо из указанных отрезков $\mathcal{E}(p)$ возрастает, то применяется неравенство (7.8). Если же $\mathcal{E}(p)$ убывает, то применяется следующее неравенство: при $p \in [a, b] \subset [p_0, 0.5]$

$$E(p, 200) \leq \mathcal{E}(a) + R_{01}(b) + R_{02}(a). \quad (7.10)$$

Заметим, что эта оценка, как и (7.8), вытекает из (7.6). Однако, как показывают вычисления, для некоторых отрезков правые части неравенств (7.8) и (7.10) могут превосходить 0.4215. Такие отрезки мы вынуждены дробить дополнительно.

Пусть $p \in [0.02, p_0]$. Верхние оценки величин $\mathcal{E}(b)$, $R_{01}(b)$, $R_{02}(a)$ в случае $[a, b] \subset [0.02, p_0]$ собраны в табл. 7.5.

В последнем столбце табл. 7.5 находятся оценки величин $\max_{p \in [a, b]} E(p, 200)$, а более точно, — верхние оценки правой части неравенства (7.8). Эти итоговые значения получаются в результате суммирования элементов соответствующих строк.

Таблица 7.5 Случай $p \in [0.02, p_0]$

$[a, b]$	$\mathcal{E}(b)$	$R_{01}(b)$	$R_{02}(a)$	$\max_{p \in [a, b]} E(p, 200)$
$[0.02, 0.05]$	0.286534	0	0.118956	0.40549
$[0.05, p_4]$	0.35679	0	0.047287	0.40408
$[p_4, p_6]$	0.385943	0.0088354	0.00453667	0.399316
$[p_6, \tilde{p}_{22}]$	0.395019	0.009496	0.002546	0.407062
$[\tilde{p}_{22}, p_{22}]$	0.398256	0.009735	0.001983	0.409975
$[p_{22}, 0.39]$	0.40844	0.010526	0.001966	0.420933
$[0.39, 0.41]$	0.409608	0.0107794	0.0011003	0.421488
$[0.41, p_0]$	0.409733	0.0108775	0.0008611	0.421472

Пусть $p \in [p_0, 0.5]$. В этом случае $\mathcal{E}(p)$ убывает и вместо (7.8) справедливо неравенство (7.10). Результаты вычислений помещены в табл. 7.6.

Таблица 7.6 Случай $p \in [p_0, 0.5]$

$[a, b]$	$\mathcal{E}(a)$	$R_{01}(b)$	$R_{02}(a)$	$\max_{p \in [a, b]} E(p, 200)$
$[p_0, 0.43]$	0.409733	0.0109876	0.0007638	0.421485
$[0.43, 0.5]$	0.409533	0.0113155	0.0006493	0.421498

Сравнивая между собой значения в последних столбцах табл. 7.5 и 7.6, приходим к неравенству (7.9), что завершает доказательство теоремы 1.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berry A. C.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, v. 49, p. 122–136.
2. *Esseen C.-G.* On the Liapounoff limit of error in the theory of probability. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. 28A, № 9, p. 1–19.
3. *Bergström H.* On the central limit theorem in the case of not equally distributed random variables. — Skand. Aktuarietidskr., 1949, v. 3, p. 37–62.
4. *Takano K.* A remark to a result of A. C. Berry. — Res. Mem. Inst. Statist. Math., 1951, v. 6, № 9, p. 408–415.
5. *Золотарев В. М.* Абсолютная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 1, с. 108–119.
6. *Zahl S.* Bounds for the central limit theorem error. — SIAM J. Appl. Math., 1966, v. 14, № 6, p. 1225–1245.
7. *Золотарев В. М.* Некоторые неравенства теории вероятностей и их применение к уточнению теоремы А. М. Ляпунова. — Доклады Академии наук СССР, 1967, т. 177, № 3, с. 501–504.
8. *Zolotarev V. M.* A sharpening of the inequality of Berry–Esseen. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1967, v. 8, p. 332–342.

9. *van Beek P.* An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry–Esseen inequality. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1972, v. 23, p. 187–196.
10. *Шуганов И. С.* Об уточнении верхней оценки константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. — *Проблемы устойчивости стохастических моделей*. М.: ВНИИСИ, 1982, с. 109–115.
11. *Шевцова И. Г.* Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, т. 51, в. 3, с. 622–626.
12. *Prawitz H.* On the remainder in the central limit theorem. Part I. One-dimensional independent variables with finite absolute moments of third order. — *Scand. Actuar. J.*, 1975, v. 3, p. 145–156.
13. *Чистяков Г. П.* Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. I–III. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, т. 46, в. 2, с. 326–344; 2001, в. 3, с. 573–579; 2002, т. 47, в. 3, с. 475–497.
14. *Нагаев С. В., Чеботарев В. И.* Об оценке близости биномиального распределения к нормальному. Препринт 2009/142. Хабаровск: Вычислительный центр ДВО РАН, 2009.
15. *Королев В. Ю., Шевцова И. Г.* О верхней оценке абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, т. 54, в. 4, с. 671–695.
16. *Esseen C.-G.* A moment inequality with an application to the central limit theorem. — *Skand. Aktuarietidskr.*, 1956, v. 39, p. 160–170.
17. *Esseen C.-G.* Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. — *Acta Math.*, 1945, v. 77, p. 1–125.
18. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.–Л.: Гостехиздат, 1949, 264 с.
19. *Hipp C., Mattner L.* On the normal approximation to symmetric binomial distributions. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, т. 52, в. 3, с. 610–617.
20. *Шевцова И. Г.* О неравенстве сглаживания. — *Докл. РАН*, 2010, т. 430, № 5, с. 600–602.
21. *Uspensky J. V.* Introduction to Mathematical Probability. New York: McGraw Hill, 1937, 411 p.
22. *Шевцова И. Г.* Нижняя асимптотически правильная постоянная в центральной предельной теореме. — *Докл. РАН*, 2010, т. 430, № 4, с. 466–469.
23. *Bentkus V.* On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality. Preprint 91-078, Universität Bielefeld, 1991.
24. *Bentkus V.* On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality. — *J. Theoret. Probab.*, 1994, v. 7, № 2, p. 211–224.
25. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука. 1981, 798 с.

Поступила в редакцию
23.VIII.2010