УДК 517.98 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
DOI: 10.33048/mattrudy.2021.24.208 2021, том 24, № 2, 122–149

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНОВСКИМ ЗАКОНОМ

С. В. Нагаев

Выводится ряд новых оценок близости биномиального распределения к пуассоновскому в равномерной метрике. Предлагается комбинированный подход к оцениванию расстояния в равномерной метрике, когда для небольших n и больших p оценивание производится с помощью компьютера, а при остальных значениях n и p используются оценки, полученные аналитически.

Ключевые слова и фразы: арифметическая функция распределения, бернуллиевы случайные величины, комплексный анализ, производящая функция, пуассоновский закон.

§1. Введение

Начиная с пионерских работ Прохорова [2] и Ле Кама [5], опубликовано много работ о точности приближения распределения сумм бернуллиевых случайных величин пуассоновским законом. Во многих из них расстояние $d_0(F,Q)$ между функциями распределения F и Q определяется равенством

$$d_0(F,Q) = \sup_h \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x) d\big(F(x) - Q(x)\big) \right|,$$

где супремум берется по всем измеримым по Борелю функциям h таким, что $0 \le h \le 1$. Другими словами, $d_0(x,y)$ есть полная вариация меры Лебега — Стилтьеса, ассоциированной с $F - Q$. В цитированных выше работах [2] и [5] в качестве расстояния между F и Q берется $2d_0(F,Q)$.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые бернуллиевы случайные величины. Положим

$$p_i = \mathbb{P}(X_i = 1), \quad \lambda = \sum_{i=1}^n p_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$
$$F_n(x) = \mathbb{P}(S_n < x), \quad F(x) = F_1(x).$$

Обозначим через $\Pi_\lambda(x)$ функцию распределения пуассоновского закона с параметром λ.

Барбур и Холл [4] доказали, что

$$d_0(F_n, \Pi_\lambda) \le \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda}) \sum_{i=1}^{n} p_i^2. \tag{1.1}$$

Эта оценка до настоящего времени является наилучшей.

Если X_j одинаково распределены, то из (1.1) следует, что при $\lambda = np$

$$d_0(F_n, \Pi_\lambda) < (1 - e^{-\lambda})p. \tag{1.2}$$

Поскольку $1 - e^{-\lambda} \le \lambda$, то $d_0(F_n, \Pi_\lambda) \le np^2$. Таким образом,

$$d_0(F_n, \Pi_\lambda) \le \min(np^2, p). \tag{1.3}$$

В [9] при ограничении $\lambda < 2 - \sqrt{2}$ получен точный результат:

$$d_0(F_n, \Pi_\lambda) = \lambda(q^{n-1} - e^{-\lambda}), \tag{1.4}$$

где $q = 1 - p$.

В настоящей работе точность приближения F_n пуассоновским законом оценивается в более слабой метрике

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) = \sup_x \bigl| F_n(x) - \Pi_\lambda(x) \bigr|$$

при условии, что X_j одинаково распределены. В этом случае

$$F_n(m+) = \sum_{j=0}^{m} b_n(j, p),$$

где $b_n(m, p) = C_n^m p^m q^{n-m}$. В дальнейшем будем обозначать через $B_n(x; p)$ функцию распределения, определяемую вероятностями $b_n(m, p)$. Соответственно

$$\Pi_\lambda(m+) = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{m} \frac{\lambda^j}{j!}.$$

Положим

$$\Delta_j = b_n(j, p) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}.$$

Тогда

$$F_n(m+) - \Pi_\lambda(m+) = \sum_{j=0}^{m} \Delta_j. \tag{1.5}$$

Коснемся кратко истории вопроса. В 1958 г. Цареградский [3] в связи с задачей о приближении суммы независимых случайных величин безгранично делимыми законами, рассмотренной Колмогоровым в [1], получил оценку
$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) \le p\pi^2 e^{2p(2-p)}/16(1-p) < 3p/q, \quad p \in (0, 1/2). \tag{1.6}$$
В дальнейших публикациях рассматривался случай разнораспределенных слагаемых. Ниже следует небольшой перечень результатов, полученных в этом направлении. При этом используются обозначения:
$$\lambda_2 = \sum_{j=1}^{n} p_j^2, \quad \theta = \frac{\lambda_2}{\lambda}, \quad p_* = \max_{1\le j\le n} p_j. \tag{1.7}$$
Макабе [11] доказал, что
$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < \frac{25\theta}{12 - 50\theta}. \tag{1.8}$$
Франкен [7] получил оценки
$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) \le \frac{2}{\pi}\lambda_2, \quad d_K(F_n, \Pi_\lambda) \le 0.6p_*, \tag{1.9}$$
если $p_* < 1/4$. Применительно к случаю одинаково распределенных X_j эти оценки соответственно выглядят следующим образом:
$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) \le \frac{2}{\pi}np^2, \quad d_K(F_n, \Pi_\lambda) \le 0.6p. \tag{1.10}$$
Вторая из этих оценок справедлива при $p < 1/4$. В статье Хиппа [8] найдено неравенство
$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) \le \frac{\pi}{4\lambda(1-\theta)} \sum_{1\le j\le n} \frac{p_j^2}{1-p_j}. \tag{1.11}$$
Если $p_* < 1/4$, то отсюда следует оценка
$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < \frac{\pi}{3}\frac{\theta}{1-\theta} < \frac{1.05\theta}{1-\theta}. \tag{1.12}$$
Круопис [10] вывел комбинированную оценку
$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < \frac{2}{\pi}\min\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\frac{\theta}{1-\theta}, \lambda_2\right) < \frac{0.526\theta}{1-\theta}. \tag{1.13}$$

У Круописа сохранился тот же коэффициент $2/\pi$ при λ_2, что и у Франкена, хотя к тому времени уже появилась работа Серфлинга [13], в которой была получена оценка

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < 2^{-1}\lambda_2. \tag{1.14}$$

Захаровас и Хуанг [14] получили близкий результат:

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < \frac{c_1 \pi \theta}{4(1-\theta)}, \tag{1.15}$$

где $c_1\pi/4 \sim 0.51$. В [12, с. 236] говорится, что согласно [6]

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < 0.36\theta. \tag{1.16}$$

То же самое сказано в [14, с. 113]. В действительности оценка (1.16) доказана в [6] при условии $p_* \le 1/4$.

Многие авторы оценивали близость $F_n(x)$ к $\Pi_\lambda(x)$ в терминах других метрик, отличных от d_0 и d_K (см. по этому поводу [14] и [12]).

Переходим теперь к изложению результатов, полученных в настоящей работе.

Теорема 1. *Если* $0 < p < 1$ *и* $\lambda \le 2 - \sqrt{2}$, *то*

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) = e^{-\lambda} - q^n. \tag{1.17}$$

Теорема 1 доказывается путем прямых вычислений.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) \le 2^{-1}np^2 e^{-(n-1)p}. \tag{1.18}$$

Очевидно, что правую часть (1.18) можно записать в виде $2^{-1}p\lambda e^{-\lambda+p}$. Функция $\lambda e^{-\lambda}$ возрастает при $\lambda < 1$. Поэтому при $\lambda < \lambda_0 := 2 - \sqrt{2}$ имеем $\lambda e^{-\lambda} < \lambda_0 e^{-\lambda_0} = 0.163$. Таким образом, в условиях теоремы 1 при $n > 1$

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < 0.082pe^p < 0.11p, \tag{1.19}$$

поскольку $p \le \lambda/2 \le 0.2929$. Нетрудно видеть, что при фиксированном n

$$\lim_{p\to 0} p^{-2}\big(e^{-np} - (1-p)^n\big) = 2^{-1}n.$$

Поэтому оценка

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < 2^{-1}np^2 \tag{1.20}$$

является наилучшей среди оценок вида $d_K(F_n, \Pi_\lambda) < cnp^2$.

Следующая оценка не требует ограничений на λ.

Теорема 2. *Для любых n и p, $0 < p < 1$,*

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < np^2 w(2(n-1)pq), \tag{1.21}$$

где

$$w(b) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-bx}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

Поскольку $w(0) = 2/\pi$, то

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < \frac{2np^2}{\pi}.$$

Доказательство теоремы 2 основано на формуле обращения для производящих функций с последующим применением комплексного анализа.

Замечание 1.1. Замена переменной $x = 1 - y$ в формуле для $w(b)$ приводит к представлению

$$w(b) = \frac{e^{-b}}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{by}}{\sqrt{y}} dy.$$

Полагая теперь $y = x^2$, имеем

$$\int_0^1 \frac{e^{by}}{\sqrt{y}} dy = 2 \int_0^1 e^{bx^2} dx.$$

Таким образом,

$$w(b) = \frac{2e^{-b}}{\pi} \int_0^1 e^{bx^2} dx = \frac{2e^{-b}}{\pi\sqrt{b}} \int_0^{\sqrt{b}} e^{y^2} dy := \frac{e^{-b}}{\sqrt{\pi b}} erfi\bigl(\sqrt{b}\bigr).$$

Это представление для w в работе не используется, но не исключено, что оно может оказаться полезным в дальнейших исследованиях.

Следствие 2. *Если $\lambda \geq 2 - \sqrt{2}$, то*

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < 0.44np^2. \tag{1.22}$$

Следствие 3. *Для любого $n > 1$*

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) \leq \begin{cases} \dfrac{e^{2pq}p}{4q} < \dfrac{n}{n-1}\,\dfrac{p}{4q}, & \text{если } \; 2npq \leq 1, \\[2ex] \dfrac{n}{n-1}\,\dfrac{p}{4q} < \dfrac{e^{2pq}p}{4q}, & \text{если } \; 2(n-1)pq > 1. \end{cases} \tag{1.23}$$

Нетрудно видеть, что $e^{2pq}/q \to 1$ при $p \to 0$. Это означает, что для любого $0 < \varepsilon < 1$ равномерно по $n \geq 2$

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < \frac{p}{4-\varepsilon},$$

если p достаточно мало. Пусть p_0 — корень уравнения $e^{2pq}/q = 2$. Вычисления показывают, что $0.2631 < p_0 < 0.2632$. Отсюда согласно (1.23) при $p < 0.2631$ следует, что

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < \frac{p}{2}$$

равномерно по n. Что касается $n = 1$, то в силу (1.18) и (1.22) имеем

$$d_K(F_1, \Pi_p) < \frac{p^2}{2}.$$

Применим теперь следствие 3 в случае $n \geq 20$, $p \leq 1/20$. Полагая в правой части (1.23) $n = 20$, $p = 1/20$, мы получаем оценку

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < 0.277p. \tag{1.24}$$

Если не накладывать ограничения на значения n, то для $p \leq 1/20$ имеет место оценка

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < 0.2894p. \tag{1.25}$$

Полагая в (1.24) и (1.25) $p = 1/20$, получаем соответственно оценки

$$d_K(F_{20}, \Pi_1) < 0.01383$$

и

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < 0.01487.$$

Если положить $p = 0.02$ и не накладывать ограничения на n, то из (1.23) следует оценка

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < 0.0266p$$

для любого n. Это уже весьма близко к предельной оценке $0.25p$ (отклонение равно всего $0.016p$).

Если дополнительно положить $n = 50$, то согласно (1.23) мы получим оценку

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < 0.02603p,$$

т. е. еще ближе к предельной оценке. Здесь отклонение равно $0.0103p$.

Для $1 \leq n \leq 20$ и некоторого дискретного ряда значений $1/20 \leq p \leq 1/4$ мы приведем точные значения $d_K(F_{n,p}, \Pi_\lambda)$, где $F_{n,p}$ — биномиальное распределение с параметрами n, p.

Таблица 1. Значения $d_{n,p} = \sup_x \left|F_{n,p}(x) - \Pi_\lambda(x)\right|$
при $p = 1/k$, где $k = 4, \dots, 10$ и $k = 20$

n	$d_{n,1/4}$	$d_{n,1/5}$	$d_{n,1/6}$	$d_{n,1/7}$	$d_{n,1/8}$	$d_{n,1/9}$	$d_{n,1/10}$	$d_{n,1/20}$
1	0.0288	0.0187	0.0131	0.00973	0.00749	0.00595	0.00483	0.0012
2	0.044	0.0302	0.022	0.01678	0.01317	0.01061	0.00873	0.0023
3	0.050	0.0368	0.0278	0.02170	0.01736	0.01419	0.01181	0.0033
4	0.0514	0.0397	0.031	0.02494	0.02034	0.01688	0.01422	0.0042
5	0.049	0.0401	0.0327	0.02687	0.02235	0.01882	0.01604	0.0050
6	0.045	0.039	0.0329	0.02780	0.02357	0.02014	0.01737	0.0057
7	0.040	0.0368	0.032	0.02796	0.02416	0.02096	0.01828	0.0063
8	0.0389	0.0341	0.031	0.02754	0.02427	0.02136	0.01886	0.0068
9	0.042	0.031	0.029	0.02671	0.02399	0.02144	0.01914	0.0073
10	0.043	0.0301	0.027	0.02559	0.02342	0.02124	0.01920	0.0077
11	0.0426	0.0324	0.025	0.02426	0.0226	0.02084	0.0190	0.0081
12	0.0407	0.0335	0.0246	0.02282	0.0217	0.02028	0.0187	0.0084
13	0.038	0.0337	0.026	0.02131	0.02067	0.01959	0.0183	0.0087
14	0.0397	0.0331	0.0272	0.02085	0.0195	0.01882	0.0178	0.0089
15	0.0409	0.032	0.0276	0.02208	0.0184	0.01798	0.0172	0.009
16	0.0409	0.0304	0.0276	0.02290	0.01807	0.01711	0.01659	0.0092
17	0.04	0.0301	0.0271	0.02335	0.0190	0.01621	0.0159	0.0092
18	0.0382	0.0314	0.0263	0.02348	0.0197	0.01594	0.0152	0.0093
19	0.0387	0.032	0.025	0.02333	0.0201	0.01670	0.01448	0.0093
20	0.0398	0.032	0.024	0.02296	0.02034	0.01727	0.01425	0.0093
100	0.0366	0.0287	0.0236	0.02003	0.01773	0.01571	0.01416	0.0071

Первое, что обращает на себя внимание в табл. 1, — это монотонное убывание $d_{n,1/k}$ при возрастании k для любого фиксированного n между 1 и 20. На этом основании представляется весьма правдоподобным, что $d_{n,p}$ является возрастающей функцией p при фиксированном n и $1/20 \le p \le 1/4$. Судя по значениям $d_{n,1/k}$ для $n = 100$, весьма вероятно, что $d_{n,p} \le 0.0515$ для всех $n \ge 1$ и $p \le 1/4$.

При более внимательном рассмотрении в табл. 1 обнаруживается загадочная закономерность, а именно, для $4 \le k \le 10$

$$d_k := \max_{1 \le n \le 20} d_{n,1/k} = d_{k,1/k},$$

причем d_k монотонно убывает. Естественно возникает гипотеза, что

$$\max_{1 \le n < \infty} d_{n,1/k} = d_{k,1/k}$$

для любого n.

Поскольку нас в конечном счете интересует неравенство вида

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < c\,p, \quad p < 1/4, \tag{1.26}$$

где c не зависит от n и p, мы приведем таблицу значений $p\,d_K(F_n, \Pi_{np})$, которая легко получается из табл. 1.

Таблица 2. Значения $k\,d_{n,1/k}$ при $k = 4, \dots, 10$ и $k = 20$ для каждого n: $1 \le n \le 20$ и $n = 100$

n	$4d_{n,1/4}$	$5d_{n,1/5}$	$6d_{n,1/6}$	$7d_{n,1/7}$	$8d_{n,1/8}$	$9d_{n,1/9}$	$10d_{n,1/10}$	$20d_{n,1/20}$
1	0.115203	0.09365	0.07889	0.068145	0.059975	0.05355	0.04837	0.024588
2	0.176123	0.1516	0.132521	0.117484	0.105406	0.095525	0.087307	0.046748
3	0.201966	0.184058	0.166962	0.15191	0.138939	0.127794	0.118182	0.066659
4	**0.20589**	0.198645	0.186984	0.174601	0.162792	0.151968	0.1422	0.08449
5	0.1968	0.200997	0.196324	0.188141	0.17882	0.16942	0.160407	0.100397
6	0.180607	0.195251	0.197889	0.194624	0.18857	0.181322	0.173706	0.114527
7	0.16116	0.184409	0.193929	0.195739	0.193329	0.188671	0.182884	0.127016
8	0.155701	0.170622	0.186175	0.192846	0.194164	0.192312	0.188618	0.137992
9	0.168835	0.155406	0.175941	0.187028	0.191957	0.19296	0.191492	0.147575
10	0.173089	0.150981	0.16422	0.179149	0.187434	0.191222	0.19201	0.155874
11	0.170529	0.162238	0.151751	0.169887	0.181188	0.187604	0.190605	0.162994
12	0.163066	0.167816	0.148039	0.159775	0.173703	0.182535	0.187647	0.169031
13	0.15234	0.168693	0.157798	0.149222	0.165373	0.17637	0.183452	0.174074
14	0.158878	0.165831	0.163626	0.14603	0.156511	0.169405	0.17829	0.178206
15	0.163923	0.160113	0.166054	0.154611	0.147369	0.161886	0.17239	0.181506
16	0.163969	0.152319	0.165621	0.160315	0.144569	0.154014	0.165945	0.184046
17	0.160035	0.150587	0.162845	0.163458	0.152214	0.145953	0.159117	0.185892
18	0.153092	0.157025	0.158205	0.164369	0.157662	0.14346	0.152043	0.187107
19	0.15517	0.160037	0.152131	0.163373	0.161118	0.150346	0.144834	0.187748
20	0.159479	0.160093	0.145002	0.160778	0.162795	0.155502	0.142589	0.18787
100	0.146645	0.143683	0.142091	0.140256	0.141886	0.141393	0.141698	0.143745

Разумеется и для табл. 2 имеет место закономерность, обнаруженная в табл. 1. Выделенное значение 0.205893 является нижней оценкой постоянной c в неравенстве (1.26). Так как все значения в табл. 2 не превосходят $4d_{4,1/4}$, то весьма вероятно, что $c \le 0.277$, не говоря уже о 0.2894.

Поскольку настоящая работа является математической, мы не должны ограничиваться неполной индукцией. В связи с этим мы построим алгоритм, который дает возможность оценивать значения $d_{n,p}$ для любых значений p. Ниже мы будем для удобства использовать обозначения $d(p)$ вместо $d_{n,p}$. Будем считать, что $d(p_1) > d(p_2)$, если $p_1 > p_2$.

Пусть $p_1 > p_2$ — значения p, для которых известны $d(p_1)$ и $d(p_2)$.

Предположим, что $\left|d'(p)\right| \le k(p)$, где $k(p)$ убывает вместе с p. Тогда для $p < p_1$

$$d(p) < d(p_1) + k(p_1)(p_1 - p).$$

С другой стороны, для $p > p_2$

$$d(p) \le d(p_2) - k(p_1)(p_2 - p).$$

Найдем теперь значение p_0, $p_2 < p_0 < p_1$, для которого

$$d(p_2) - k(p_1)(p_2 - p_0) = d(p_1) + k(p_1)(p_1 - p_0).$$

После стандартных выкладок находим, что

$$p_0 = \frac{d(p_1) - d(p_2)}{2k(p_1)} + \frac{p_1 + p_2}{2}. \tag{1.27}$$

Очевидно, $d(p_1) - d(p_2) < k(p_1)(p_1 - p_2)$. Следовательно, $p_0 < p_1$. С другой стороны, $p_0 > (p_1 + p_2)/2$. Таким образом,

$$\frac{p_1 + p_2}{2} < p_0 < p_1.$$

Положим

$$\omega = d(p_1) + k(p_1)(p_1 - p_0) = d(p_2) - k(p_1)(p_2 - p_0).$$

Очевидно,

$$d(p) \le \omega$$

для всех $p_2 \le p \le p_1$. Пусть

$$\widehat{d}(p) = \begin{cases} d(p_1) + k(p_1)(p_1 - p), & \text{если} \ \ p_0 \le p \le p_1, \\ d(p_2) + k(p_1)(p - p_2), & \text{если} \ \ p_2 \le p \le p_0. \end{cases} \tag{1.28}$$

Нетрудно видеть, что $\widehat{d}(p)/p$ убывает при $p_0 < p < p_1$ и возрастает при $p_2 < p < p_0$. Так как $d(p) < \widehat{d}(p)$, то

$$\frac{d(p)}{p} < \frac{\widehat{d}(p)}{p}. \tag{1.29}$$

Сформулируем результаты, которые позволяют оценивать $\left|d'(p)\right|$. Введем обозначение

$$w_1(b) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} e^{-bx} dx.$$

Найдем значение $w_1(0)$. Нетрудно видеть, что

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{-1/2}dx := B\big(3/2,\ 1/2\big)$$
$$= \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(2)} = \frac{\big(\Gamma(1/2)\big)^2}{2} = \frac{\pi}{2} = 1.570796\ldots.$$

В результате получаем, что

$$w_1(0) = 1. \tag{1.30}$$

Теорема 3. (a) *Для любых* $0 < p < 1$ *и* $n \ge 2$

$$\big|D_p d_K(F_n, \Pi_\lambda)\big| < n(n-1)p^2 w_1\big(2(n-2)pq\big) + 2pw\big(2(n-1)p\big). \tag{1.31}$$

(b) *Для любых* $0 < p < 1$ *и* $n = 1$

$$\big|D_p d_K(F, \Pi_\lambda)\big| < \frac{4p}{\pi}. \tag{1.32}$$

Символ D_p здесь и ниже означает дифференцирование по p.

Следствие 4. (a) *Для любых* $0 < p < 1$ *и* $n \ge 3$

$$\big|D_p d_K(F_n, \Pi_\lambda)\big| < \frac{c\sqrt{\lambda}e^{4pq}}{\sqrt{2}\pi q^{3/2}} + \frac{e^{2p}}{2\pi}, \tag{1.33}$$

где $c = 1.212$.

(b) *Для любых* $0 < p < 1$

$$\big|D_p d_K(F_2, \Pi_\lambda)\big| < 2p^2 + 2pw(2p). \tag{1.34}$$

Рассмотрим теперь пример, который иллюстрирует алгоритм, описанный выше (см. (1.27)–(1.29)).

Пример 1. Оценим $d_K(F_n, \Pi_\lambda)$ для $n = 4$, $1/4 < p < 1/5$. С этой целью найдем для этого случая $\widehat{d}(p)$ по формуле (1.28). В качестве $k(p)$ возьмем оценку (1.33) для $\big|D_p d_K(F_n, \Pi_\lambda)\big|$. В данном случае $p_1 = 1/4$, $p_2 = 1/5$, $np_1 = 1$. Следовательно,

$$k(p_1) = \frac{ce^{0.75}}{\pi\sqrt{2}}\left(\frac{4}{3}\right)^{1.5} + \frac{e^{0.5}}{2\pi} = 0.8896 + 0.2625 = 1.1521.$$

Очевидно, $d(p_1) - d(p_2) = 0.01175$.

Выполняя вычисления по формуле (1.27), находим $p_0 = 0.2301$. Подставляя это значение в (1.28), имеем $\widehat{d}(p_0) = 0.0744$. Отсюда $\widehat{d}(p_0)/p_0 = 0.3233$, а нам хотелось бы иметь для $\widehat{d}(p_0)/p$ значение, меньшее чем 0.277 или, по крайней мере, 0.2894 (см. выше оценки (1.23) и (1.24)). Поэтому мы повторим описанную выше процедуру для $p_0 < p < p_1$ и $p_2 < p < p_0$.

Вычисления показывают, что $d(p_0) = 0.047$. Следовательно,

$$d(p_1) - d(p_0) = 0.004.$$

Отсюда

$$\frac{d(p_1) - d(p_0)}{2k(p_1)} = 0.00174.$$

Поэтому

$$p_{01} := \frac{d(p_1) - d(p_0)}{2k(p_1)} + \frac{p_1 + p_0}{2} = 0.24174.$$

Применяя теперь формулу (1.28), имеем

$$\widehat{d}(p_{01}) = 0.0515 + 1.1521(0.25 - 0.2417) = 0.0611.$$

Нетрудно видеть, что $\widehat{d}(p_{01})/p_{01} = 0.2528 < 0.277$.

Обратимся теперь к промежутку $p_2 < p < p_0$. Прежде всего вычислим

$$k(p_0) = \frac{2c\sqrt{p_0}e^{4p_0q_0}}{\pi\sqrt{2}q_0^{3/2}} + \frac{e^{2p_0}}{2\pi}. \tag{1.35}$$

Вычисления показывают, что

$$q_0 := 1 - p_0 = 0.77, \quad 2\sqrt{p_0} = 0.959, \quad 4p_0q_0 = 0.7087, \quad q_0^{-1.5} = 1.48.$$

В результате получаем, что

$$2c\sqrt{p_0}e^{4p_0q_0}q^{-1.5} = 2.6907. \tag{1.36}$$

Далее,

$$\frac{e^{2p_0}}{2\pi} = 0.252. \tag{1.37}$$

Из (1.35)–(1.37) следует, что

$$k(p_0) = \frac{2.6907}{\pi\sqrt{2}} + 0.252 = 0.606 + 0.252 = 0.858. \tag{1.38}$$

Очевидно,

$$d(p_0) - d(p_2) = 0.047 - 0.03972 = 0.00728. \tag{1.39}$$

Из (1.38) и (1.39) следует, что

$$p_{02} := \frac{d(p_0) - d(p_2)}{2k(p_0)} + \frac{p_0 + p_2}{2} = \frac{0.00728}{1.716} + 0.215 = 0.2193.$$

Отсюда

$$\widehat{d}(p_{02}) = d(p_2) + k(p_0)(p_{02} - p_2) = 0.03972 + 0.858 \times 0.0193 = 0.05628.$$

Очевидно,

$$\frac{\widehat{d}(p_{02})}{p_{02}} = 0.2566 < 0.277.$$

§2. Доказательство теоремы 1 и следствия 1

Доказательство теоремы 1. Отправной точкой является доказательство следующего утверждения.

Лемма 2.1. *При любом* λ

$$2\Delta_0 + \Delta_1 < 0. \tag{2.1}$$

Доказательство. Очевидно,

$$q^{n-1} - e^{-\lambda} = q^n - e^{-\lambda} + q^{n-1}p. \tag{2.2}$$

Далее,

$$e^{-\lambda} - q^n = (e^{-p} - q)\sum_{k=0}^{n-1} q^k e^{-p(n-k-1)}. \tag{2.3}$$

Нетрудно видеть, что

$$e^{-p} - 1 + p = \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j \frac{p^j}{j!} > \frac{p^2}{2}\left(1 - \frac{p}{3}\right).$$

Поскольку $e^{-p} > 1 - p$, имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k e^{-p(n-k-1)} > nq^{n-1}.$$

Таким образом,

$$|\Delta_0| > n\left(1 - \frac{p}{3}\right)\frac{p^2}{2}q^{n-1}. \tag{2.4}$$

Вследствие (2.2) находим, что

$$\Delta_1 = \lambda\Delta_0 + \lambda q^{n-1}p, \tag{2.5}$$

т. е.

$$2\Delta_0 + \Delta_1 = (2+\lambda)\Delta_0 + np^2q^{n-1}. \tag{2.6}$$

Из (2.4) и (2.6) следует, что

$$2\Delta_0 + \Delta_1 < np^2q\left(1 - \left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\left(1-\frac{p}{3}\right)\right).$$

Очевидно,

$$\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\left(1-\frac{p}{3}\right) > \left(1+\frac{p}{2}\right)\left(1-\frac{p}{3}\right) > 1.$$

В результате мы имеем

$$2\Delta_0 + \Delta_1 < 0,$$

что и требовалось доказать. □

В [9] доказывается, что при ограничении $\lambda < 2-\sqrt{2}$ величины Δ_j меньше 0 для всех $0 \le j \le n$, за исключением $j = 1$. Отсюда, в частности, следует, что последовательность сумм $\left|\sum_{j=0}^m \Delta_j\right|$ убывает, начиная с $m = 1$, и при этом сходится к 0. Очевидно, что (2.1) можно записать в виде

$$\Delta_0 + \Delta_1 < |\Delta_0|. \tag{2.7}$$

Поскольку $\Delta_0 + \Delta_1 > 0$ и $\sum_{j=2}^m \Delta_j < 0$, то при любом $m \ge 2$

$$0 < \Delta_0 + \Delta_1 + \sum_{j=2}^m \Delta_j < \Delta_0 + \Delta_1.$$

Ввиду (2.7) это означает, что при $m \ge 2$

$$0 < \left|\sum_{j=0}^m \Delta_j\right| < |\Delta_0|. \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) следует (1.17), что и требовалось доказать. □

Доказательство следствия 1. Нетрудно видеть, что

$$e^{-p} - 1 + p = \sum_{j=2}^\infty \frac{(-p)^j}{j!} < \frac{p^2}{2}.$$

Отсюда $0 < e^{-p} - q < p^2/2$. Подставляя оценки $q < e^{-p}$ и $e^{-p} - q < p^2/2$ в правую часть тождества (2.3), получаем неравенство (1.18). Таким образом, следствие 1 доказано. □

Замечание 2.1. В [9] отмечается, что $b_n(1;p) - \lambda e^{-\lambda} > 0$ тогда и только тогда, когда

$$-(n-1)\ln(1-p) < np. \tag{2.9}$$

Очевидно, (2.9) выполняется тогда и только тогда, когда $0 < p < p_n$, где p_n — отличный от 0 корень уравнения относительно p:

$$-\ln(1-p) = \frac{n}{n-1}p. \tag{2.10}$$

Если $\lambda = 1$, то $p = 1/n$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} -\ln(1-p) - \frac{n}{n-1}p &= -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{n}{n-1} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kn^{k-1}} - \frac{1}{n-1} < -\frac{1}{2n^2}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Это означает, что $1/n < p_n$. Положим

$$f(p) = -\ln(1-p) - \frac{n}{n-1}p.$$

Очевидно,

$$f'(p) = \frac{1}{1-p} - \frac{n}{n-1}, \ \ f''(p) = \frac{1}{(1-p)^2}. \tag{2.12}$$

Отсюда

$$f'\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \quad f''\left(\frac{1}{n}\right) > 0.$$

Следовательно, $f(p)$ принимает в точке $1/n$ минимальное значение. Легко видеть, что

$$\frac{f(p)}{p} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p^{k-1}}{k} - \frac{1}{n-1}.$$

Это означает, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_n^{k-1}}{k} = \frac{1}{n-1}. \tag{2.13}$$

Отсюда

$$p_n < \frac{2}{n-1}. \tag{2.14}$$

Очевидно,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{p^{k-1}}{k} = \frac{p}{2}(1+r), \tag{2.15}$$

где

$$r = 2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{p^{k-2}}{k}.$$

Нетрудно видеть, что

$$r < \frac{2p}{3(1-p)}.$$

Отсюда ввиду (2.14) при $p = p_n$ вытекает, что

$$r < \frac{4}{3(n-3)}. \tag{2.16}$$

Из (2.13), (2.15) и (2.16) следует, что при $n \geq 4$

$$p_n = \frac{2}{(n-1)(1+r)} > \frac{2(n-3)}{(n-1)(n-5/3)}. \tag{2.17}$$

Сравнивая (2.13) и (2.17), мы заключаем, что

$$p_n \sim \frac{2}{n-1}. \tag{2.18}$$

Ниже приводятся результаты вычислений, иллюстрирующих точность оценок (2.14) и (2.17). Эти результаты размещены в следующей таблице. Они согласуются как с (2.14), так и с (2.17). В таблице используются следующие обозначения:

$$a_n := \frac{2(n-3)}{(n-1)(n-5/3)} \quad \text{и} \quad b_n := \frac{2}{n-1}.$$

Таблица 3

n	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	0.2857	0.3	0.2769	0.25	0.2255	0.2045	0.1866
p_n	0.5828	0.4543	0.3713	0.3136	0.2714	0.2391	0.2136	0.1931
b_n	1	0.6666	0.5	0.4	0.3333	0.28571	0.25	0.2222

n	20	30	40	50	60	70	80	90	100
a_n	0.097	0.0657	0.0494	0.0396	0.0331	0.0284	0.0248	0.0221	0.0199
p_n	0.0983	0.0659	0.0495	0.0397	0.0331	0.0284	0.0248	0.0221	0.0199
b_n	0.1052	0.0689	0.0512	0.0408	0.0338	0.0289	0.025	0.0224	0.0202
$\frac{p_n}{b_n}$	0.9338	0.9558	0.9668	0.9734	0.9778	0.9809	0.9833	0.9852	0.9866

Мы видим, что p_n ближе к a_n, чем к b_n. В заключение заметим, что

$$\left.\frac{p_n}{b_n}\right|_{n=1000} = 0.9986668889, \quad \left.\frac{p_n}{b_n}\right|_{n=10000} = 0.999967.$$

§3. Доказательство теоремы 2

Мы начнем со следующего утверждения.

Лемма 3.1. *Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — арифметические функции распределения с конечными первыми моментами, сосредоточенные на неотрицательной полуоси. Тогда*

$$G(k+) - F(k+) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)-g(z)}{z-1} z^{-k-1}dz, \tag{3.1}$$

где $f(z)$ и $g(z)$ соответственно производящие функции распределений F и G.

Доказательство. Очевидно,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k,$$

где

$$f_k = F(k+) - F(k), \quad g_k = G(k+) - G(k).$$

Далее,

$$\frac{f(z)-g(z)}{z-1} = \frac{f(z)-1}{z-1} - \frac{g(z)-1}{z-1}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{f(z)-1}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} r_k z^k, \quad \frac{g(z)-1}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k, \tag{3.2}$$

где

$$r_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} f_j, \quad v_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} g_j.$$

Очевидно, $r_k = 1 - F(k+)$, $v_k = 1 - G(k+)$. Следовательно,

$$\frac{f(z)-g(z)}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(r_k - v_k)z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\big(G(k+) - F(k+)\big)z^k.$$

Заменяя теперь $\big(f(z)-g(z)\big)/(z-1)$ в правой части (3.1) на

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big(G(k+) - F(k+)\big)z^k,$$

мы получаем желаемый результат. $\square$

Очевидно,

$$B_n(\cdot;p) - \Pi(\cdot,np) = \big(B_1(\cdot,p) - \Pi(\cdot,p)\big) * \sum_{k=1}^{n} B_{n-k}(\cdot,p) * \Pi\big(\cdot;(k-1)p\big),$$

где $\Pi(\cdot,p)$ — пуассоновский закон с параметром p. В терминах производящих функций это соотношение записывается в виде

$$\big(q + pz - e^{p(z-1)}\big) \sum_{k=1}^{n} (q+pz)^{n-k} e^{(k-1)p(z-1)}, \tag{3.3}$$

Комбинируя (3.1) и (3.2), имеем

$$\begin{aligned}
&\Pi(k+;np) - B_n(k+;p) \\
&\quad = \frac{p}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{|z|=1} (q+pz)^{n-j} e^{(j-1)p(z-1)} z^{-k-1} dz \\
&\qquad - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{|z|=1} \frac{e^{p(z-1)}-1}{z-1} (q+pz)^{n-j} e^{(j-1)p(z-1)} z^{-k-1} dz \\
&\quad = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{|z|=1} \left(\frac{e^{p(z-1)}-1}{z-1} - p \right) (q+pz)^{n-j} e^{(j-1)p(z-1)} z^{-k-1} dz.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Мы использовали здесь равенство

$$\frac{q+pz}{z-1} = p + \frac{1}{z-1}.$$

Лемма 3.2. *Для любого z в круге $|z| \le 1$*

$$\left| \frac{e^{p(z-1)}-1}{z-1} - p \right| \le \frac{p^2}{2} |z-1|. \tag{3.5}$$

Доказательство. Согласно (3.2)

$$\frac{e^{p(z-1)}-1}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} r_j z^j,$$

где $r_{k-1} = 1 - \Pi(k+;p)$. Поскольку $\sum_{k=0}^{\infty} r_j = p$, имеем

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} r_k z^k - p}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} w_k z^k,$$

где $w_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} r_j$. Очевидно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k z^k - p = \frac{e^{p(z-1)} - 1 - p(z-1)}{z-1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{z\to 1} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} r_k z^k - p}{z-1} = \frac{p^2}{2}.$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k = \frac{p^2}{2}.$$

Поскольку коэффициенты ω_k неотрицательны, то

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} w_k z^k\right| \le \frac{p^2}{2}$$

для любого z в круге $|z| \le 1$, что равносильно утверждению леммы. □

Лемма 3.3. *Для любого* $|\varphi| \le \pi$

$$|1 - e^{i\varphi}| \le 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|. \tag{3.6}$$

Доказательство. Очевидно,

$$\begin{aligned}|1 - e^{i\varphi}|^2 &= (1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi \\ &= 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 2(1-\cos\varphi) = 4\sin^2\frac{\varphi}{2},\end{aligned}$$

что равносильно утверждению леммы. □

Лемма 3.4. *Для любого* $|\varphi| \le \pi$

$$|q + pe^{i\varphi}| \le \exp\left\{-2pq\sin^2\frac{\varphi}{2}\right\}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Очевидно,

$$\begin{aligned}|q + pe^{i\varphi}|^2 &= (q + pe^{i\varphi})(q + pe^{-i\varphi}) \\ &= q^2 + p^2 + pq(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ &= q^2 + p^2 + 2pq(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ &= q^2 + p^2 + 2pq + 2pq(\cos\varphi - 1) = 1 - 4pq\sin^2\frac{\varphi}{2}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$|q + pe^{i\varphi}|^2 \le \exp\left\{-4pq\sin^2\frac{\varphi}{2}\right\},$$

что равносильно утверждению леммы. □

Лемма 3.5. *Для любого* $|\varphi| \le \pi$

$$\left|e^{p(1-e^{i\varphi})}\right| < e^{-2p\sin^2\frac{\varphi}{2}}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из равенства

$$e^{p(1-e^{i\varphi})} = e^{-p\left(2\sin^2\frac{\varphi}{2} - i\sin\varphi\right)}. \qquad \square$$

Из (3.4)–(3.8) вытекает, что

$$\sup_x \left|\Pi(x;np) - B_n(x;p)\right| < \frac{np^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| e^{-2(n-1)pq\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi. \tag{3.9}$$

Далее, для любого b

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}e^{-b\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi &= 2\int_0^{\pi/2}\sin\varphi e^{-b\sin^2\varphi}\,d\varphi \\ &= 2\int_0^1\frac{xe^{-bx^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1\frac{e^{-by}}{\sqrt{1-y}}dy.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Возвращаясь теперь к (3.9), мы получаем утверждение теоремы 2.

§4. Доказательство следствия 2

Положим для краткости

$$f(b) = \int_0^1\frac{e^{-bx}}{\sqrt{1-x}}dx.$$

Вычисления с точностью до трех знаков показывают, что $f\left(2-\sqrt{2}\right) = 1.380$. Следовательно, $w\left(2-\sqrt{2}\right) = 0.440$. Поскольку $w(b)$ убывает с ростом b, ввиду (1.21) это означает, что при $\lambda \ge 2-\sqrt{2}$

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < 0.44np^2, \tag{4.1}$$

что и требовалось доказать.

§5. Доказательство следствия 3

Мы сохраним обозначение $f(b)$, введенное в предыдущем параграфе. Пусть $0 < b \le 2$. Для дальнейших рассуждений нам понадобится

Лемма 5.1. *Для любого* $b > 0$

$$\int_0^1\frac{e^{-bx}}{\sqrt{1-x}}dx < b^{-1}(1-e^{-b/4})\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}e^{-b/4} + 2e^{-b/2}\right) + e^{-(3/4)b}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\int_0^1 \frac{e^{-bx}}{\sqrt{1-x}}dx < \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{1/4} e^{-bx}dx \\ + \sqrt{2}\int_{1/4}^{1/2} e^{-bx}dx + 2\int_{1/2}^{3/4} e^{-bx}dx + e^{-(3/4)b}. \tag{5.2}$$

Очевидно,

$$\int_0^{1/4} e^{-bx}dx = \frac{1-e^{b/4}}{b}, \quad \int_{1/4}^{1/2} e^{-bx}dx = \frac{e^{-b/4}-e^{-b/2}}{b} = e^{-b/4}\frac{1-e^{-b/4}}{b},$$
$$\int_{1/2}^{3/4} e^{-bx}dx = e^{-b/2}\frac{1-e^{-b/4}}{b}.$$

Подставляя полученное выражение в правую часть (5.2), мы получаем неравенство (5.1). Таким образом, лемма доказана. □

Обозначим $x = e^{-b/4}$. Очевидно,

$$b = -4\ln x. \tag{5.3}$$

Вследствие (5.3) мы можем записать правую часть (5.1) в виде

$$v(x) = b^{-1}(1-x)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}x + 2x^2\right) + x^3.$$

Очевидные преобразования с использованием (5.3) приводят к другому выражению для этой функции:

$$v(x) = b^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)x + \left(2-\sqrt{2}\,\right)x^2 - (4\ln x + 2)x^3\right). \tag{5.4}$$

Введем обозначения:

$$v_0(x) = \left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)x + \left(2-\sqrt{2}\,\right)x^2 - (4\ln x + 2)x^3,$$
$$v_1(x) = \left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)x + \left(2-\sqrt{2}\,\right)x^2,$$
$$v_2(x) = -(4\ln x + 2)x^3.$$

Очевидно,

$$(x^3\ln x)' = (3\ln x + 1)x^2.$$

Отсюда следует, что
$$v_2'(x) = -2(6\ln x + 5)x^2. \tag{5.5}$$
Пусть x_0 — корень уравнения $6\ln x + 5 = 0$. Очевидно,
$$x_0 = e^{-5/6} = 0.4346\dots .$$
Функция $v_2(x)$ возрастает при $x < x_0$. Нетрудно видеть, что
$$v_2''(x) = -8(3\ln x + 4)x. \tag{5.6}$$
Пусть x_1 — корень уравнения $3\ln x + 4 = 0$. Очевидно, что
$$x_1 = -e^{-4/3} \approx 0.2636\dots ,$$
т. е. $x_1 < x_0$. Это означает, что v_2 выпукла вверх при $x > x_0$. Нетрудно видеть, что
$$\big((3\ln x + 4)x\big)' = 3\ln x + 7.$$
Функция $-3\ln x - 7$ отрицательна при $x > e^{-7/3}$. Следовательно, функция $-(3\ln x + 4)x$ убывает для $x > e^{-7/3}$. Поэтому
$$\max_{x>x_0}\big(-(3\ln x + 4)x\big) = -(3\ln x_0 + 4)x_0 = -1.5x_0. \tag{5.7}$$
Очевидно,
$$v_0''(x) = v_1''(x) + v_2''(x).$$
В силу (5.6) и (5.7) имеем
$$\max_{x>x_0} v_2''(x) = -12x_0 = -5.215.$$
С другой стороны,
$$v_1''(x) \equiv 2\big(2 - \sqrt{2}\,\big) = 1.1715\dots .$$
Таким образом,
$$\max_{x>x_0} v_0''(x) < -4.043. \tag{5.8}$$
Следовательно, $v_0(x)$ выпукла вверх на отрезке $(x_0, 1)$. Вычисления показывают, что
$$v_0'(0.55) \equiv 0.049026\dots > 0. \tag{5.9}$$
Это означает, что $v_0(x)$ возрастает на отрезке $(x_0, 0.55)$. Поскольку $v_2(x)$ возрастает на $(0, x_0)$, то $v_0(x)$ также возрастает на $(0, x_0)$. Итак, мы показали, что $v_0(x)$ возрастает на $(0, 0.55)$. Следовательно,
$$\max_{0\le x\le 0.55} v_0(x) = v_0(0.55). \tag{5.10}$$

Стандартные вычисления показывают, что

$$v_0(0.55) = 0.385043\ldots. \tag{5.11}$$

Поскольку

$$bv(x) = v_0(x) + \frac{2}{\sqrt{3}}, \tag{5.12}$$

для всех $x \in (0, 0.55)$

$$v(x) < \frac{1.539743}{b}.$$

Так как правая часть (5.1) совпадает при $x = e^{-b/4}$ с $v(x)$, то согласно (5.3)

$$\int_0^1 \frac{e^{-bx}}{\sqrt{1-x}} dx < \frac{1.53743}{b}, \tag{5.13}$$

если $0 \leq b \leq -4 \ln 0.55$. Нетрудно видеть, что при $x > 0.55$

$$v_0(x) < v_0(0.55) + v_0'(0.55)(x - 0.55) + v_0''(0.55)\frac{(x-0.55)^2}{2}.$$

Отсюда

$$\max_{x>0.55} v_0(0.55) < v_0(0.55) - \frac{v_0'(0.55)}{v''(0.55)}.$$

Применяя теперь (5.8)–(5.11), получаем, что

$$\max_{x>0.55} v_0(x) < 0.3973.$$

Отсюда ввиду (5.12) находим, что

$$\max_{x>0.55} v(x) < 1.552. \tag{5.14}$$

Из (5.3), (5.1) и (5.14) следует, что при $b > -4 \ln 0.55$

$$\int_0^1 \frac{e^{-bx}}{\sqrt{1-x}} < \frac{1.552}{b}. \tag{5.15}$$

Комбинируя (5.1) и (5.15), находим, что для любого $b > 0$

$$w(b) < \frac{1.552}{\pi b} < \frac{1}{2b}. \tag{5.16}$$

Полагая теперь $b = 2pq(n-1)$, согласно (1.21) получаем, что при $n \geq 2$

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) \leq \frac{n}{n-1} \frac{p}{4q}. \tag{5.17}$$

Заметим, что для любого $a < 0$

$$\int_0^1 \frac{e^{-(a+b)x}}{\sqrt{1-x}}dx < e^{-a}\int_0^1 \frac{e^{-bx}}{\sqrt{1-x}}dx. \tag{5.18}$$

Из (5.16) и (5.18) следует, что при $n \geq 1$

$$f\big(2pq(n-1)\big) < e^{2pq} f(2pqn) < \frac{e^{2pq}}{4pqn}.$$

Отсюда ввиду (1.21) получаем

$$d_K(F_n, \Pi_\lambda) < \frac{e^{2pq}p}{4q}. \tag{5.19}$$

Сравним теперь оценки (5.17) и (5.19). Нетрудно видеть, что при $x > 1$

$$\frac{1}{x} < \ln x - \ln(x-1) < \frac{1}{x-1}.$$

Отсюда

$$e^{1/x} < \frac{x}{x-1} < e^{1/(x-1)}. \tag{5.20}$$

Пусть $2pqn \leq 1$. Тогда ввиду левого неравенства в (5.20) имеем

$$e^{2pq} \leq e^{1/n} < \frac{n}{n-1}. \tag{5.21}$$

Если $2pq \geq \frac{1}{n-1}$, то вследствие правого неравенства в (5.21) получаем

$$\frac{n}{n-1} \leq e^{1/(n-1)} < e^{2pq}. \tag{5.22}$$

Из (5.17), (5.19), (5.21) и (5.22) следует желаемый результат.

§6. Доказательство теоремы 3

В силу леммы 3.1 имеем

$$\begin{aligned} &D_p\big(\Pi(k+;np) - B_n(k+;p)\big) \\ &\quad = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{D_p\big(1+p(z-1)\big)^n - D_p e^{np(z-1)}}{z-1} z^{-k-1} dz. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Очевидно,

$$\begin{gathered} D_p\big(1+p(z-1)\big)^n = n(z-1)\big(1+p(z-1)\big)^{n-1}, \\ D_p e^{np(z-1)} = n(z-1)e^{np(z-1)}. \end{gathered}$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
&D_p\bigl(1+p(z-1)\bigr)^n - D_p e^{np(z-1)}\\
&\quad= \Bigl(n(z-1)\bigl(1+p(z-1)\bigr)^{n-1} - e^{(n-1)p(z-1)}\Bigr) + \Bigl(e^{(n-1)p(z-1)} - e^{np(z-1)}\Bigr).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\int_{|z|=1} \frac{D_p\bigl(1+p(z-1)\bigr)^n - D_p e^{np(z-1)}}{z-1} z^{-k-1} dz\\
&\quad= n\int_{|z|=1} \Bigl(\bigl(1+p(z-1)\bigr)^{n-1} - e^{(n-1)p(z-1)}\Bigr) z^{-k-1} dz\\
&\qquad+ n\int_{|z|=1} \bigl(e^{(n-1)p(z-1)} - e^{np(z-1)}\bigr) z^{-k-1} dz\\
&\quad= nI_1(k) + nI_2(k).
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Очевидно, что при $n \geq 2$

$$
\begin{aligned}
&e^{(n-1)(z-1)} - \bigl(1+p(z-1)\bigr)^{n-1}\\
&\quad= \bigl(e^{p(z-1)} - 1 - p(z-1)\bigr) \sum_{j=0}^{n-2} e^{jp(z-1)} \bigl(1+p(z-1)\bigr)^{n-j-2}.
\end{aligned}
$$

Согласно лемме 3.2 имеем

$$
\left| \frac{e^{p(z-1)} - 1}{z-1} - p \right| < \frac{p^2}{2} |z-1|.
$$

Отсюда, применяя (3.6)–(3.8), на единичной окружности находим, что

$$
\begin{aligned}
&\left| e^{p(n-1)(z-1)} - \bigl(1+p(z-1)\bigr)^{n-1} \right|\\
&\quad< \frac{p^2}{2} |z-1|^2 \sum_{j=0}^{n-2} \left|e^{p(z-1)}\right|^j \left|\bigl(1+p(z-1)\bigr)\right|^{n-j-2}\\
&\quad= \frac{p^2}{2} \left|e^{i\varphi} - 1\right|^2 \sum_{j=0}^{n-2} \left|e^{p(e^{i\varphi}-1)}\right|^j \left|(1+p\bigl(e^{i\varphi}-1\bigr)\right|^{n-j-2}\\
&\quad< 2(n-1)p^2 \sin^2\bigl(\varphi/2\bigr) e^{-2(n-2)pq\sin^2\varphi/2},
\end{aligned}
$$

где $z = e^{i\varphi}$. Следовательно,

$$
\bigl|I_1(k)\bigr| < 2(n-1)p^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\bigl(\varphi/2\bigr) e^{-2(n-2)pq\sin^2(\varphi/2)} d\varphi.
$$

Нетрудно видеть, что для любого $b > 0$

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \sin^2\big(\varphi/2\big)e^{-b\sin^2(\varphi/2)}d\varphi\\&= 2\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi e^{-b\sin^2\varphi}d\varphi = 2\int_0^1 \frac{x^2e^{-bx^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x^{1/2}e^{-bx}}{\sqrt{1-x}}dx.\end{aligned}$$

Таким образом, при $n \geq 2$

$$\big|I_1(k)\big| < 4(n-1)p^2\int_0^1 \frac{x^{1/2}e^{-bx}}{\sqrt{1-x}}dx = 2\pi(n-1)p^2w_1(b), \tag{6.3}$$

где $b = 2(n-2)pq$.

Нетрудно видеть, что

$$I_2(k) = \int_{-\pi}^{\pi}\Big(e^{(n-1)p(e^{i\varphi}-1)} - e^{np(e^{i\varphi}-1)}\Big)e^{-ik\varphi}d\varphi.$$

Используя теперь (3.6) и (3.8), а затем (3.10), при $n \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned}\big|I_2(k)\big| &< p\int_{-\pi}^{\pi}|e^{i\varphi}-1|\big|e^{(n-1)p(e^{i\varphi}-1)}\big|d\varphi\\&< 2p\int_{-\pi}^{\pi}\big|\sin(\varphi/2)\big|e^{-2(n-1)p\sin^2(\varphi/2)}d\varphi\\&= 4p\int_0^1\frac{e^{-2(n-1)px}}{\sqrt{1-x}}dx := 4\pi pw\big(2(n-1)p\big).\end{aligned} \tag{6.4}$$

Из (6.1)–(6.4) следует, что для любых $n \geq 2$ и $k \geq 1$

$$\begin{aligned}&\Big|D_p\big(\Pi(k+;np) - B_n(k+;p)\big)\Big|\\&\qquad< n(n-1)p^2w_1\big(2(n-2)pq\big) + 2npw\big(2(n-1)p\big).\end{aligned} \tag{6.5}$$

Поскольку

$$\lim_{k\to\infty}\big(\Pi(k+;np) - B_n(k+;p)\big) = 0,$$

для любых n и p существует $k_p(n)$ такое, что

$$\Big|\Pi\big(k_p(n)+;np\big) - B_n\big(k_p(n)+;p\big)\Big| = d_K(F_n,\Pi_\lambda). \tag{6.6}$$

Из (6.5) и (6.6) следует, что для $k \geq 1$, $n \geq 2$

$$\big|D_pd_K(F_n,\Pi_\lambda)\big| < n(n-1)p^2w_1\big(2(n-2)pq\big) + 2npw\big(2(n-1)p\big).$$

Итак, мы доказали п. (a) теоремы 3.

Обратимся теперь к п. (b). Если $n = 1$, то $I_1(k)$ в (6.2) обращается в 0 и

$$I_2(k) = \int_{|z|=1} \bigl(1 - e^{p(z-1}\bigr) z^{-k-1} dz.$$

Отсюда, используя (3.6), находим, что

$$\bigl|I_2(k)\bigr| < \int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\varphi} - 1|\, d\varphi < 2p \int_{-\pi}^{\pi} \bigl|\sin(\varphi/2)\bigr|\, d\varphi = 8p. \tag{6.7}$$

Из (6.1), (6.2) и (6.7) следует, что при любом $k \geq 1$

$$\Bigl|D_p\bigl(\Pi(k+;p) - B(k+;p)\bigr)\Bigr| < \frac{4}{\pi} p.$$

Для завершения доказательства утверждения (b) теоремы остается воспользоваться (6.6).

§7. Доказательство следствия 4

Обозначим

$$f_1(b) = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} e^{-bx} dx.$$

Вычисления показывают, что

$$\max_{0<b<\infty} b^{3/2} f_1(b) = b^{3/2} f_1(b)\Big|_{b=290403} = 1.21168.$$

Таким образом,

$$f_1(b) < cb^{-3/2}, \tag{7.1}$$

где $c = 1.21168$. Для любого $a < 0$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} e^{-(a+b)x} dx < e^{-a} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} e^{-bx} dx. \tag{7.2}$$

Из (7.1) и (7.2) следует, что при $n \geq 3$

$$f_1\bigl(2(n-2)pq\bigr) < \frac{ce^{4pq}}{(2npq)^{3/2}}.$$

Отсюда находим

$$n(n-1)p^2 w_1\bigl(2(n-2)pq\bigr) < \frac{c\sqrt{\lambda} e^{4pq}}{\sqrt{2}\pi q^{3/2}}. \tag{7.3}$$

Далее, вследствие (5.16) и (5.18) имеем

$$f\bigl(2(n-1)p\bigr) < \frac{e^{2p}}{4pn}.$$

Следовательно,

$$2npw\bigl(2(n-1)p\bigr) < \frac{e^{2p}}{2\pi}. \tag{7.4}$$

Из (1.31), (7.3) и (7.4) следует (1.33). Таким образом, мы доказали п. (a) следствия 4.

Перейдем теперь к доказательству п. (b). Вследствие (1.30) и (1.31)

$$\bigl|D_p d_K(F_2, \Pi_\lambda)\bigr| < 2p^2 w_1(0) + 2pw(2p) = 2p^2 + 2pw(2p),$$

что и требовалось доказать.

Автор выражает благодарность В. И. Чеботареву, который составил таблицы 1–3, помещенные в работе.

Список литературы

1. *Колмогоров А. Н.* Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых // *ТВП.* 1956. Т. 1, № 4. С. 426–436.
2. *Прохоров Ю. В.* Асимптотическое поведение биномиального распределения // *УМН.* 1953. Т. 8, С. 135–142.
3. *Цареградский И. П.* О равномерном приближении биномиального распределения неограниченно делимыми законами // *ТВП.* 1958. Т. 3, № 4. С. 470–474.
4. *Barbour A. D. and Hall P.* On the rate of Poisson convergence //*Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1984. V. 95. P. 473–480.
5. *Le Cam L.* An approximation theorem for the Poisson binomial distribution // *Pacific J. Math.* 1960. V. 10. P. 1181–1197.
6. *Daley D. J. and Vere-Jones D. An Introduction to the Theory of Point Processes.* Vol. II: *General Theory and Structure* / Probability and Its Applications. 2nd revised and extended ed. New York, NY: Springer-Verlag, 2008.
7. *Franken P.* Approximation des Verteilungen von Summen unabhängiger nichtnegativer ganzzahler Zufallsgrössen durch Poissonsche Verteilungen // *Math. Nachr.* 1964. V. 23. P. 237–340.
8. *Hipp C.* Approximation of aggregate claims distribution by compound Poisson distributions // *Insurance Math. Econom.* 1985. V. 4. P. 227–232; correction note: 1985. V. 6. P. 165.

9. *Kennedy J. E. and Quine M. P.* The total variation distance between the binomial and Poisson distributions // *Ann. Probab.* 1989. V. 17. P. 396–400.
10. *Kruopis Y.* Precision of approximation of the generalized binomial distribution by convolutions of Poisson measures // *Lith. Math. J.* 1986. V. 26. P. 37–59.
11. *Makabe H.* On the approximations to some limiting distributions with some applications // *Kōdai Math. Semin. Rep.* 1962. V. 14. P. 123–133.
12. *Novak S. Y.* Poisson approximation // *Probab. Surv.* 2019. V. 16. P. 228–276.
13. *Serfling R. J.* Some elementary results on Poisson approximation in a sequence of Bernoulli trials // *SIAM Rev.* 1978. V. 20. P. 567–579.
14. *Zacharovas V. and Hwang H-K.* A Charlier–Parseval approach to Poisson approximation and its applications // *Lith. Math. J.* 2010. V. 50, N 1. P. 88–119.

On the accuracy of approximation of the binomial distribution by the Poisson law

S. V. Nagaev

Abstract. We derive many new estimates for the proximity of the binomial distribution to the Poisson distribution in the uniform metric and propose a combined approach to estimating the distance in a uniform metric when, for small n and large p, the estimation is performed on using a computer and, for the remaining values of n and p, the estimates obtained analytically are used.

Keywords: arithmetic distribution function, Bernoulli random variables, complex analysis, generation function, Poisson law.

Нагаев Сергей Викторович
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
E-mail: nagaev@math.nsc.ru,
nagaevs@hotmail.com

Поступила в редакцию
24 декабря 2020 г.
Получена после доработки
30 марта 2021 г.
Принята к публикации
31 марта 2021 г.