1. Цепи Маркова

1.1. Введение. В моей работе [1] (см. список литературы в конце раздела), вышедшей в 1957 г., для асимптотического анализа цепей Маркова впервые была применена *спектральная теория линейных операторов в банаховом пространстве*. Этот подход с успехом используется и поныне.

Продолжением работы [1] была статья [2], в которой впервые были введены разложения Эджворта и доказаны теоремы о больших отклонениях типа Крамера. В [3] спектральный метод впервые был распространен на харрисовские цепи Маркова. В статье [4], опубликованной в 1965 г., впервые в полном объеме доказаны эргодические теоремы для харрисовских цепей Маркова.

В статьях [5–7] разрабатывается аналитический подход к харрисовским цепям, альтернативный к вероятностному методу расщепления Нуммелина – Атрейя – Нея. Ничего похожего в мировой литературе нет.

1.2. Спектральный метод. С цепями Маркова связано начало моей научной деятельности. По традиции исследования по цепям Маркова занимали в Ташкентском университете почетное место. Мое внимание к цепям Маркова привлек Т.А. Сарымсаков, который был руководителем моей дипломной работы, а затем и кандидатской диссертации. К середине 50-х годов теория цепей с конечным множеством состояний была в основном завершена. С.Х. Сираждинову [8] удалось даже построить асимптотические разложения в многомерной центральной предельной теореме.

В то же время асимптотический анализ цепей Маркова с произвольным и даже счетным множеством состояний сдерживался из-за отсутствия адекватного аналитического аппарата. Эта проблема в то время меня очень интересовала. Весной 1956 г., когда я готовился к кандидатскому экзамену по функциональному анализу и знакомился в связи с этим со спектральной теорией банаховых алгебр, мне пришло в голову, что последняя может послужить основой для искомого аналитического метода. Эту идею я осуществил в статье [1]. Надо сказать, что в то время никто из вероятностников не владел спектральной теорией банаховых алгебр, так что моя работа оказалась весьма неожиданной. Предложенный мною аналитический подход был использован в [1] для доказательства центральной предельной теоремы для суммы случайных величин, заданных на однородной цепи Маркова, при минимальных моментных предположениях. Исследования, начатые в [1], были продолжены в моей работе [2], где были выведены асимптотические разложения в центральной предельной теореме. Упомянутый аналитический подход непосредственно применим лишь к цепям, удовлетворяющим условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \sup_{A \in S} |p^{(n)}(x) - p(A)| = 0. \quad (1)$$

Здесь X – фазовое пространство, S – σ -алгебра, на которой задана переходная вероятность $p^{(n)}(x, A)$ и предельное распределение p . Заметим, что скорость сходимости в (1) необходимо экспоненциальная. С точки зрения концепции слабой зависимости соотношение (1) означает, что коэффициент равномерно сильного перемешивания сходится к 0 при $n \rightarrow \infty$.

1.3. Распространение спектрального метода на харрисовские цепи. Аналитический метод, использованный в [1], был распространен в моей статье [3] на цепи, удовлетворяющие условиям:

(А) Существует множество $A_0 \in S$, неотрицательная мера ϕ с $\phi(A_0) > 0$ и натуральное $n_0 \geq 1$ такие, что

$$p_0^{(n_0)}(x, y) > \delta > 0$$

для $x \in A_0, y \in A_0$, где $p_0^{(k)}(x, \cdot)$ – плотность абсолютно непрерывной относительно ϕ компоненты $p^{(k)}(x, \cdot)$.

(В) $\mathbf{P}(X_n \in A_0 \text{ хотя бы при одном } n > 0 | X_0 = x) = 1$ при любом $x \in X - A_0$, где $\{X_n\}, n = 0, 1, \dots$, – цепь Маркова с фазовым пространством X .

Возможность такого обобщения априори была отнюдь не очевидна. Была разработана специальная конструкция, которая позволила произвести редукцию к случаю, рассмотренному в статьях [1] и [2].

1.4. Локальные предельные теоремы. Локальные предельные теоремы для счетных цепей Маркова были предметом моих работ [9] и [10]. В статье [9] доказывается локальная предельная теорема для цепей, удовлетворяющих так называемому условию Маркова: $p_{ji} > \lambda > 0$ для всех j . Это условие обеспечивает равномерную эргодичность в смысле (1). Общий случай рассматривается в работе [10]. Объектом исследования в [10] является положительная непериодическая цепь Маркова со счетным множеством возможных состояний $e_j, j = 1, 2, \dots, \infty$. Соответствующие переходные вероятности обозначим через p_{ij} . Пусть q_n – вероятность того, что первое возвращение в e_1 произойдет в n -й момент времени.

Положим

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} nq_n, \quad \mu_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2q_n.$$

Пусть ω_n – последовательность состояний $e_1, e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$ такая, что $i_k \neq 1, k = 1, 2, \dots, n$. Если $i_k \neq 1$ для $k = 1, 2, \dots, n-1$ и $i_n = 1$, то соответствующую последовательность состояний мы обозначим $\bar{\omega}_n$. Пусть $\mathbf{P}(\omega_n)$ и $\mathbf{P}(\bar{\omega}_n)$ – вероятности осуществления соответственно ω_n и $\bar{\omega}_n$.

Рассмотрим действительную функцию $f(e_j) = a + k(e_j)h$, где $k(e_j)$ принимает целые значения, a и h – действительные числа. Определим случайную величину $\bar{f}(\bar{\omega}_n)$, положив

$$\bar{f}(\bar{\omega}_n) = \sum_{k=1}^n f(e_{i_k}).$$

Пусть Z – множество двумерных векторов с целыми координатами, представимых в виде комбинации векторов вида $\left(\frac{\bar{f}(\bar{\omega}_n) - na}{h}, n\right)$ с целыми коэффициентами при условии, что $\mathbf{P}(\bar{\omega}_n) > 0$.

Рассмотрим сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(E_k) - na,$$

где E_k – состояние, в котором система находится в k -й момент времени.

Положим

$$z_{nk} = \frac{an + kh - A_n}{\sigma\sqrt{n}},$$

где $A_n = \frac{1}{\mu_1} n \mathbf{E} \bar{f}$, $\sigma^2 = \frac{1}{\mu_1} \mathbf{E} \bar{f}_1^2$,

$$\bar{f}_1(\bar{\omega}_n) = \bar{f}(\bar{\omega}_n) - \frac{n}{\mu_1} \mathbf{E} \bar{f}.$$

В этих обозначениях локальная теорема формулируется следующим образом: *Если Z совпадает со множеством всех двумерных векторов с целыми координатами, $\mu_2 < \infty$ и $0 < \sigma < \infty$, то равномерно относительно k*

$$\frac{\sigma \sqrt{n}}{h} \mathbf{P}(S_n = kh) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z_{nk}^2} \rightarrow 0.$$

Ранее локальные предельные теоремы доказывались только для конечных цепей Маркова.

1.5. Эргодические теоремы. Наряду с предельными теоремами для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова, я занимался изучением эргодических свойств цепей Маркова, удовлетворяющих условиям **(A)** и **(B)**. Заметим, что эти условия гораздо более эффективны, нежели условие возвратности Харриса. В моей работе [4] было доказано, что *при условиях **(A)** и **(B)** для цепи $\{X_n\}$, $n = 0, 1, \dots$, существует конечная или σ -конечная инвариантная мера q , причем*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(x, B) = q(B), \quad (2)$$

если $q(X) < \infty$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(x, B) = 0, \quad (3)$$

если $q(X) = \infty$, но $q(B) < \infty$.

Исследования по цепям Маркова, выполненные в 1957 – 1962 гг., составили предмет моей кандидатской [11] и докторской [12] диссертаций.

В 1978 г. в одновременно появившихся работах Атрейя и Нея [13] и Нуммелина [14] был предложен новый метод доказательства эргодических теорем, основанный на регенерирующем расширении цепи Маркова. При этом наряду с условием **(B)** используется слегка видоизмененное условие **(A)**:

Существуют множества $A_0 \in S$, неотрицательная мера $\phi(A) > 0$, определенная на $A_0 S$ с $\phi(A_0) > 0$, и n_0 такие, что для всех $x \in A_0$ и $B \in A_0 S$

$$p^{(n_0)}(x, B) \geq \phi(B).$$

В рамках предложенного ими подхода авторы [13] и [14] доказывают существование инвариантной меры и утверждения (2) и (3), т.е. то, что было получено в моей статье [4]. Какие-либо ссылки на мою работу [2] в [13] и [14] отсутствуют.

1.6. Альтернатива методу Нуммелина – Нея. В 80-е годы в связи со статьями [13] и [14] я вернулся к цепям Маркова. В работе [5] я предложил новый аналитический метод доказательства эргодических теорем, альтернативный чисто вероятностному подходу Атрейя–Нея и Нуммелина.

В основе этого метода лежит представление переходной функции $p^{(n_0)}(\cdot, \cdot)$ в виде суммы двух субстохастических переходных функций

$$p^{(n_0)}(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, \cdot) + \phi(\cdot, \cdot),$$

где $\omega(\cdot, \cdot) = p^{(n_0)}(\cdot, \cdot) - \phi(\cdot, \cdot)$. Обозначим через P, Ω, Φ – марковские операторы, определяемые соответственно переходными функциями $p^{(n_0)}(\cdot, \cdot), \omega(\cdot, \cdot), \phi(\cdot, \cdot)$. Предположим для простоты, что $n_0 = 1$. Теперь воспользуемся тождеством

$$(a + b)^n = a^n + \sum_1^n a^{n-k} b (a + b)^{k-1}, \quad n \geq 1,$$

где a и b – элементы любого кольца.

Полагая $a = \Omega, b = \Phi$, мы получаем

$$P^n = \Omega^n + \sum_1^n \Omega^{n-k} \Phi P^{k-1}. \quad (4)$$

Так как для любых k, j

$$\int_X \omega^{(k)}(x, dy) \int_X p^{(j)}(z, B) \phi(y, dz) = \omega^{(k)}(x, A_0) \int_{A_0} p^{(j)}(z, B) \phi(dz),$$

из (4) следует

$$p^{(n)}(x, B) = \omega^{(n)}(x, B) + \sum_1^n \omega^{(n-k)}(x, A_0) p_{k-1}(B), \quad (5)$$

где

$$p_k(B) = \int_{A_0} p^{(k)}(z, B) \phi(dz), \quad k \geq 1, \quad p_0(B) = \phi(A_0 B).$$

Интегрируя обе части (5) по мере ϕ , имеем

$$p_n(B) = \omega_n(B) + \sum_1^n \omega_{n-k}(A_0) p_{k-1}(B),$$

где $\omega_k(B) = \int_B \omega^{(k)}(x, B) \phi(dx)$. Таким образом, для последовательности $p_n(B)$ имеет место рекуррентное соотношение, аналогичное тому, которому удовлетворяют локальные вероятности восстановления.

Отсюда при $\sum_0^\infty \omega_k(B) < \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(B) = \frac{1}{\mu} \sum_0^\infty \omega_k(B), \quad (6)$$

где $\mu = \sum_0^\infty (k+1) \omega_k(A_0)$, причем $1/\mu = 0$, если $\mu = \infty$.

В работе [5] доказывается, что $q(B) := \sum_0^\infty \omega_k(B)$ является инвариантной мерой. Что касается μ , то оно связано с q соотношением

$$\mu = q(X)/\phi(A_0).$$

В результате мы получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(B) = \frac{q(B)\phi(A_0)}{q(X)},$$

если $q(X) < \infty$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(B) = 0,$$

если $q(X) = \infty$, $q(B) < \infty$.

Возвращаясь теперь к равенству (5) и учитывая, что

$$\sum_o^{\infty} \omega^{(k)}(x, A_0) = \frac{1}{\phi(A_0)},$$

мы получаем утверждения (2) и (3). В [5] рассматриваются апериодические цепи. На периодические цепи подход, предложенный в [5], распространяется в моей статье [6].

Список литературы

- [1] Нагаев С.В. Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова. Теория вероятн. и ее примен., **2**, N4, 1957, 389-416. **PDF**
- [2] Нагаев С.В. Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова. Теория вероятн. и ее примен., 1961, **6**, N1, 67-86. **PDF**
- [3] Нагаев С.В. Центральная предельная теорема для марковских процессов с дискретным временем. Изв. АН УзССР, серия физ.-мат., 1962, №2, 12-20. **PDF**
- [4] Нагаев С.В. Эргодические теоремы для марковских процессов с дискретным временем. Сиб. мат. журн., 1965, **6**, №2, 413-432. **PDF**
- [5] Нагаев С.В. Об эргодической теореме для однородных цепей Маркова. ДАН СССР, 1982, **263**, N1, 27-30. **PDF**
- [6] Нагаев С.В. Эргодические теоремы для однородных цепей Маркова. ДАН СССР, 1989, **306**, N2, 283-286. **PDF**
- [7] Нагаев С.В. Аналитический подход к цепям Маркова, возвратным по Харрису, и оценка Берри-Эссеена // Докл. РАН, 1998, **359**, № 5, 590-592. **PDF**
- [8] Сираждинов С.Х. Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Ташкент, УзССР, 1955.
- [9] Нагаев С.В. О локальной предельной теореме для последовательности случайных величин, связанных в простую однородную цепь Маркова со счетным множеством возможных значений. Изв. АН УзССР, серия физ.-мат., 1957, №3, 71-77. **PDF**
- [10] Нагаев С.В. Локальная предельная теорема для счетных цепей Маркова. Сб. "Предельные теоремы теории вероятн.", Ташкент, 1963, 69-74. **PDF**

- [11] Нагаев С.В. Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова. Кандидатская диссертация. ТашГУ, Ташкент, 1958, 57 с.
- [12] Нагаев С.В. Предельные теоремы для марковских процессов с дискретным временем. – Дисс. на соискание степени д.ф.-м.н. Институт математики АН УзССР, Ташкент, 1963, 147 с.
- [13] Athreya K.B., Ney P. A new approach to the limit theory of recurrent Markov chains. Trans.Amer. Math., Soc., 1978, **245**, 493-501.
- [14] Nummelin E. A splitting technique for Harris recurrent Markov chains. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1978, B.43, H 4, 309-318.

2008 г.