2. Большие уклонения сумм независимых случайных величин: асимптотические формулы

2.1. Введение. Пусть $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией $S_n = \sum_{i=1}^n X_i,\ F(x) = \mathbf{P}(X < x),\ F_n(x) = \mathbf{P}(S_n < x)$.

Ю.В. Линник в цикле работ [1] изучал условия, при которых вероятность $\mathbf{P}(S_n > x\sqrt{n})$ аппроксимируется при $n \to \infty$ вероятностью $\mathbf{P}(Y > x)$, где Y - случайная величина, имеющая стандартное гауссовское распределение в зоне $0 < x < \Lambda(n),\ \Lambda(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Метод Линника основан на прямом анализе поведения характеристической функции на действительной оси и технически очень сложен.

В 1965г. я опубликовал работу [2], в которой был предложен совершенно другой, значительно более простой подход к доказательству предельных теорем типа Линника, который основан на предварительном урезании случайных величин, образующих сумму. Достаточно заметить, что статьи Линника в сумме содержат 50 стр., в то время как доказательство соответствующих результатов в [2] занимает меньше 6 страниц. Условия на распределение слагаемых в [2] также сильно упрощены по сравнению с [1]. С тех пор подход, предложенный в [2], неоднократно использовался разными авторами. Как в [1], так и в [2] условия на распределение слагаемых накладываются в форме неравенств. Чтобы получить асимптотику вероятностей больших уклонений $\mathbf{P}(S_n > x\sqrt{n})$ при $x > \Lambda(n)$, нужно потребовать, чтобы функция $\mathbf{P}(X > x)$ правильно менялась при $x \to \infty$, в том или ином смысле.

Первый результат в этом направлении был представлен в моем докладе на конференции в Ужгороде в октябре 1959г. Текст доклада опубликован в журнале "Теория вероятностей и ее применения"(см. [3]). Полное доказательство содержится в [4]. Условие на $\mathbf{P}(X > x)$ в [3] формулируется в терминах характеристической функции $\mathbf{E}e^{itX}$. Из него следует, что при $x \to \infty$

$$\mathbf{P}(X > x) \sim \frac{c}{x^\alpha},\ \alpha > 2. \tag{1}$$

Что касается самих результатов в [3] и [4], то они даются в виде локальных теорем для распределения $F_n(x)$ в области $0 < x < o(\sqrt{n})$. Из этих теорем, в частности, следует, что при степенном убывании $\mathbf{P}(X > x)$ достаточно большие уклонения S_n получаются в основном за счет одного слагаемого. Однако значение работы [4] состоит не только в том, что в ней открыт новый феномен. Следует также отметить, что в ней впервые с успехом применен комплексный анализ в случае, когда нарушено условие Крамера. Подробнее о работах [3] и [4] см. в п. 2.3.

В следующей моей работе [5] (см. также [6]) выведено асимптотическое представление

$$1 - F_n(x) \sim n(1 - F(x)) \tag{2}$$

для $x = x(n)$, стремящихся к бесконечности достаточно быстро в предположении, что $F(x)$ аппроксимируется на бесконечности распределением с вполне монотонной плотностью.

Отметим, что в работе [5] впервые был использован новый подход, основанный на представлении характеристической функции аппроксимирующего распределения G в виде интеграла типа Коши на положительной полупрямой. Усовершенствованные результаты типа (2) при условии (1) позднее были получены А.В. Нагаевым [7, 8], чисто вероятностным методом.

Асимптотическое выражение для $\mathbf{P}(S_n > x)$ при условиии, что $\mathbf{E}X = 0$ и $\mathbf{P}(X > x) \sim \frac{c}{x^\alpha}, \alpha > 1$, выведено в моей работе [9].

В 1969г. А.В. Нагаев в [10] вывел асимптотику для $\mathbf{P}(S_n > x)$ на всей оси в предположении,что

$$p(x) \sim e^{-x^\alpha},\ 0 < \alpha < 1,$$

где $p(x)$ - плотность распределения случайной величины X_1. Метод доказательства в [10] чисто вероятностный.

Несколько лет спустя, в 1973г. вышла моя статья [11], где теорема о больших уклонениях на всей оси доказана для более широкого, чем в [10], класса функций распределения. Метод доказательства в [11], в отличие от [10], является аналитическим. Начальные элементы этого метода содержатся в работе [5], речь о которой уже шла выше. Главный результат работы [11] формулируется также в [12].

2.2. Теоремы о больших уклонениях Ю.В. Линника. Линник [1] первым начал исследовать асимптотику вероятностей больших уклонений в случае, когда нарушается известное условие Крамера

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x) < \infty, \quad |t| < t_0, \tag{3}$$

где $F(x)$ – функция распределения отдельного слагаемого. Результаты исследований Линника изложены также в монографии [13] (гл. 11–14). Линник рассматривал распределения, удовлетворяющие условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{h(|x|)} dF(x) < \infty, \tag{4}$$

где $h(x)$ принадлежит одному из описываемых ниже классов.

Класс **I**: функции $h(x)$, удовлетворяющие условиям

$$(\ln x)^{2+\xi_0} \le h(x) \le x^{1/2}$$

($\xi_0 > 0$ сколь угодно мало). Кроме того, $h(x)$ допускает представление

$$h(x) = \exp\{H(\ln x)\},$$

где $H(x)$ – монотонная дифференцируемая функция такая, что

$$H'(z) \le 1,\ \ H'(z) \to 0 \text{ при } z \to \infty,$$

$$H'(z) \exp\{H(z)\} > c_1 z^{1+\xi_1},\ \ \xi_1 > 0.$$

Класс **II**: неубывающие непрерывные функции $h(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\rho_0(x) \ln x \le h(x) \le (\ln x)^2,$$

где $\rho_0(x)$ сколь угодно медленно стремится к бесконечности. Кроме того, $h(x)$ может быть представлена в виде

$$h(x) = M(x)\ln x = N(\ln x)\ln x,$$

причем $N'(z) \to 0$ при $z \to \infty$.

Класс **III**: функции $h(x)$, удовлетворяющие условиям

$$3\ln x \le h(x) \le M\ln x,$$

где $M \ge 3$ некоторая постоянная.

Линник доказал, что при условии (4) для $0 < x < \Lambda(n)\rho(n)n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x/\sqrt{n})} = 1, \tag{5}$$

где $\rho(n)$ – сколь угодно медленно стремящаяся к 0 функция, а $F_n(x)$ – функция распределения суммы S_n. Граница $\Lambda(n)$ зависит от того, какому классу принадлежит $h(x)$. Для класса **I** $\Lambda(n)$ определяется уравнением

$$h(\Lambda(n)) = n\Lambda^2(n).$$

Для класса **II**

$$\Lambda(n) = \sqrt{nh(x)} = \sqrt{M(n)n\log n}.$$

Для класса **III**

$$\Lambda(n) = \sqrt{n\log n}.$$

2.3. Альтернативный метод доказательства теорем типа Линника. На рубеже 1950–1960-ых гг. всеобщий интерес вызывала проблема получения оценки вида

$$\left| F_n(x\sqrt{n}) - \Phi(x) \right| < cg(x)\beta_3/n^{1/2} \tag{6}$$

с оптимальной функцией $g(x)$, где $\beta_3 = \mathbf{E}|X_1|^3$. Вследствие (2) универсальная функция $g(x)$ не может убывать быстрее $1/|x|^3$. Можно сказать, что неравенство (6) – это более грубый, но зато собирательный вариант соотношения (2).

Пытаясь распространить соотношение типа (2) на более широкий класс распределений посредством предварительного урезания с последующим применением метода перевала, я натолкнулся на оценки для вероятностей больших уклонений неизвестного ранее вида, действующие для достаточно больших $x > \psi(n)$ (n – число слагаемых). Мне не удалось до конца осуществить задуманный план, зато вышеупомянутый подход дал возможность получить оценку (6) с $g(x) = 1/(1 + |x|^3)$. Новый подход дал также возможность упростить и уточнить асимптотические результаты Линника, о которых речь шла выше, а именно, был введен более широкий и просто описываемый класс функций, нежели классы **I** и **II** Линника. Этот класс состоит из непрерывных функций $g(x)$ с монотонно убывающей непрерывной производной, удовлетворяющей условиям

$$0 < g'(x) < \frac{\alpha\, g(x)}{x}, \quad \alpha < 1, \quad x > B(g), \tag{7}$$

и
$$g(x) > \rho(x)\ln x, \tag{8}$$
где $\rho(x)$ – функция, сколь угодно медленно стремящаяся к бесконечности при $x \to \infty$, $B(g)$ – положительная постоянная, зависящая от g. Для этого класса был получен следующий результат.

Теорема 3.1. *Если*
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{g(|x|)} dF(x) < \infty,$$
то при $0 \le x \le \Lambda(n)$
$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x/\sqrt{n})} = \exp\Big\{-\frac{x^3}{n^2}\lambda_{[\alpha/(1-\alpha)]}\Big(-\frac{x}{n}\Big)\Big\}(1 + o(1)), \tag{9}$$
где $\Lambda(n)$ *– решение уравнения* $x^2 = ng(x)$, *а* $\lambda_{[\alpha/(1-\alpha)]}$ *– отрезок ряда Крамера, содержащий* $[\alpha/(1-\alpha)]$ *первых членов.*

Условие (7) означает, что функция $g(x)$ имеет представление
$$g(x) = c\exp\Big\{\int_1^x \frac{\alpha(y)}{y}\,dy\Big\},\ 0 < \alpha(y) < 1, \tag{10}$$
которое отличается от известного представления для медленно меняющейся функции тем, что $\alpha(y)$, вообще говоря, не стремится к 0 при $y \to \infty$.

Нетрудно видеть, что класс функций $g(x)$, удовлетворяющих условиям (7) с $\alpha < 1/2$ и (8), содержит классы **I** и **II**, введенные Линником [1].

Теорема 3.2. *Если*
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^m dF(x) < \infty, \tag{11}$$
то при $0 \le x \le \sqrt{\Big(\frac{m}{2} - 1\Big) n \ln n}$
$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x/\sqrt{n})} \to 1.$$

В дальнейшем Р. Михель [14] показал, что утверждение теоремы 3.2.справедливо в более широкой области значений x.

Условие (11) соответствует условию (4) для $h(x) = m\ln x$. Очевидно, эта функция принадлежит классу **III** Линника. Заметим, что границы в теоремах 1 и 2 являются более точными, чем у Линника. Эти теоремы, а также неравномерная оценка
$$|F_n(x) - \Phi(x\sqrt{n})| < c\beta_3/(1 + |x|^3)n^{1/2} \tag{12}$$
вошли в мою статью [2]. Эта статья продемонстрировала эффективность метода урезания при изучении больших уклонений. Вскоре оценка (12) была перенесена А. Бикялисом [15] на разнораспределенные слагаемые. Работы Л.В. Осипова по большим

уклонениям (см., например, [16]) также выполнены под влиянием работы [2]. Идеи, заложенные в работе [2], использованы в статьях А.А. Боровкова [17] и [18]. К последним мы вернемся ниже.

2.4. Предельные теоремы на всей оси. Первый общий результат об асимптотическом поведении вероятностуй больших уклонений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин был получен Г.Крамером [19], который доказал, что при условии (3)

$$\frac{1-F_n(x\sqrt{n})}{1-\Phi(x)} \sim \exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\ \lambda\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\right\}, \tag{13}$$

если $x = o(\sqrt{n})$. Здесь $\lambda(z)$ – степенной ряд, который называется рядом Крамера. При выводе асимптотической формулы (13) Крамер использовал метод сопряженных распределений.

Если выполняется условие Крамера (3), то производящая функция моментов $\int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} dF(x)$ аналитична в полосе $|Rez| < t_0$. Это дает возможность использовать при анализе больших уклонений метод перевала. Этот метод, в частности, был применен В.Рихтером [20] при доказательстве локальной предельной теоремы о больших уклонениях. В случае, когда условие Крамера не выполняется, характеристическая функция не может быть продолжена в комплексную плоскость как аналитическая в некоторой полосе функция, и, следовательно, метод перевала не применим (впрочем как и метод сопряженных распределений). Тем не менее, комплексный анализ удалось применить и при нарушении условия Крамера. Впервые это было сделано в моей работе [4] (результаты этой работы были анонсированы в [3].) В этой работе предполагается, что производящая функция моментов продолжается с мнимой оси в правую полуплоскость в многолистную функцию, имеющую особенность в точке 0. Это дает возможность изменять контур интегрирования.

Чтобы читатель получил более точное представление о содержании работы [4], сформулируем один из полученных в ней результатов.

Мы будем по-прежнему предполагать, что $X, X_1X_2, ..., X_n...$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$, причем $\mathbf{D}X < \infty$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{E}X = 0$ и $\mathbf{D}X = 1$. Напомним, что $F_n(x) := \mathbf{P}(S_n < x)$.

Пусть класс $D_\alpha, 0 < \alpha \le 1$ функций комплексного переменного определяется следующим образом: $f(z) \in D_\alpha$, если ее можно представить в форме

$$\begin{array}{rl} cz^\alpha(1+\psi(z)) & \text{при } \alpha < 1, \\ cz\ln z(1+\psi(z)) & \text{при } \alpha = 1, \end{array} \tag{14}$$

где $\psi(z)$ – ветвь многозначной функции, имеющей точку ветвления в 0, причем $\psi(z)$ аналитична в некотором круге $|z| \le A$, из которого удален отрезок $[0, A]$ и $\lim\limits_{z\to 0} \psi(z) = 0$ (для z^n и $\ln z$ выбираются главные ветви).

Пусть s и p – целые неотрицательные числа. Мы скажем, что функция распределения $F(x)$ принадлежит классу $D^{sp}_{\alpha\beta}$, если

$$\int_0^\infty e^{itx} dF(x) = \sum_{k=0}^{s} \beta_k^+ (it)^k + \phi_\alpha^+(it)(it)^s,$$

$$\int_{\infty}^{0} e^{itx} dF(x) = \sum_{k=0}^{p} \beta_k^-(it)^k + \phi_\beta^-(-it)(it)^p, \tag{15}$$

где $\phi_\alpha^+ \in D_\alpha$ и $\phi_\beta^- \in D_\beta$, причем

$$\frac{d^s}{dz^s} z^{-\alpha} \phi_\alpha^+(z) = o(|z|^{-s})$$

и

$$\frac{d^p}{dz^p} z^{-\beta} \phi_\beta^-(z) = o(|z|^{-p}).$$

Нетрудно видеть, что $F(x) \in D_{\alpha\beta}^{sp}$, например, если

$$F(x) = \begin{cases} \frac{c}{|x|^{p+\beta}}, & x < -1, \\ c, & |x| \le 1, \\ 1 - \frac{1-c}{x^{s+\alpha}}, & x > 1, \end{cases} \tag{16}$$

где $0 < c < 1$ – некоторая постоянная. Заметим, что если $F(x) \in D_{\alpha\beta}^{sp}$, то условие Крамера (3) заведомо не выполняется, поскольку из него следует аналичность функции $\int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} dF(x)$ в некоторой полосе $|Rez| < \delta$.

Теорема 4.1. *Пусть $F(x) \in D_{\alpha\beta}^{sp}$, $s \ge 2, p \ge 2$ и существует n_0 такое, что функция распределения суммы $X_1 + X_2 + ... X_{n_0}$ абсолютно непрерывна и ее производная $p(x)$ ограничена. Тогда при $\alpha < 1$, $x \to \infty$, $x = o(\sqrt{n})$*

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}(1 + o(1)) + \frac{\Gamma(s+\alpha+1) Im[c^+(1 - e^{2\pi i\alpha})]}{2\pi n^{(s+\alpha-2)/2} x^{s+\alpha+1}}(1 + o(1)), \tag{17}$$

где $p_n(x)$ – плотность случайной величины $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Нетрудно проверить, что второе слагаемое в правой части (17) в точности равно плотности $\sqrt{n} p(x\sqrt{n})$ случайной величины $x/\sqrt{n}$, умноженной на n. Таким образом, формулу (17) можно записать в виде

$$p_n(x) \sim \phi(x) + n^{3/2} p(x\sqrt{n}), x \to \infty, x = o(\sqrt{n}),$$

где $\phi(x)$ - плотность стандартного нормального закона. Из последней формулы следует, что для $b < a = o(\sqrt{n})$, $b \to \infty$

$$F_n(a) - F_n(b) \sim \Phi\big(\frac{a}{\sqrt{n}}\big) - \Phi\big(\frac{b}{\sqrt{n}}\big) + n(F(a) - F(b)).$$

Отсюда нетрудно извлечь, что при $x \to \infty$, $x = o(\sqrt{n})$

$$1 - F_n(x) \sim 1 - \Phi\big(\frac{x}{\sqrt{n}}\big) + n(1 - F(x)). \tag{18}$$

Поскольку в условиях теоремы 4.1

$$p(x) \sim \frac{c(\alpha, s)}{x^{\alpha+s+1}},$$

где

$$c(\alpha, s) = \frac{\Gamma(s+\alpha+1) Im[c^+(1-e^{2\pi i\alpha})]}{2\pi},$$

то

$$1 - F(x) \sim \frac{c(\alpha, s)}{\alpha+s} x^{-\alpha-s}.$$

Используя этот факт, нетрудно показать, что

$$1 - \Phi(\frac{x}{\sqrt{n}}) = o(n(1-F(x))),$$

если $x/\sqrt{n \ln n} \to \infty$. Таким образом, если верно (18), то при $x/\sqrt{n \ln n} \to \infty$

$$1 - F_n(x) \sim n(1-F(x)). \tag{19}$$

Результат такого типа при более общих, чем в [4] предположениях, был получен в моей работе [5], а именно имеет место

Теорема 4.2. *Пусть существует интегрируемая на отрезке (B, ∞) функция $\psi(x)$ такая, что для любых $b > a > B$*

$$\underset{a \le x \le b}{V} \Big[F(x) - G(x)\Big] \le \int_a^b \frac{\psi(x)}{x^2} g(x) dx,$$

где $\underset{a \le x \le b}{V}$ – вариация на отрезке $[a, b]$, $G(x)$ – распределение на $[0, \infty)$ с плотностью

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-xu} \omega(u)\, du,$$

т.е. функция $g(x)$ является вполне монотонной в смысле С.Н. Бернштейна. Предположим также, что спектральная функция ω имеет вторую производную, удовлетворяющую условию Гельдера и $\omega(0) = 0$. Тогда представление (19) имеет место для x таких, что

$$nu_x^2 = o(1), \tag{20}$$

где u_x – решение уравнения

$$u_x e^{xu_x}(1 - G(x)) = 1.$$

Например, если $\omega(u) \sim u^\alpha$, $\alpha > 2$, то $1 - G(x) \sim 1/\alpha x^\alpha$. В этом случае, как нетрудно убедиться, условие (20) выполняется при $x > \rho(n)\sqrt{n \ln n}$, где $\rho(n)$ – любая функция, стремящаяся к бесконечности сколь угодно медленно. Полученная таким образом граница близка к $\Lambda(n)$ в теореме 3.2.

Предположим теперь, что $1 - G(x) \sim e^{-x^\alpha}$ при $x \to \infty$. Тогда условие (20) выполняется при $x > \rho(n) n^{\frac{1}{2-2\alpha}}$, где $\rho(n) \to \infty$ сколь угодно медленно. С другой стороны, в силу теоремы 3.1 для $1 - F_n(x)$ имеет место асимптотическое представление (9) при $x < n^{\frac{1}{2-\alpha}}$.

Таким образом, в данном случае мы имеем промежуточную область $n^{\frac{1}{2-\alpha}} < x < \rho(\sqrt{n}) n^{\frac{1}{2-2\alpha}}$, в которой асимптотика вероятностей больших уклонений не описывается ни теоремой 3.1, ни результатом работы [5].

Асимптотика $1 - F_n(x)$ в промежуточной области $n^{\frac{1}{2-\alpha}} < x < \rho(n) n^{\frac{1}{2-2\alpha}}$ была исследована в работе А.В. Нагаева [10]. При этом на $F(x)$ накладывалось условие: $F'(x) \sim e^{-|x|^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, когда $|x| \to \infty$. Как уже говорилось в п. 2.1. [4, 5] в [10] используется чисто вероятностный подход.

Более общие результаты были получены в моей статье [11], к описанию которых мы сейчас переходим.

Предположим, что при $x \to \infty$

$$1 - F(x) = e^{\chi(x)}(1 + o(1)),$$

где $\chi(x)$ – невозрастающая функция, которая определена для $x > 0$ и удовлетворяет следующим условиям:
(i) $\lim\limits_{x\to\infty} x\chi'(x)/\log x = -\infty$,
(ii) существует $0 < \alpha < 1$ такое, что $\alpha\chi(x)/x \le \chi'(x)$,
(iii) $l\chi''(x) \le -\chi'(x)/x \le L\chi''(x)$.
(iv) $0 \le -\chi'''(x) \le L_1\chi''(x)/x$,
где l, L и L_1 – положительные постоянные.

Дополнительные по сравнению с теоремой 3.1 условия (iii) и (iv) нужны для того, чтобы обосновать возможность аппроксимации распределения $F(x)$ на бесконечности распределением с вполне непрерывной плотностью. Конечно, можно было сразу наложить это условие вместо (iii) и (iv), что сильно бы упростило изложение.

Пусть

$$\mathbf{E}|X_1|^{N(\alpha)} < \infty,$$

где $N(\alpha) = [(3 - 2\alpha)/(1 - \alpha)]$. Введем обозначение

$$K(u) = \sum_{2}^{N(\alpha)} \chi_k u^k,$$

где χ_k – семиинварианты (кумулянты) случайной величины X_1. Пусть $\lambda_\alpha(z)$ отрезок ряда Крамера, состоящий из первых $N(\alpha) - 3$ членов.

Рассмотрим уравнение

$$K'\Big(-\chi'\big((1-u)x\big)\Big) = ux/n \tag{21}$$

на отрезке $0 < u < 1$. Определим $\beta = \beta(x, n)$ как наименьший корень этого уравнения (если, разумеется, оно имеет решение). Пусть далее $\Lambda(n)$ положительный корень уравнения

$$\chi(x) + x^2/n = 0. \tag{22}$$

Определение $\Lambda(n)$ корректно, так как уравнение (22) имеет только один строго положительный корень. Положим

$$P_1(x) = n\Big(1 - \chi''((1-\beta)x)n\Big)^{-1/2}\Big(1 - F((1-\beta)x)\Big)\exp\big\{-(\beta x)^2/2n + \lambda_\alpha(\beta x/n)(\beta x)^3/n^2\big\},$$
$$P_2(x) = \big(1 - \Phi(x/n^{1/2})\big)\exp\big\{\lambda_\alpha(x/n)x^3/n^2\big\}.$$

Теорема 4.3. *Пусть $F(x)$ удовлетворяет условиям* (i)–(iv). *Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) = P_1(x)(1+o(1)), \tag{23}$$

если

$$\lim_{n\to\infty} xn^{-1/(2-\alpha)} = \infty.$$

Если

$$\limsup_{n\to\infty} xn^{-1/(2-\alpha)} < \infty,$$

и

$$\limsup_{n\to\infty} n\chi''((1-\beta)x) < 1,$$

то

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) = \Big(P_1(x) + P_2(x)\Big)(1+o(1)). \tag{24}$$

Если $\liminf\limits_{n\to\infty} n\chi''((1-\beta)x) \geq 1$ *и* $\Lambda(n) \leq x$ *или* $x \leq \Lambda(n)$, *то*

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) = P_2(x)(1+o(1)). \tag{25}$$

Мы видим, что по сравнению с теоремой 3.1 в теореме 4.3 добавлены условия (iii) и (iv). Условие (iii) означает, что функция $\alpha(y)$ в представлении типа (10) для $-\chi(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{(1-L^{-l})\alpha(x) - \alpha^2(x)}{x} < \alpha'(x) < \frac{(1-l^{-1})\alpha(x) - \alpha^2(x)}{x}.$$

Уравнение (21), которое служит для вычисления параметра β, исследовалось в моей обзорной статье [12]. В частности, там показано, что $\beta = \beta(n,x) \to 0$, если $x/n^{\frac{1}{2-\alpha}} \to \infty$. Если $\chi(x) = -x^{-\alpha}$, то, как нетрудно видеть, $\beta \sim 2\alpha n/x^{2-\alpha}$ при $x/n^{\frac{1}{2-\alpha}} \to 0$. Отсюда вытекает, что при $x/n^{\frac{1}{2-2\alpha}} \to \infty$

$$\big(1-(1-\beta)^{\alpha}\big)x^{\alpha} \to 0,$$

т.е.

$$F(x) - F((1-\beta)x) = o(1).$$

Кроме того, при условии $x/n^{\frac{1}{2-2\alpha}} \to \infty$

$$1-\chi''((1-\beta)x)n \to 1 \quad \text{и} \quad \exp\big\{-(\beta x)^2/2n + \lambda_\alpha(\beta x/n)(\beta x)^3/n^2\big\} \to 1.$$

В результате мы приходим к выводу, что при $x/n^{\frac{1}{2-2\alpha}} \to \infty$

$$1 - F_n(x) \sim n(1-F(x)).$$

Между прочим, эту же самую границу мы получили выше, исходя из условия (20). Это свидетельствует о том, что результат, полученный в [5], является точным. Отметим, что численное решение уравнения(21) не представляет никаких трудностей.

Асимптотические представления, близкие к полученным в теореме 4.3, содержатся в статье Боровкова [18] (теорема 2.1), при этом предполагается, что $\ln(1-F(t)) = -l(t) = -t^\alpha L(t)$, где $L(t)$ – медленно меняющаяся функция, удовлетворяющая дополнительному ограничению

$$L'(t) = o\Big(\frac{L(t)}{t}\Big) \tag{26}$$

при $t \to \infty$. Кроме того требуется, чтобы

$$l''(t) = \alpha(\alpha-1)\frac{l(t)}{t^2}(1+o(1)). \tag{27}$$

Эти условия можно переформулировать следующим образом: *функции $a(x)$ и $\varepsilon(x)$ в представлении Карамaты для $L(x)$*

$$L(x) = a(x)\exp\Big\{\int_1^x \frac{\varepsilon(y)}{y}\,dy\Big\} \tag{28}$$

удовлетворяют условиям

$$a'(x) = o(x^{-1}), \quad a''(x) - a(x)\varepsilon'(x)x^{-1} = o(x^{-2}).$$

Эти условия выполнены, в частности, если

$$a'(x) = o(x^{-1}), \quad a''(x) = o(x^{-2}), \quad \varepsilon'(x) = o(x^{-1}).$$

Используя (28), мы можем представить $l(x)$ в виде

$$l(x) = a(x)\exp\Big\{\int_1^x \frac{\alpha(y)}{y}dy\Big\}, \tag{29}$$

где

$$\alpha(y) = \alpha + \varepsilon(y).$$

Основное различие между представлениями с функцией $\alpha(x)$, удовлетворяющей условиям (10) и (29), заключается в том, что в последнем $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = \alpha$, в то время как в (10) $\alpha(x)$ может колебаться на бесконечности между 0 и 1.

Заметим также, что условия гладкости в работе Боровкова [18] накладываются непосредственно на $\ln(1-F(x))$, а не на аппроксимирующую функцию $\chi(x)$ как в моей статье [11].

Таким образом, условия Боровкова (26) и (27), воообще говоря, являются более ограничительными, чем условия теоремы 4.3.

Доказательство теоремы 2.1 в статье [18] основано на тех же вероятностных соображениях, что и доказательство А.В. Нагаева [10].

Список литературы

[1] *Линник Ю.В.* Предельные теоремы для сумм независимых величин при учете больших уклонений I, II, III// Теория вероятн. и ее примен., 1961, **6**, N 2, 145–162; N 4, 377–391; 1962, **7**, N2, 121–134.

[2] *Нагаев С.В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений// Теор. вероятн. и ее примен., 1965, **10**, N2, 231–254. **PDF**

[3] *Нагаев С.В.* Локальные предельные теоремы для больших уклонений// Теория вероятн. и ее примен., 1960, **5**, N2, 259–261. **PDF**

[4] *Нагаев С.В.* Локальные предельные теоремы для больших уклонений// Вестник ЛГУ, серия матем. 1962, N1, 80–88. **PDF**

[5] *Нагаев С.В.* Интегральная предельная теорема для больших уклонений// Изв. АН УзССР, сер. физ.- мат., 1962, N6, 37–43. **PDF**

[6] *Нагаев С.В.* Интегральная предельная теорема для больших уклонений// ДАН СССР, 1963, **148**, N2, 280. **PDF**

[7] *Нагаев А.В.* Предельные теоремы с учетом больших уклонений при нарушении условий Крамера// Изв. АН УзССР, Сер. физ.- мат. наук, 1969, N6, 17–22.

[8] *Нагаев А.В.* Об одном свойстве сумм независимых случайных величин. – Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в 2, с. 335–346.

[9] *Nagaev S.V.* On asymptotic behaviour of probabilities of one-sided large deviations// Probab. Appl., 1981, **26**, No 2, 362 - 366. **PDF** Original Russian Text@Teor. Verojatn. i Primen., 1981, **26**, No 2, 369-372.

[10] *Нагаев А.В.* Интегральные предельные теоремы, включающие большие уклонения, когда условие Крамера не выполнено, I, II// Теор. вероятн. и ее примен., 1969, **14**, N1, 51-64; N 2, 203-215.

[11] *Nagaev S.V.* Large devitations for sums of independent random variables// Trans. Sixth Prague Conf. Inform. Theory. Statist. Decision Functions. Random Processes, Prague. 1973, 657–674. **PDF**

[12] *Nagaev S.V.* Large deviations of sums of independent random variables// Ann. Prob., 1979, **7**, №5, 745-789. **PDF**

[13] *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные случайные величины// М.: Наука, 1965, 524.

[14] *Michel R.* Results on probabilities of moderete deviations// Ann. Prob., 1974, **2**, 349-353.

[15] *Бикялис А.* Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме// Литов. мат. сб., 1966, **6**, N3, 323–346.

[16] *Осипов Л.В.* О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин// Теор. вероятн. и ее примен., 1972, **17**, N2, 320–341.

[17] *Боровков А.А.* Оценки для распределений сумм случайных величин при не выполнении условий Крамера// Сиб.мат.ж., 2000, **41**, N5, 997–1038.

[18] *Боровков А.А.* Вероятности больших уклонений для случайных блужданий с семиэкспоненциальными распределениями// Сиб. мат. ж., 2000, **41**, N6, 1290–1324.

[19] *Kramer H.* Sur un nouveau theorlimite de theorie des probabilites// Actuel sci. et. ind., Paris, 1938, N 736 (УМН, X, 166–178, 1944).

[20] *Рихтер В.* Локальные теоремы для больших уклонений// Теор. вероятн. и ее примен., 1957, **117**, N3, 214–229.

2009 г.