3. Вероятностные неравенства

3.1. Введение. Вероятностные неравенства являются важным инструментом, который широко используется практически во всех разделах теории вероятностей.

Исторически первым вероятностным неравенством было неравенство Чебышева, которое оценивает хвост распределения суммы независимых случайных величин. Однако это неравенство, будучи весьма общим, не дает оптимального порядка убывания на бесконечности.

К числу классических относятся также неравенства С.Н. Бернштейна(см. [1, III, §3, теорема 18]) и Беннета [2] –Хефдинга [3].

Неравенство Бернштейна применимо, когда вероятности $\mathbf{P}(X_j > x)$ убывают экспоненциально с ростом x для всех слагаемых, образующих сумму $\sum_{j=1}^{n} X_j$.

Что касается неравенства Беннета–Хефдинга, то последнее рассчитано на ограниченные случайные величины. К неравенству Беннета–Хефдинга примыкает неравенство Ю.В. Прохорова [4], полученное несколько годами ранее.

Таков был довольно ограниченный запас вероятностных неравенств, имевшийся к тому моменту, когда я начал свои исследования в этом направлении.

Проблема заключалась в том, чтобы найти неравенства, которые давали бы хороший результат для распределений, имеющих моменты лишь конечного порядка. Ни одно из выше перечисленных неравенств для этой цели не годилось.

Первое неравенство такого типа было выведено в моей работе [5] для одинаково распределенных случайных величин. Оно несовершенно в том смысле, что действует лишь для уклонений порядка большего, чем $\sqrt{n}\ln n$. Тем не менее это неравенство позволило мне получить оптимальную неравномерную оценку в центральной предельной теореме для одинаково распределенных случайных величин.

Более совершенные неравенства были получены спустя несколько лет в совместной с моим учеником Д.Х. Фуком статье [6]. Эти неравенства универсальны, поскольку формулируются в терминах урезанных моментов и поэтому не требуют каких-либо моментных ограничений, вследствие чего они очень удобны для различных применений. Некоторые из этих применений обсуждаются в [6], а также в моей обзорной статье [7]. Одно из возможных применений - это вывод моментных неравенств. Так, например, с помощью одного из неравенств, полученных в [6], буквально в несколько строк выводится известное моментное неравенство Розенталя [8] (см. по этому поводу [9], а также [7] и [10]).

Другое применение - достаточные условия усиленного закона больших чисел, а также оценки скорости сходимости в законах больших чисел (см. [6] и [7]).

Более подробно приложения неравенств, полученных в [6], обсуждаются в следующих разделах.

3.2. Верхние оценки. Я уже упоминал выше, что в моей работе [5] выведено вероятностное неравенство, которое позволило мне получить неравномерный аналог неравенства Берри–Эссеена со скоростью убывания x^{-3}. Вот точный вид неравенства:

$$1 - F_n(x) < n\big(1 - F(y)\big) + \exp\left\{2n\left[\frac{m\ln y - \ln(nc_m K_m)}{y}\right]^2 + 1\right\}\left(\frac{nc_m K_m}{y^m}\right)^{x/y}, \quad (1)$$

$x > 0,\ y > 0$. Здесь $F_n(x)$ – функция распределения суммы $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ независимых одинаково распределенных случайных величин, $F(x)$ – функция распределения одного слагаемого, $c_m = \mathbf{E}|X_i|^m < \infty,\ m > 2,\ K_m = 1 + (m+1)^{m+2}e^{-m}$.

Если $2n\left(\frac{m\ln y}{y}\right)^2 < c$ и $1 - F(y) = 0$, то вследствие (1)

$$1 - F_n(x) < e^{c+1}\left(\frac{nc_mK_m}{y^m}\right)^{x/y}. \qquad (2)$$

Выбирая y достаточно малым по сравнению с x, мы можем добиться нужной скорости убывания в правой части неравенства (2). Это обстоятельство, неоднократно используемое в работе [5], предопределило высокую степень применимости неравенства (1) и его обобщений.

Недостатком неравенства (1) является то, что оно дает содержательные оценки только для достаточно больших x. Этот недостаток устранен в совместном исследовании с Д.Х. Фуком [6], моим аспирантом из Вьетнама, который проходил аспирантуру при НГУ в 1968 – 70 гг. Модифицированные неравенства действуют уже на всей оси и, кроме того, они имеют место и для разнораспределенных случайных величин. Поскольку эти неравенства не требуют моментных ограничений, то они весьма универсальны и поэтому имеют многочисленные применения. Результаты, полученные в [6], излагаются также в моей обзорной статье [7]. Сформулируем один из результатов, полученных в [6]. С этой целью введем следующие обозначения:

$$A_t^+(Y) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\Big\{X_k^t; 0 < X_k \le y_k\Big\},\ \ B^2(Y) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\Big\{X_k^2;\ X_k \le y_k\Big\},$$

где $Y = \big\{y_1, y_2, ..., y_n\big\}$.

В этих терминах

$$\mathbf{P}(S_n \ge x) \le \sum_1^n \mathbf{P}(X_i > y_i) + \exp\Big\{-\alpha^2x^2/\big(2e^tB^2(Y)\big)\Big\} + \Big(A_t^+(Y)/(\beta xy^{t-1})\Big)^{\beta x/y} \qquad (3)$$

при условии, что $t \ge 2,\ \ \mathbf{E}X_i = 0,\ \ i = 1, ..., n,\ \ \beta = t/(t+2)$ и $\alpha = 1 - \beta$.

Остановимся теперь на некоторых применениях неравенств, полученных в [6]. В работе [11] я показал, применив теорему 2 из [6], что при $n \to \infty$ и $x > cn$

$$\mathbf{P}(S_n \ge x) \sim n(1 - F(x)),$$

если $\mathbf{E}X_1 = 0$ и при $x \to \infty$

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha}h(x),$$

где $\alpha > 1$.

Аналогичный результат был получен С.Г. Ткачуком [12] при условии, что $F(x)$ притягивается к устойчивому закону с показателем $\alpha > 2$. Результат Ткачука передоказан Р. Дони [13]. В работе Дони [14] с помощью следствия 1.5 из [6] доказывается локальная предельная теорема в условиях Ткачука. А. Спатару в работе [15] применяет уже упоминавшуюся выше теорему 2 из [7] для вывода асимптотики

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\log\varepsilon}\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n}\mathbf{P}(|S_n| \ge \varepsilon n) = \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

где $\alpha > 1$ – показатель устойчивого закона, к которому притягивается $F(x)$. По следам работ [5–7,11] А.А. Боровков [16] предпринял обширное исследование, результатом которого явились неравенства вида

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x, \max_{1\geq k\geq n} X_k < y) \leq c[nV(y)]^{x/y}. \tag{4}$$

Здесь $\overline{S}_n = \max_{1<k\leq n} S_k$, $V(y)$ – правильно меняющаяся функция, которая мажорирует $1 - F(y)$, c – некоторая постоянная, которая явно не вычисляется. Сравнивая неравенства (2) и (4), мы видим, что последнее по существу является обобщением неравенства (2) на $\overline{S}_n$.

Вернемся теперь к неравенству (3). Заметим, что коэффициент $c_t := \frac{1}{2}\alpha^2 e^{-t}$ в показателе экспоненты равен $2(t+2)^{-2}e^{-t}$. Очевидно, c_t быстро убывает с ростом t. Даже при $t = 2$ значение c_t достаточно мало, а именно, $c_t \approx 0.017$.

Естественно, возникает мысль вывести более совершенное неравенство с тем, чтобы коэффициент при $\frac{x^2}{B^2(Y)}$ был бы близок к $\frac{1}{2}$. Это осуществлено в моей работе [10] путем введения дополнительного параметра.

Усовершенствованное неравенство выглядит следующим образом:

$$\mathbf{P}(S_n \geq B_n x) < \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(X_j \geq y_j) + \exp\left\{\frac{\beta x}{y} - \frac{\alpha^2 x^2}{2e^c B^2(Y)}\right\} +$$
$$+ \exp\left\{\frac{\beta x}{y}\right\}\left(\left[\left(\frac{t}{c}\right)^t + 1\right]\frac{A_t^+(Y)}{\beta x y^{t-1}}\right)^{\beta x/y}. \tag{5}$$

Здесь $t \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1 - \alpha$, $0 < c \leq t$, $y \geq \max_{1\leq j\leq n} y_j$. Предполагается также, что $\mathbf{E}X_j = 0$, $j = \overline{1,n}$. По сравнению с неравенством (3) неравенство (5) содержит дополнительный параметр c.

Положим в неравенстве (5) $x = y = B_n u$, где u – некоторое фиксированное число, $B_n^2 = \sum_1^n \sigma_i^2$, $\sigma_j^2 = \mathbf{E}X_j^2$, и $j = \overline{1,n}$. Допустим, что ляпуновское отношение

$$L_n = \sum_1^n \mathbf{E}|X_j|^3 / B_n^3$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Тогда первое и третье слагаемые в (5) стремятся к 0 при $t = 3$ и любых фиксированных c и β. Выбирая α близким к 1, а c близким к 0, мы можем добиться, что $\alpha^2/e^c < 1 - \varepsilon$, где ε сколь угодно мало́. В свою очередь это означает, что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > B_n u) < e^{-u^2/2}. \tag{6}$$

С другой стороны, в силу центральной предельной теоремы

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > B_n u) = 1 - \Phi(u),$$

где $\Phi(u)$ – стандартный нормальный закон. Известно, что при $u > 1$

$$1 - \Phi(u) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}.$$

С другой стороны, как показано в [17, с. 63]

$$\Big(u+\frac{1}{u}\Big)\Big(1-\Phi(u)\Big) > \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-u^2/2}.$$

Таким образом, оценка (6) оптимальна с точностью до множителя, не превосходящего $\frac{u}{\sqrt{2\pi}\,(u^2+1)}$.

Заметим, что отправной точкой для всех изложенных выше неравенств является оценка вида

$$\mathbf{P}(S_n > x) < e^{-hx}\prod_{j=1}^{n} g_j(h), \tag{7}$$

где $g_j(h) = \mathbf{E}e^{hX_j}$. Если X_j нормально распределены, то

$$\mathbf{P}(S_n > x) < \exp\{B_n^2h^2/2 - hx\}.$$

Полагая $x = B_n u$ и минимизируя правую часть по h, мы приходим к оценке

$$\mathbf{P}(S_n > B_n u) < e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Приведем теперь неравенство другого типа, которое в отличие от (3) и (5) не содержит экспоненты вида e^{-cx^2}:

$$\mathbf{P}(S_n \ge x) \le \sum_1^n \mathbf{P}(X_i \ge y) + 2e^{x/y}\left(\frac{B_n^2}{xy}\right)^{x/y}. \tag{8}$$

Это неравенство получено в моей совместной с И.Ф. Пинелисом статье [9] как следствие более общего результата из [6]. В частности, при $y = x/2$

$$\mathbf{P}(S_n \ge x) \le \sum_1^n \mathbf{P}\Big(X_i > \frac{x}{2}\Big) + 4e^2\frac{B_n^4}{x^4}. \tag{9}$$

Мы видим, что последнее неравенство может давать нетривиальную оценку для вероятности $\mathbf{P}(S_n \ge x)$ только при $x > 4^{1/4}e^{1/2}B_n \approx 2.33B_n$, в то время как использование неравенства Чебышева приводит к нетривиальной оценке при $x > B_n$. Более того, неравенство Чебышева точнее неравенства (9) при $B_n < x < 2eB_n$. Таким образом, неравенство (9) точнее неравенства Чебышева только тогда, когда отношение x/B_n достаточно велико.

До сих пор речь шла об оценках в терминах степенных моментов. Рассмотрим более общий случай. С этой целью предположим, что моменты $b_{gi} := \mathbf{E}\{e^{g(X_i)},\ X_i \ge 0\}$ конечны, где функция $g(x)$ возрастает и $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)/\ln x = \infty$. Обозначим $B_{gn} = \sum_{i=1}^n b_{gi}$. Пусть $g(x)$ дифференцируема, причем

(a) $g'(x) \to 0$ при $x \to \infty$;

(b) существует такое $\delta > 0$, что $g'(x) > \delta/x$.

Условие (a) означает, что $e^{-g(u)}$ убывает медленнее, чем e^{-u}. Соответственно из условия (b) следует, что $e^{-g(u)}$ убывает быстрее, чем u^{-2}. Положим $S(x) = e^{-g(x)}g'(x)x^2$.

Пусть γ, $\{\gamma_i\}^3$, β – положительные константы такие, что $\sum_1^3 \gamma_i = 1$, $\beta = 1 - \gamma_1/2 - \gamma_2/\delta$, $\gamma < 1$, и пусть a – решение уравнения $(x+1)/x = e^{x-1}$. Обозначим через $S^{-1}(x)$ функцию, обратную к $S(x)$. В этих терминах имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) \leq \exp\{\gamma_3/\gamma - \gamma_1 \beta a^2 x^2 / 2(a+1) B_n^2\} + \exp\{\gamma_3/\gamma - \beta a x / S^{-1}(\gamma_2 a x / e^a B_{gn})\}$$

$$+ (\gamma/\gamma_3) B_{gn}^{B/y} \exp\{\gamma_3/\gamma - g(\gamma x)\beta/\gamma\} + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \geq \gamma x). \qquad (10)$$

Это неравенство было получено в моей совместной с Сакояном работе [18], оно также формулируется в [7]. По форме неравенство (10) близко к неравенству (3). Однако в отличие от последнего оно содержит 4, а не 3 слагаемых в правой части. Более точно, второй член в правой части не имеет аналогов в неравенстве (3). В [18] строится пример, показывающий, что это слагаемое нельзя опустить.

3.3. Нижние оценки. В уже упоминавшемся обзоре [7] для $x \geq 2B_n$ получено неравенство

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(X_j \geq 2x). \qquad (11)$$

Из неравенства (11), в частности, следует, что нельзя освободиться от первого слагаемого в правой части неравенства (8). В отличие от известной нижней оценки Колмогорова в неравенстве (11) не требуется ограниченность слагаемых.

В моей работе [17] в предположении, что у случайных величин X_j существуют третьи моменты, получена оценка вида

$$\mathbf{P}(S_n > x) \geq (1 - \Phi(x)) e^{-c_2 L_n x^3} (1 - c_3 L_n x), \qquad (12)$$

которая действует при $1 < x < c_1/L_n$. Здесь L_n – ляпуновское отношение, c_i, $i = \overline{1,3}$, – некоторые постоянные, которые выписываются в явном виде. Очевидно, что оценка (12) является более общей, чем оценка Колмогорова. Более того, как показано в (12), она значительно точнее. В смысле точности неравенство (12) близко к результатам Феллера – Ленарта (см. [19,20]), которые имеют место только для ограниченных слагаемых. Оценки (11) и (12) дополняют друг друга, но они не охватывают всех возможных случаев.

Во-первых, при $L_n \geq c_1$ интервал, в котором действует оценка (12), вырождается. Во-вторых, может случиться, что $\mathbf{P}(X_j > 2B_n) = 0$ для всех j и тогда оценка (11) оказывается тривиальной.

Действительно, пусть, например, X_j одинаково распределены и

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = p, \ \ \mathbf{P}(X_1 = 0) = 1 - 2p.$$

Очевидно, в этом случае $L_n = 1/\sqrt{2pn}$. Поэтому, если $np < 2/c_1^2$, то оценка (12) вообще неприменима, а оценка (11) дает тривиальный результат $\mathbf{P}(S_n \geq x) \geq 0$ при $np > 1/32$.

В моей работе [21] выводятся нижние оценки для $\mathbf{P}(S_n > x)$, которые являются более точными, нежели оценки (11) и (12) именно в ситуации, когда отношение Ляпунова велико, а слагаемое X_j либо ограничены, либо их распределения имеют быстро убывающие хвосты. Чтобы сформулировать эти оценки, нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения.

Пусть $\xi(\overline{p})$ – число успехов в неоднородной схеме Бернулли с вероятностями успехов $p_1, p_2, ..., p_n$, $\overline{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$. Введем обозначения $P(\overline{p}; x) = \mathbf{P}(\xi(\overline{p}) > x)$.

Если предположить, что X_j симметрично распределены, то имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(S_n > x) \geq \frac{1}{2}\, P\Big(\overline{p}(A); \frac{x}{A}\Big) \prod_{j=1}^{n}(1 - p_j(A)), \tag{13}$$

где A – любое положительное число, $\overline{p}(A) = \left(\frac{p_1}{1-p_1}, ..., \frac{p_n}{1-p_n}\right)$, $p_j = p_j(A) = \mathbf{P}(X_j \geq A)$.

Используя неравенство

$$\mathbf{P}(|X^s| > 2x) \leq 2\mathbf{P}(|X| > x),$$

где X^s – симметризация величины X, получаем оценку

$$\mathbf{P}(S_n > x) \geq \frac{1}{2}\, P\Big(\overline{p}(A); \frac{2x}{A}\Big) \prod_{1}^{n}(1 - p_j(A)).$$

Попутно в работе [21] выводится оценка

$$\mathbf{P}(\eta_n \geq m_0) > \frac{1}{3},$$

где η_n – число успехов в n испытаниях Бернулли с постоянной вероятностью успеха $p < \frac{1}{2}$, m_0 – целая часть np. В английском переводе $\frac{1}{3}$ заменена на $\frac{1}{2}$. В таком виде оценка уже неулучшаема.

Вернемся к неравенству (11). Как мы видим, оно предполагает конечность дисперсии. Между тем, в [7] в качестве промежуточного результата было выведено неравенство

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) \geq \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(X_j \geq 2x)\Big[\mathbf{P}(S_n^j \geq -x) - \mathbf{P}(\max_{i \neq j} X_i > x)\Big], \tag{14}$$

где $S_n^j = S_n - X_j$. Здесь нет никаких моментных ограничений.

Очевидно,

$$\mathbf{P}(S_n^j \geq -x) > 1 - \frac{B_n^2}{x^2}$$

и

$$\mathbf{P}(\max_{i \neq j} X_i > x) < \frac{B_n^2}{x^2}.$$

Подставляя эти оценки в (14), мы получаем неравенство (11). Таким образом, B_n появляется в окончательной формулировке только на заключительном шаге. Наличие B_n в неравенстве (11) делает последнее менее общим, но зато более простым и наглядным, придавая ему классический вид. Следует также учесть, что никаких оценок подобного типа в тот момент не существовало.

Учитывая, что

$$\mathbf{P}(\max_{i\neq j} X_i > x) < \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i > x),$$

мы можем записать (14) в виде

$$\mathbf{P}(S_n > x) > \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i > 2x)\Big[\inf_j \mathbf{P}(S_n^j > -x) - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i > x)\Big].$$

Неравенство такого типа было получено в моей работе [22] для случайных величин со значениями в банаховом пространстве. Применительно к обычным случайным величинам оно выглядит следующим образом

$$\mathbf{P}(|S_n| > x) > \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(|X_i| > ax)\Big[\mathbf{P}(|S_n^i| > (a-1)x) - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(|X_j| > ax)\Big]. \tag{15}$$

Появление модуля в этом неравенстве объясняется тем, что он определяет норму в пространстве $\mathbb{R}$. В работе А.А. Боровкова [16] получено одностороннее неравенство типа (15) для одинаково распределенных случайных величин, а именно,

$$\mathbf{P}(S_n > x) > n\mathbf{P}(X > \alpha x)\Big[\mathbf{P}(S_{n-1} > (1-\alpha)x) - \frac{n-1}{2}\mathbf{P}(X > \alpha x)\Big],$$

где X совпадает по распределению с X_1. Доказывается это неравенство тем же методом, что и неравенство (11).

3.4. Некоторые применения. (A) Моментные неравенства. Одно из многочисленных применений вероятностных неравенств, о которых шла речь выше, – это вывод оценок для моментов $\mathbf{E}|S_n|^t$ и полумоментов $\mathbf{E}\{S_n^t;\ S_n > 0\}$, $\mathbf{E}\{|S_n|^t;\ S_n < 0\}$.

Впервые этот подход был применен в моей совместной с Пинелисом работе [9]. Все дело в оценке интеграла

$$\int_0^\infty x^{t-1}\mathbf{P}(S_n > x)\,dx.$$

Разнообразные оценки для $\mathbf{P}(S_n > x)$ были к тому времени уже получены в [6]. В [9] используется двусторонняя оценка

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq x) \leq \sum_{1}^{n} \mathbf{P}(|X_i| \geq y) + 2\exp\Big\{\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\ln\Big(\frac{xy}{B_n^2} + 1\Big)\Big\}. \tag{16}$$

Пусть $y = x/c$, $c > t/2$. Умножая обе части неравенства на tx^{t-1} и интегрируя по x от 0 до ∞, мы получаем, что

$$\mathbf{E}|S_n|^t \leq c^t A_t + 2te^c \int_0^\infty x^{t-1}\Big(\frac{x^2}{cB_n^2} + 1\Big)^{-c} dx,$$

где $A_t = \sum_1^n \mathbf{E}|X_k|^t$. Интеграл в правой части равен $2^{-1}c^{t/2}B(t/2, c-t/2)B_n^t$, где $B(u,v)$ – бета-функция Эйлера. Таким образом,

$$\mathbf{E}|S_n|^t \leq c^t A_t + tc^{t/2}e^c B(t/2, c-t/2)B_n^t. \tag{17}$$

Впервые неравенство типа (17) было получено Розенталем [8] путем сложных рассуждений. Приведенное выше доказательство несравненно проще. Заметим, что неравенство Розенталя сформулировано в [8] в несколько отличной от (17) форме, а именно: *для* $t>2$

$$\frac{1}{2^t}\max\{A_t^{1/t},B_n\}<(\mathbf{E}|S|^t)^{1/t}<K_t\max\{A_t^{1/t},B_n\},$$

где $K_t<2^t$.

В моей работе [10] в случае $t=2$ с помощью неравенства (5) выведена оценка

$$\mathbf{E}\{S_n^t;S\geq 0\}\leq e^2\Big[2^{t+1}\beta^{-1}\Big(\Big(\frac{t}{c}\Big)^t+1\Big)A_t^+ +\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{e^c}{\alpha^2}\Big)^{t/2}t\mu_{t-1}B_n^t\Big], \tag{18}$$

где μ_t – абсолютный момент порядка t стандартного нормального закона, $0<\alpha<1$, $\beta=1-\alpha,\ 0<c\leq t$.

Мы видим, что правая часть неравенства (18) зависит от свободных параметров α и c, варьируя которые, мы можем получать оптимальные оценки в зависимости от соотношения A_t^+ и B_n^t. Заметим, что альтернативные методы (относительно последних см. работы [23–25]) не дают возможности выводить для полумоментов неравенства типа (18).

(B) Слабый закон больших чисел. Вероятностные неравенства, о которых шла речь выше, очень удобны для оценки скорости сходимости в законе больших чисел. Если предположить, что независимые случайные величины X_j одинаково распределены и $\mathbf{E}X_j=0$, $\mathbf{E}X_j^2=\sigma^2$, то в силу неравенства (16)

$$\mathbf{P}(|S_n|>n\varepsilon)<n\mathbf{P}\Big(|X|>\frac{n\varepsilon}{2}\Big)+8e^2\Big(\frac{B_n}{n\varepsilon}\Big)^4, \tag{19}$$

где $X=X_j$ по распределению.

Если $n\varepsilon>2\sigma\sqrt{n}$, т.е. $n>4\sigma^2/\varepsilon^2$, то согласно нижней оценке (16)

$$\mathbf{P}(|S_n|>n\varepsilon)>n\mathbf{P}(|X|>2n\varepsilon). \tag{20}$$

Разумеется, последнее неравенство тривиально, если случайные величины ограничены, скажем, $|X|<M$, и $2n\varepsilon<M$. Если дисперсия σ бесконечна, то можно использовать другие неравенства, полученные в [6, 7], [10].

Оценки, аналогичные (19), (20), можно, конечно, выписать и в случае, когда случайные величины X_j не являются одинаково распределенными.

(C) Усиленный закон больших чисел. Пусть $X_1,X_2,...,X_n$ – независимые величины. Заметим прежде всего, что при изучении применимости усиленного закона больших чисел можно, не нарушая общности, ограничиться симметрично распределенными X_j (см., например, [26].)

Пусть

$$I_r=\{n:2^r+1\leq n\leq 2^{r+1}\},\ \chi_r=\frac{1}{2^r}\sum_{n\in I_r}X_n.$$

Ю.В. Прохоров [27] доказал, что усиленный закон больших чисел выполняется тогда и только тогда, когда для всех положительных ε

$$\sum_{r=0}^{\infty}\mathbf{P}(\chi_r\geq\varepsilon)<\infty. \tag{21}$$

Таким образом, проблема нахождения необходимых и достаточных условий для усиленного закона больших чисел сводится к получению верхних и нижних оценок для вероятностей больших уклонений сумм $\sum\limits_{n\in I_r} X_n$.

Используя вероятностные неравенства, мы можем без труда сформулировать различные варианты достаточных или необходимых условий, которые не являются одновременно необходимыми и достаточными. С этой целью положим

$$K(t,\delta,r) = 2^{-n}\sum\int_{u\le 2\delta} u^t\,dF_k(u),$$

$$H(\delta,r) = 2^{-2r}\sum\sigma_k^2,$$

где суммирование производится по всем k в I_r. В моей совместной с Фуком статье [6] доказано, что *если существует последовательность положительных чисел δ_r такая, что для всех положительных ε одновременно выполняются условия*

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k\in I_r}\mathbf{P}(X_k > 2^r\delta_r) < \infty,$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(\varepsilon\delta_r^{t-1}/K(t,\delta_r,r)+1)^{-\varepsilon/\delta_r} < \infty,\ t\ge 2,$$

и

$$\sum_{r=1}^{\infty}\exp\{-\varepsilon/H(\delta_r,r)\} < \infty,$$

то имеет место усиленный закон больших чисел.

В [5] и [6] приводятся многочисленные следствия из этого результата. Например, если для $t\ge 2$ и $\beta > 1$ выполняется совокупность условий

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(X_k > k\varepsilon) < \infty,\quad \forall\varepsilon > 0$$

и

$$\sum_{r=1}^{\infty}(K_{t,r})^{\beta} < \infty,$$

где $K_{t,r} = 2^{-rt}\sum\mathbf{E}|X_k|^t$, то имеет место усиленный закон больших чисел.

В моей работе [29] найдены необходимые и достаточные условия для усиленного закона больших чисел в терминах отдельных слагаемых. Эти условия легче проверяются, чем условия Прохорова (21). Чтобы их сформулировать, нам понадобятся обозначения

$$f_n(h,\varepsilon) = \int_{|u|\le ne} e^{hu}dF_n(u),$$

$$\psi_r(h,\varepsilon) = \sum_{n\in I_r}\frac{1}{f_n(h,\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial h}f_n(h,\varepsilon).$$

Определим $h_r(\varepsilon)$ как решение уравнения $\psi_r(h,\varepsilon) = n\varepsilon$, если $\sup\limits_h \psi_r(h,\varepsilon) \geq \varepsilon n$; в противном случае положим $h_r(\varepsilon) = \infty$. В [29] доказывается, что *усиленный закон больших чисел выполняется тогда и только тогда, когда*

(**i**) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n > n\varepsilon) < \infty$,

(**ii**) $\sum_{r=1}^{\infty} e^{-\varepsilon h_r(\varepsilon) n_r} < \infty, \ \ \forall \varepsilon > 0$.

Условие (**ii**) выглядит, на первый взгляд, не очень эффективным. Тем не менее, из него легко получить следующий критерий, принадлежащий Прохорову [28]: *условие*

$$\sum_{r=1}^{\infty} \exp\{-\varepsilon/H_r\} < \infty, \ \forall \varepsilon > 0,$$

где $H_r = 2^{-2r} \sum\limits_{k \in I_r} \sigma_k^2$, *достаточно для усиленного закона больших чисел, если*

$$X_n = o(n/\ln\ln n).$$

Список литературы

[1] *Петров В.В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. –М.: Наука, 1987.

[2] *Bennet G.* Probability inequalities for the sum of independent random variables// J. Amer. Statist. Assoc., 1962, **57**, N297, 33–45.

[3] *Hoeffding W.* Probability inequalities for sums of bounded random variables// J. Amer. Statist. Assoc., 1963, **58**, N 301, 13–30.

[4] *Прохоров Ю.В.* Одна экстремальная задача теории вероятностей// Теория вероятн. и ее примен., 1959, **4**, N2, 211–214.

[5] *Нагаев С.В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений// Теория вероятн. и ее примен., 1965, **10**, N2, 231–254. **PDF**

[6] *Фук Д.Х., Нагаев С.В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин// Теория вероятн. и ее примен., 1971, **16**, N4, 660–675. **PDF**

[7] *Nagaev S.V.* Large deviations of sums of independent random variables// Ann. Prob., 1979, **7**, N5, 745–789. **PDF**

[8] *Rosenthal H.P.* On the subspaces of $L_p (p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables// Israel J. Math., 1970, **8**, 273–303.

[9] *Нагаев С.В., И.Ф. Пинелис.* Некоторые неравенства для распределений сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве// Теория вероятн. и ее примен., 1977, **22**, N2, 254–263. **PDF**

[10] *Нагаев С.В.* Некоторые уточнения вероятностных и моментных неравенств// Теория вероятн. и ее примен., 1997, **42**, N4, 832–838. **PDF**

[11] *Нагаев С.В.* Об асимптотическом поведении вероятностей односторонних больших уклонений// Теория вероятн. и ее примен., 1981, **26**, N2, 369–372. **PDF**

[12] *Ткачук С.Г.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения устойчивого закона// Канд. дисс., Ташкент, 1977.

[13] *Doney R.A.* One-sided large deviation theorems in the case of infinite mean// Research report, Manchester Centre for Statistical Science, 1995.

[14] *Doney R.A.* One-sided local large deviation and renewal theorems in the case of infinite mean// Probab. Theory Relat. Fields, 1997, **107**, 451–465.

[15] *Spataru A.* Precise Asymptotics in Spitzer's Law of Large Numbers// J. of Theor.Probab., 1999, **12**, No3, 811–819.

[16] *Боровков А.А.* Оценки для распределений сумм случайных величин при невыполнении условий Крамера// Сиб. мат. ж., 2000, **41**, N5, 997–1038.

[17] *Нагаев С.В.* Нижние оценки для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин// Теория вероятн. и ее примен., 2001, **46**, N1, 50–74. **PDF**

[18] *Нагаев С.В., Сакоян С.К.* Об одной оценке для вероятности больших уклонений// Сб."Предельные теоремы и математическая статистика."Ташкент, 1976, 132–140. **PDF**

[19] *Feller W.* Generalization of a probability limit theorem of Cramer. Trans// Amer. math.Soc., 1943, **54**, No3, 361–372.

[20] *Lenart C.* On certain theorems of Berry and a limit theorem of Feller// Mat.Časopis, 1968, **18**, No1, 59–75.

[21] *Нагаев С.В.* Нижние границы для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин// Теория вероятн. и ее примен., 2001, **46**, No4, 785–792. **PDF**

[22] *Нагаев С.В.* О вероятностях больших уклонений в банаховых пространствах// Мат. Заметки, 1983, **34**, No2, 309–313. **PDF**

[23] *Pinelis I.F.* Optimum bounds for the distributions of martingales in Banach spaces// Ann. Probab., 1994, **7**, 745–789.

[24] *Johnson W.B., Schechtman G., and Zinn J.* Best possible constants in moment inequalities for linear combinations of independent and exchangeable variables// Ann. Probab., 1991, **13**,234–253.

[25] *Ибрагимов Р., Шарахметов Ш.* Точная константа в неравенстве Розенталя для случайных величин с нулевым средним// Теор. вероятн. и ее примен., 2001, **46**, N1, 134–137.

[26] *Прохоров Ю.В.* Усиленная устойчивость сумм и неограниченно делимые распределения// Теор. вероятн. и ее примен., 1958, **3**, N2, 153–165.

[27] *Прохоров Ю.В.* Об усиленном законе больших чисел// Изв. АН СССР. Сер. Мат., 1950, **14**, N6, 523–536.

[28] *Прохоров Ю.В.* Несколько замечаний к усиленному закону больших чисел// Теория вероятн. и ее примен., 1959, **4**, N2, 215–220.

[29] *Нагаев С.В.* О необходимых и достаточных условиях для усиленного закона больших чисел// Теория вероятн. и ее примен., 1972, **17**, N4, 609–618. **PDF**

2008 г.