# 5. Ветвящиеся процессы

**5.1. Введение.**

Развитие теории ветвящихся процессов в СССР началось во второй половине 1940-ых годов по инициативе А.Н. Колмогорова. В Ташкенте это направление пропагандировал С.Х. Сираждинов. В середине 1950-ых годов он организовал в Ташкентском университете семинар по теории ветвящихся процессов. Именно тогда у меня возник устойчивый интерес к ветвящимся процессам, который сохранился до настоящего времени

Мои работы по ветвящимся процессам можно сгруппировать следующим образом.

**(A) Переходные явления.** Когда в Москве началось исследование ветвящихся процессов, то в качестве объекта вначале рассматривались две простейшие модели: процесс Гальтона–Ватсона и марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем (в дальнейшем мы будем использовать аббревиатуру м.в.п.н.в.) В центре внимания в то время были два вопроса: как себя асимптотически ведет вероятность того, что процесс не выродится к моменту времени $t$, когда $t \to \infty$, и существует ли, и если да, то каково предельное распределение при $t \to \infty$ числа частиц при условии, что процесс не выродился.

Ответы на эти вопросы был довольно быстро, в течение нескольких лет, найдены, причем они зависят от того, какое значение принимает математическое ожидание $A$ числа потомков, получающихся при делении одной частицы. В частности, при $A = 1$ (соответствующий процесс называется критическим) вероятность продолжения процесса ведет себя, как $c/t$, где $c$ – постоянная, зависящая от параметров процесса, а условное распределение числа частиц в момент $t$, соответствующим образом нормированное, сходится при $t \to \infty$ к показательному закону.

Поскольку мы никогда не можем гарантировать для реальных процессов, что $A = 1$, то сразу же возникает вопрос, как себя ведет процесс при $A$ близких к 1, точнее говоря, при $A \to 1$ вместе с $t \to \infty$. Б.А. Севастьянов [1] показал, что для м.в.п.н.в. сходимость к показательному закону имеет место, независимо от того, с какой скоростью $A$ стремится к 1 с ростом $t$.

Эта же задача стояла и для процессов Гальтона–Ватсона. Она была решена в совместной с моей ученицей Р.Х. Мухамедхановой работе [2]. С нее и начались мои занятия ветвящимися процессами.

Результат, как и ожидалось, оказался тем же самым, что и для м.в.п.н.в, однако для этого понадобилось изобрести специальную модификацию разностного метода.

Явления, описанные в [1,2], получили название *переходных.* Сразу же по завершении работы [2] я решил заняться переходными явлениями для сравнительно нового тогда объекта процесса Беллмана–Харриса.

На этот раз задача оказалась гораздо более сложной – нужно было найти новый подход к анализу интегрального уравнения, которому в данном случае удовлетворяет производящая функция распределений числа частиц. Найденный мной подход не позволил решить задачу во всей общности. Поэтому я отдельно исследовал два случая:

(a) распределение времени жизни одной частицы арифметическое;

(b) распределение времени жизни имеет абсолютно непрерывную компоненту.

Остались неохваченными решетчатое, но не арифметическое, сингулярное распределения времени жизни одной частицы.

Переходным явлениям в случае (a) посвящена моя статья [3]. В отличие от процессов Гальтона – Ватсона и м.в.п.н.в., для процесса Беллмана – Харриса устойчивость показательного распределения гарантируется лишь при некоторых дополнительных предположениях относительно близости $A$ к 1 (подробнее см. п.5.2.)

У работы [3] трудная судьба: она была написана еще в 1965 г., но опубликовать ее я смог только в 1974 г. К счастью для меня она не успела за 9 лет устареть. Более того, она до сих пор остается единственной работой о переходных явлениях для процесса Беллмана–Харриса.

Во второй половине 1980гг я совместно с моим аспирантом А.В. Карпенко выполнил работу [4] по предельным теоремам для полного числа потомков в ветвящихся процессах Гальтона–Ватсона. В ней, в частности, исследовались переходные явления для распределения числа особей, живших в популяции до момента ее исчезновения.

Оказалось, что в данном случае целое семейство распределений, зависящих от параметра $r \leq 1$, выступает в качестве предельных, когда $n|1-A| \to -\ln r$ при $n \to \infty$ (см.п.5.2.)

Результаты нашего исследования мы предварительно изложили в препринте [5]. В 1988 г. статья [4] под тем же названием была направлена в журнал «Теория вероятностей и ее применения», где и была опубликована в 1993 г., через 5 лет после поступления.

**(B) Большие уклонения в ветвящихся процессах.** Проблема больших уклонений в ветвящихся процессах долгое время не привлекала исследователей. Первой работой в этом направлении была совместная с моим студентом Н.В. Вахрушевым статья [6], в которой было выведено вероятностное неравенство для критического процесса Гальтона–Ватсона в предположении, что выполнено условие типа Крамера.

По следам этой работы Г.Д. Макаров [7] доказал для критического процесса Гальтона–Ватсона теорему о больших уклонениях типа Крамера в узкой зоне, где действует приближение показательным законом.

Предельная теорема о больших уклонениях в более широкой зоне, с невырождающимся в единицу поправочным множителем, была получена в работе [8], написанной совместно с моим аспирантом В.И. Вахтелем. В другой совместной с Вахтелем работе [9] выводятся два типа вероятностных неравенств для максимума критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона на конечном промежутке времени. Это неравенства типа полученного в [6], но более точные, а с другой стороны, неравенства типа Нагаева–Фука [10] для независимых случайных величин (подробнее см. в п.5.4.) .

При доказательстве этих неравенств используются классические мартингальные неравенства, восходящие к Дубу, а также неравенство для супермартингалов, обобщающее одно из вероятностных неравенств Д.Х. Фука для мартингалов [11].

Значение неравенств, полученных в [9], сравнимо с ролью неравенств Нагаева–Фука в теории суммирования независимых случайных величин [10].

Дело в том, что эти неравенства очень удобны для доказательства предельных теорем для критических процессов Гальтона–Ватсона (см., например, [12, 13]).

**(C) Локальные теоремы для ветвящихся процессов.** Интерес к локальным теоремам для ветвящихся процессов в СССР возник еще в 1950-е гг. Первая работа, в которой доказывается локальная теорема для ветвящихся процессов, принадлежит, по-видимому, В. М. Золотареву [14]. В этой работе исследуется асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}(Z_t = k)$ при фиксированном $k$ для м.в.п.н.в. $Z_t$. Далее В.П. Чистяков [15] нашел для этого класса процессов асимптотику $\mathbf{P}(Z_t = k)$ при $t, k \to \infty$ в предположении существования четвертого момента числа прямых потомков одной частицы.

Каждая предельная теорема для процессов Гальтона–Ватсона имеет аналог в теории м.в.п.н.в. Гальтона–Ватсона, т.е. эти две теории дублируют друг друга. Однако в доказательствах использовались различные методы: в теории м.в.п.н.в. – дифференциальные уравнения, а для процессов Гальтона–Ватсона – разностные схемы. Правда, можно свести предельные теоремы для м.в.п.н.в. к соответствующим результатам для процессов Гальтона–Ватсона, пользуясь тем, что в любой м.в.п.н.в. можно вложить процесс Гальтона–Ватсона, но этим, по-моему, никто не занимался.

В работе Чистякова [15] говорится, что для процесса Гальтона–Ватсона локальная теорема получена Н.В. Смирновым. Однако с момента появления работы Чистякова ни формулировка, ни доказательство этого результата Смирнова не были опубликованы.

В начале 1960-ых годов я выполнил вместе с Р. Мухамедхановой исследование по предельным теоремам для критического процесса Гальтона–Ватсона $Z_n, n = 0, 1, 2, ...$, результаты которого изложены в статье [16]. В этой работе, в частности, была доказана локальная предельная теорема при условии существования четвертого момента случайной величины $Z_1$ (предполагается, что $Z_0 = 1$,

Одновременно появилась работа Х.Кестена, П. Нея, Ф. Спитцера [17], в которой локальная предельная теорема доказывается при условии

$$\mathbf{E}Z_1^2 \ln(1 + Z_1) < \infty.$$

При минимальном для сходимости к показательному закону моментном ограничении $\mathbf{E}Z_1^2 < \infty$ локальная предельная теорема для критического процесса Гальтона–Ватсона была доказана лишь сорок лет спустя в моей совместной с В.И. Вахтелем статье [18].

**(D) Ветвящиеся процессы с миграцией.** Несколько моих работ в основном в соавторстве с моим учеником М.Х. Асадуллиным посвящено ветвящимся процессам с иммиграцией [19–23]. Развитие здесь шло в сторону ослабления условий на обе составляющие: процесс иммиграции и ветвящийся процесс. Наиболее общий подход к описанию ветвящегося процесса с иммиграцией содержится в [23], где последний трактуется как двойная сумма

$$\sum_{i=1}^{v_n} \sum_{j=1}^{v_{ni}} \xi_{ij}^{(n)}.$$

Здесь с.в. $\xi_{ij}^{(n)}$ взаимно независимы при любом $n$, а с.в. $v_n$, $v_{ni}$ не зависят от семейства $\left\{\xi_{ij}^{(n)}\right\}$.

В совместной статье с моей ученицей Л.В. Хан [24] предлагается модель ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона с миграцией. В этой модели процесс иммиграции дополняется процессом эмиграции. Исторически это была первая модель такого рода. До этого рассматривались только модели либо только с иммиграцией, либо только с эмиграцией.

**5.2. Предельные теоремы для процессов Беллмана–Харриса.**

Пусть $Z(t)$ – критический процесс Беллмана–Харриса, $f(s)$ – производящая функция числа потомков одной частицы, $G$ – непрерывная справа функция распределения времени жизни одной частицы. Положим

$$M(t) = \mathbf{E}\Big\{Z(t) |\, Z(t) > 0\Big\}, \;\; F(t, s) = \mathbf{E}s^{Z(t)}, \;\; A = f'(1), \;\; B = f''(1).$$

Задача заключается в том, чтобы доказать сходимость распределения с.в. $Z(t)/M(t)$ при условии $Z(t)>0$ к показательному закону, когда одновременно $t\to\infty,\ A\to 1$.

Ниже я объясню суть примененного мной подхода, а заодно и характер возникающих тут трудностей. Отправной точкой является уравнение

$$F(t,s)=\int_{0-}^{t+} f\Big(F(t-\tau,\ s)\Big)\,dG(\tau)+s(1-G(\tau)). \tag{1}$$

Для простоты ограничимся случаем $s=0$.

Полагая $Q(t)=1-F(t,0)$ и используя разложение $f$ в ряд Тейлора в окрестности 1, мы приходим к уравнению

$$Q(t)=A\int_{0-}^{t+} Q(t-\tau)\,dG(\tau)-\frac{B}{2}\int_{0-}^{t+} Q^2(t-\tau)\,dG(\tau)+\int_{0-}^{t+} R(t-\tau)\,dG(\tau)+1-G(\tau),$$

где $R$ – поправочный член. Отсюда

$$Q(t)=\frac{B}{2}\int_{0-}^{t+} Q^2(t-\tau)\,dH(\tau,A)+\int_{0-}^{t+} R(t-\tau)\,dH(\tau,A)+H_1(t,A),$$

где

$$H(t,A)=\sum_{m=1}^{\infty} A^{m-1}G^{*m}(t),\quad H_1(t,A)=(1-G(t))*\sum_{m=0}^{\infty} A^{m}G^{*m}(t).$$

Предположим теперь, что $G(t)$ сосредоточено на натуральных числах (именно такие распределения рассматриваются в моей работе [3]). Пусть для простоты $A=1$. Тогда по теореме восстановления

$$u_k:=H(k,1)-H(k-1,1)=\frac{1}{\mu}+r_k,$$

где $\mu=\int_0^\infty u\,dG(\mu)$, причем скорость убывания $r_k$ зависит от скорости убывания $1-G(t)$ при $t\to\infty$. Если пренебречь $R$, то

$$Q(n)=\frac{B}{2\mu}\sum_{k=1}^{n} Q^2(n-k)u_k+\sum_{k=0}^{n}\Big(1-G(n-k)\Big)u_k.$$

Отсюда

$$Q(n-1)-Q(n)=\frac{B}{2\mu}\,Q^2(n)+\Omega(n), \tag{2}$$

где

$$\Omega(n)=\sum_{k=1}^{n}[Q^2(n-k)-Q^2(n-k-1)]r_k+G(n)-1-\sum_{k=0}^{n} g_{n-k}r_k,$$

$g_k=\mathbf{P}(\tau=k)$.

Далее показывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} Q(n)=0$, причем

$$\Omega(n)=o(Q^2(n)).$$

Возвращаясь к (2), убеждаемся, что

$$Q(n-1)-Q(n)\sim \frac{B}{2\mu}\,Q^2(n).$$

Точно такое же соотношение с $\mu=1$ имеет место для критического процесса Гальтона–Ватсона (см. [2]). Это означает, что при $n\to\infty$

$$Q(n)\sim \frac{2\mu}{Bn}.$$

В случае $A\neq 1$ дело осложнялось из-за отсутствия теорем типа восстановления для $H(t,A)$. Этот пробел восполняется в моей статье [25], в которой доказываются локальные теоремы восстановления в случае, когда одновременно $A\to 1$, $t\to\infty$.

Основной результат статьи [3] можно резюмировать следующим образом: *сходимость к показательному закону имеет место, если $A\downarrow 1$ или $A\uparrow 1$, но $\psi(t)<A<1$, причем скорость сходимости $\psi(t)$ зависит от скорости убывания $1-G(t)$ $t\to\infty$.* В случае $A\uparrow 1$, $A>\psi(t)$, вопрос остается открытым.

Основное внимание специалистов было обращено на более простой случай фиксированного $A$ (см. [26–30]). Для $A=1$ наиболее законченный результат получен М. Гольдстейном [30]. Ключевым пунктом в работе Гольдстейна является лемма (1.6), которая связывает производящую функцию процесса Беллмана–Харриса с производящей функцией вложенного процесса Гальтона–Ватсона, а именно: *для $t\geq 0$, $m=1,2,\dots$ ,* $0\leq s\leq 1$

$$1-f_m(s)-(1-s)G_m(t)\leq 1-F(t,s)\leq 1-f_m(s)+(1-s)(1-G_m(t)),$$

*где $f_m(s)$ – $m$-кратная итерация производящей функции процесса $f(s)$, $G_m(t)=G^{*m}(t)$ – $m$-кратная свертка $G(t)$.*

Если предположить, что $1-G(t)=o\big(1/t^2\big)$, то при $t<m(\mu-\varepsilon)$

$$G_m(t)=o\big(1/t\big).$$

Соответственно, если $t<m(\mu+\varepsilon)$, то

$$1-G_m(t)=o(1/t).$$

С другой стороны, известно, что

$$1-f_m(s)=\frac{1-s}{1+(g''(1)/2)m(1-s)}(1+\delta(m)),$$

где $\lim\limits_{m\to\infty}\delta(m)=0$ равномерно относительно $s$, $0\leq s\leq 1$. Отсюда следует, что при $m=\Big[1/\mu t\Big]$ и $t\to\infty$

$$1-F(t,s)\sim 1-f_m(s),$$

что является главным результатом в статье Гольдстейна [30]. Отсюда сходимость к показательному закону выводится без труда. Заметим, что в моей статье [3] также присутствует в неявной форме редукция к процессу Гальтона–Ватсона. Дело в том, что модельное разностное уравнение (2) является характерным для процессов Гальтона–Ватсона.

**5.3. Предельные теоремы для полного числа потомков в процессе Гальтона–Ватсона.** В 1985г. мы с моим учеником А.В. Карпенко приступили к изучению условных распределений

$$\mathbf{P}\Big(\frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n} Z_k < x|\, N=n\Big),$$

где $Z_k$ – процесс Гальтона – Ватсона, начинающийся с одной частицы, $A_n = \mathbf{E}\Big\{\sum_{k=1}^n Z_k|$ $N=n\Big\}$, где $N$ – момент вырождения процесса $Z(k)$, для всего спектра значений $A = \mathbf{E}Z_1$, включая переходные явления.

Эта постановка являлась новой даже при фиксированном $A$. Мы пришли к ней в связи с построением последовательного теста для оценки параметра $A$, оканчивающегося в случайный момент времени $N$.

Ранее распределения $\sum_{k=1}^n Z_k$ изучались при условии $N > n$ [31] или $N < n$ [32].

Наши исследования в этом направлении послужили предметом статьи [4].

Главный результат этой работы выглядит следующим образом:

*1) Пусть* $\lim_{A\to 1} n|1-A| = -\ln r < \infty$. *Тогда*

$$\lim_{A\to 1}\mathbf{P}(S_n/m_N < x|N=n) = G(x,r),$$

*где*

$$\int_0^\infty e^{-tx} d_x G(x,r) = g(t,r) := \begin{cases} 3t/\sinh^2\sqrt{3t}, & r=1\\ \frac{(1-r)^2 r^{d(t,r)}(d(t,r))^2}{r(1-r^{d(t,r)})^2}, & r<1, \end{cases}$$

$$t\ge 0,\ d(t,x) = \sqrt{1+2t/(1-x)^2 h(\ln x)},$$

$$h(x) = \frac{x(1+e^x)+2(1-e^x)}{(e^x-1)^3}.$$

*2) Если* $\lim_{A\to 1} n|1-A| = \infty$, *то*

$$\lim_{A\to 1}\mathbf{P}(|S_n/m_N - 1| > \epsilon|N=n) = 0.$$

Таким образом, устойчивость предельного распределения $G(x,1)$ имеет место только при $|A-1| = o(n^{-1})$.

**5.4. Большие уклонения в ветвящихся процессах.** Я начну с описания моей совместной с Вахрушевым работы [6].

Пусть $Z_n,\ n=0,1,2,...,$ – критический процесс Гальтона–Ватсона, начинающийся с одной частицы. Положим $f(x) = \sum_{k=0}^\infty p_k x^k$, где $p_k$ – вероятность того, что одна частица порождает $k$ частиц. Пусть $B(x) = f''(x),\ B = B(1)$. Обозначим через $R$ радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^\infty p_k x^k$. В этих терминах неравенство выглядит следующим образом: *если* $B>0$ *и* $R>1$, *то для* $0<y_0<R-1$

$$\mathbf{P}(Z_n \ge k) \le (1+y_0)\Big(1+\frac{1}{B_0 n/2 + 1/y_0}\Big)^{-k}, \tag{3}$$

*где* $B_0 = B(1+y_0)$.

Функция $B(1+y)n/2 + 1/y$ достигает минимума при $y = y_1$, где $y_1$ – решение уравнения $B'(1+y)y^2 = 2/n$.

Если $f(x)$ фиксирована, то $y_1^2 = O\Big(1/n\Big)$. Следовательно, $B'(1+y_1) = B'(1) + O\Big(1/\sqrt{n}\Big)$, т.е. $y_1 = \sqrt{\frac{2}{nB'(1)}} + O(n^{-3/2})$.

Если теперь положить $y_0 = y_1$ и $k = \Big[Bun/2\Big]$, то, согласно (3)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n \geq k) \leq e^{-u}.$$

С другой стороны, в силу интегральной предельной теоремы для критического процесса Гальтона–Ватсона

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Bn}{2}\mathbf{P}(Z_n \geq k) \leq e^{-u}.$$

Это сравнение может рассматриваться как свидетельство того, что оценка (3) при больших относительно $n$ значениях $k$ является достаточно точной.

Под влиянием нашей работы [6] Г.Д. Макаров [7] доказал предельную теорему о больших уклонениях типа Крамера, а именно,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\leq u_n} e^u P_n(u) = 1, \tag{4}$$

где $P_n(u) = \mathbf{P}\big(2Z_n/Bn > u \,|\, Z_n > 0\big)$, $u_n = o\Big(n/(\ln n \, \ln_{(N)} n)\Big)$. Здесь $\ln_{(N)}$ – $N$-я итерация логарифма, а $N \geq 2$.

Если исходить из аналогии со схемой суммирования независимых случайных величин, то следует ожидать, что при $R > 1$ существует зона значений $u$, в которой

$$P_n(u) = e^{-u}\Omega_n(u)(1 + o(1)), \tag{5}$$

где $\Omega_n(u)$ – явно вычисляемый поправочный множитель.

Действительно, в совместной работе с моим учеником Вахтелем [8] было показано, что *если* $k/n \to \infty$ *и* $k = o(n^2)$, *то*

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) = \frac{2}{Bn}\exp\Big\{\frac{2k}{Bn} - \frac{2\gamma}{Bn^2}\ln\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big\}\Big(1 + O\Big(\frac{k}{n^2} + \frac{\ln^2 n}{n}\Big)\Big),$$

*где* $\gamma = 1 - 2C/(3B^2)$.

Это означает, что при $u = o(n)$

$$P_n(u) \sim e^{-u}\exp\Big\{-\frac{\gamma}{n}u\ln u\Big\},$$

т.е. поправочный множитель $\Omega(u)$ в (5) задается равенством

$$\Omega_n(u) = \exp\Big\{-\frac{\gamma}{n}u\ln u\Big\}.$$

Нетрудно убедиться, что при $\gamma \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \Omega(v_n) = 1 \tag{6}$$

тогда и только тогда, когда

$$v_n = o\Big(\frac{n}{\ln n}\Big).$$

Если же $\gamma = 0$, то (6) выполняется в более широкой зоне $v_n = o(n)$.

Таким образом, аппроксимация показательным распределением $P_n(u) = e^{-u}$ имеет место для $u = o\big(n/\ln n\big)$, если $\gamma \neq 0$. В противном случае зона расширяется до $u = o(n)$. Граница $u = o(n)$ соответствует границе $x = o(\sqrt{n})$ в классической теореме Крамера о больших уклонениях сумм одинаково распределенных независимых случайных величин.

Непосредственным продолжением работы [6] является моя совместная с Вахтелем статья [9]. В ней неравенства типа (3) выводятся для случайной величины $M_n = \max\limits_{k\le n} Z_k$, а именно: *если* $R > 1$, *то для любого* $0 < y_0 < R-1$

$$\mathbf{P}(M_n \ge k) \le y_0\bigg[\Big(1 + \frac{1}{1/y_0 + B_0/2}\Big)^k - 1\bigg]^{-1}. \tag{7}$$

*где* $B_0 = f''(1+y_0)$.

Из оценки (7), в частности следует, что *для любого* $1 < \rho < R$

$$\mathbf{P}(M_n \ge k) \le \frac{4}{n\Omega_\rho}\exp\Big\{-\frac{k}{n\Omega_\rho + 1}\Big\}, \tag{8}$$

*если одновременно* $n > \frac{2}{(\rho-1)\Omega_\rho}$, $\;k > n\Omega_\rho + 1$, *где* $\Omega_p = f''(\rho)$.

Очевидно, множитель $1/n$ является существенным, если отношение $k/n$ не очень велико. Неравенство (8) является аналогом неравенства Петрова [33] (см. с. 81, теорема 16).

Отправной точкой при выводе оценки (7) является неравенство

$$\mathbf{P}(M_n \ge k) \le \frac{f_n(e^h) - 1}{e^{hk} - 1}, \tag{9}$$

которое, в свою очередь, следует из известного неравенства Дуба для субмартингалов. Действительно,

$$\mathbf{P}(M_n \ge k) = \mathbf{P}\Big(\max_{i\le n} Y_i(h) \ge e^{hk} - 1\Big),$$

где $Y_n(h)$ есть субмартингал $e^{hZ_n} - 1$. С другой стороны, по неравенству Дуба

$$\mathbf{P}\Big(\max_{i\le n} Y_i(h) \ge e^{hk} - 1\Big) \le \frac{\mathbf{E}Y_n(h)}{e^{hk} - 1} = \frac{f_n(e^h) - 1}{e^{hk} - 1}.$$

Значение $h = h(n)$ в (9) выбирается точно такое же, как в работе [6].

Различие заключается в том, что в последней используется оценка

$$\mathbf{P}(Z_n \ge k) < \frac{f_n(e^h)}{e^{hk}}.$$

Именно в результате того, что в (9) из $f_n(e^h)$ вычитается единица, в оценке (7) появляется множитель $y_0$ вместо $1 + y_0$ в оценке (3). В свою очередь, это позволяет получить в оценке (8) дополнительный по сравнению с (3) множитель $1/n$, полагая $y_0 = 2/n\Omega_\rho$.

В обсуждаемой работе [9] рассматривается также случай, когда условие Крамера не выполняется, т.е. $R = 1$. Получаемые при этом вероятностные неравенства формулируются в терминах как урезанных, так и полных моментов случайной величины $\xi$, равной $Z_1$ по распределению. Обозначим $B_r = \mathbf{E}\xi^r,\ r > 1$. Для любого $N > 0$ положим $\bar{B} = \mathbf{E}\Big\{\xi(\xi-1);\ \xi \le N\Big\},\ \bar{B}_r = \mathbf{E}\Big\{\xi^{r-1}(\xi-1);\ \xi \le N\Big\}/2$. Если $r \ge 2,\ N \ge 1$ и $y_0 > 0$, то имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(M_n \ge k) \le \Big(y_0 + \frac{1}{N}\Big)\left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + e^r\bar{B}n/2 + n\bar{\beta}_r e^{y_0 N}/N^{r-2}}\right)^k - 1\right]^{-1} + n\mathbf{P}(\xi > N). \quad (10)$$

При выводе этого неравенства используется срезка распределения случайной величины $\xi$ на уровне $N$. Слагаемое $n\mathbf{P}(\xi > N)$ является оценкой возникающей при этом погрешности. Этот подход использовался ранее при выводе вероятностных неравенств для сумм независимых случайных величин в совместной с моим аспирантом Фуком статье [10]. Параметры $y_0$ и $N$ являются свободными. Выбор их зависит от конкретной ситуации: в одних случаях нас интересует, прежде всего, точность, а в других – простота и наглядность оценки.

Примером наглядной оценки может служить неравенство

$$\mathbf{P}(M_n \ge k) \le \exp\Big\{-\frac{k}{l(r)Bn}\Big\} + \frac{G(r, B, B_r)n}{k^r}, \quad (11)$$

которое действует при $r > 2$ и $k \ge Bn$. Здесь $l(r)$ и $C(r, B, B_r)$ – постоянные, зависящие от параметров, указанных в скобках.

Неравенство (11) вполне предсказуемо, если принять во внимание, что процесс $W_n := \sqrt{Z_n}$ является супермартингалом с равномерно ограниченными условными моментами порядка $t \ge 2$

$$\mathbf{E}\Big\{|W_{n+1} - W_n|^t \mid Z_n = k\Big\} < c\mathbf{E}\xi^{t/2}.$$

К таким супермартингалам применимы результаты Фука [11]. В частности,

$$\mathbf{P}(W_n > x) < e^{-c_1x^2/nB^2} + \frac{c_2 n\mathbf{E}\xi^{t/2}}{x^t}.$$

Возвращаясь теперь к исходному процессу $Z_n$, мы получаем неравенство вида (11) для $r = t/2$.

**5.5. Локальные теоремы для ветвящихся процессов.** Как уже говорилось в разделе (**C**) введения, в 1966г. появились две работы [16, 17], в которых доказывается локальная предельная теорема для критического процесса Гальтона–Ватсона.

В работе [16] выводится асимптотическая формула

$$\frac{B^2n^2}{4}\,\mathbf{P}(Z_n = k) = \exp\Big\{-\frac{2k}{Bn}\Big\} + \alpha_{kn} + O(k^{-1}\ln n) \quad (12)$$

где $\alpha_{kn} \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по всем $k$, при условии, что $\mathbf{E}Z_1^4 < \infty$ и общий наибольший делитель $d$ множества $\{k : \mathbf{P}(Z_1 = k) > 0\}$ равен 1. Здесь $B = f''(1)$, $f$ – производящая функция случайной величины $Z_1$.

Одновременно появилась работа Х.Кестена, П. Нея, Ф. Спитцера [17], в которой формулируется следующий результат: *если $k$ и $n$ стремятся к бесконечности так, что их отношение остается ограниченным, то*

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \exp\left\{\frac{2kd}{Bn}\right\}\mathbf{P}(Z_n = kd) = \frac{4d}{B^2}. \tag{13}$$

Сравнивая (12) и (13), мы видим, что (13) следует из (12) только при условии, что $k^{-1}\ln n$ стремится к нулю. С другой стороны, из (12) следует, что соотношение (13) будет оставаться верным, если $k/n$ стремится к бесконечности достаточно медленно.

Авторы работы [17] указывают, что соотношение (13) верно без каких-либо избыточных моментных ограничений, т.е. достаточно лишь выполнение условия $B < \infty$, однако доказательство было ими проведено при более ограничительном условии

$$\mathbf{E}Z_1^2 \ln(1 + Z_1) < \infty. \tag{14}$$

Они также отмечают, что это предположение делается ради простоты изложения. Однако в монографии Атрейя и Нея [34] говорится, что к моменту выхода книги доказательство локальной предельной теоремы при условия $B < \infty$ не было нигде опубликовано.

Я вернулся к локальной предельной теореме много лет спустя. В 2005 г. была опубликована совместная с Вахтелем работа [9], в которой нам удалось снять ограничение (14), а именно, мы получили следующий результат: *если $B < \infty$, $k$ и $n$ стремятся к бесконечности так, что отношение $k/n$ остается ограниченным, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B^2n^2}{4d}(1 + 2d/Bn)^{k+1}\mathbf{P}(Z_n = kd) = 1. \tag{15}$$

Очевидно, что заменяя в левой части этого соотношения множитель $(1 + 2d/Bn)^k$ на эквивалентное выражение $\exp\{2kd/Bn\}$, мы получим в точности (13). Таким образом,‘ мы приближаем распределение процесса $Z_n$ геометрическим распределением с параметром $2d/B_n$ вместо экспоненциального. Такой подход представляется более естественным, так как в этом случае оба распределения сосредоточены на множестве целых неотрицательных чисел. Кроме того, аппроксимация геометрическим распределением является, вообще говоря, более точной. Так, например, для критического процесса с дробно-линейной производящей функцией

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \frac{4}{B^2n^2}(1 + 2/Bn)^{-k-1}$$

при $k \geq 1$. Тем самым, (15) выполняется для всех $k$, а соотношение (13) только при $k = o(n^2)$.

Доказательство соотношения (15) основывается на следующем утверждении, которое представляет и самостоятельный интерес.

**Предложение.** *Если $B < \infty$, то существует константа $C = C(f)$ такая, что*

$$\sup_{n,k\geq 1} n^2\mathbf{P}(Z_n = k) \leq C.$$

Наш подход к доказательству локальной предельной теоремы отличается от подхода, использовавшегося Кестеном, Неем и Спицером, хотя некоторые их результаты мы используем.

# Список литературы


[1] *Севастьянов Б.А.* Переходные явления в ветвящихся процессах// Теория вероятн. и ее примен., 1959, **4**, N2, 121–135.

[2] *Нагаев С.В., Мухамедханова Р.* Некоторые предельные теоремы из теории ветвящихся случайных процессов// Сб. "Предельные теоремы и статистические выводы.", Ташкент, 1966, 83–90. **PDF**

[3] *Нагаев С.В.* Переходные явления для зависящих от возраста ветвящихся процессов с дискретным временем, I, II// Сиб. мат. журн., 1974,**15**, № 2, 368-394; N3, 570–579. **PDF**

[4] *Нагаев С.В., Карпенко А.В.* Предельные теоремы для полного числа потомков в ветвящемся процессе Гальтона–Ватсона// Теория вероятн. и ее примен., 1993, **38**, N3, 503–528. **PDF**

[5] *Нагаев С.В., Карпенко А.В.* Предельные теоремы для полного числа потомков в ветвящемся процессе Гальтона–Ватсона// Препринт 1987/33, Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1987, 1–36.

[6] *Нагаев С.В., Вахрушев Н.В.* Оценка вероятностей больших уклонений для критического процесса Гальтона–Ватсона// Теория вероятн. и ее примен., 1975, **20**, N1, 180–181. **PDF**

[7] *Макаров Г.Д.* Большие уклонения для процесса Гальтона – Ватсона// Теория вероятн. и ее примен., 1980, **25**, N3, 490–501.

[8] *Нагаев С.В., Вахтель В.И.* Предельные теоремы для вероятностей больших уклонений процесса Гальтона–Ватсона// Дискрет. Матем., 2003, **15**, 3–27. **PDF**

[9] *Нагаев С.В., Вахтель В.И.* Вероятностные неравенства для критического процесса Гальтона–Ватсона// Теория вероятн. и ее примен., 2005, **50**, N2, 266–291. **PDF**

[10] *Фук Д.Х., Нагаев С.В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин// Теория вероятн. и ее примен., 1971, **16**, N4, 660–675 (письмо в редакцию: 1976, **21**, N 4). **PDF**

[11] *Фук Д.Х.* Некоторые вероятностные неравенства для мартингалов// Сиб. мат. ж., 1973,**14**, N1, 185–193.

[12] *Ватутин В. А. , Вахтель В. И., Фляйшманн К.* Критические процессы Гальтона–Ватсона: Максимум общего числа частиц внутри большого окна. – Теория вероятн. и ее примен., 2007, т.52, в.3, 419—445.

[13] *Вахтель В. И.* Предельные теоремы для вероятностей больших уклонений критического процесса Гальтона–Ватсона со степенными хвостами.– Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в.4, 644—659.

[14] *Золотарев В.М.* Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов// Теория вероятн. и ее примен., 1957, **2**, N3, 360–374.

[15] *Чистяков В.П.* Локальные предельные теоремы теории ветвящихся процессов// Теория вероятн. и ее примен., 1957, **2**, N2, 256–266.

[16] *Нагаев С.В., Мухамедханова Р.* Некоторые предельные теоремы из теории ветвящихся процессов// в сб.: Предельные теоремы и статистические выводы. Ташкент: Фан, 1966, 90–112. **PDF**

[17] *Kesten H., Ney P., Spitzer F.* The Galton–Watson process with mean one and finite variance// Теория вероятн. и ее примен., 1966, **11**, N4, 579–611.

[18] *Нагаев С.В., Вахтель В.И.* О локальной предельной теореме для критического процесса Гальтона–Ватсона// Теория вероятн. и ее примен., 2005, **50**, N3, 457–479. **PDF**

[19] *Нагаев С.В.* Предельная теорема для ветвящихся процессов с иммиграцией// Теория вероятн. и ее примен., 1975, **20**, N 1, 178–180. **PDF**

[20] *Нагаев С.В., Асадуллин М.Х.* Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса с иммиграцией// Теория вероятн. и ее примен., 1981, **26**, N2, 427–428.

[21] *Нагаев С.В., Асадуллин М.Х.* Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса с иммиграцией// Мат. Заметки, 1982, **32**, № 4, 537–548. **PDF**

[22] *Нагаев С.В., Асадуллин М.Х.* Об одной схеме суммирования случайного числа независимых величин с приложением к ветвящимся процессам с иммиграцией// Предельные теоремы теории вероятностей. Труды Инст. мат., Новосибирск, 1985, **5**, 96–104. **PDF**

[23] *Нагаев С.В., Асадуллин М.Х.* Об одной схеме суммирования независимых случайных величин с приложением к ветвящимся процессам с иммиграцией// ДАН СССР, 1985, **285**, N2, 293–296. **PDF**

[24] *Нагаев С.В., Хан Л.В.* Предельные теоремы для критического процесса Гальтона–Ватсона с иммиграцией// Теория вероятн. и ее примен., 1980, **25**, N 3, 523–534. **PDF**

[25] *Нагаев С.В.* Некоторые теоремы типа восстановления// Теория вероятн. и ее примен., 1968, **13**, вып. 4, 160–164. (исправл.: 1969, **14**, N4). **PDF**

[26] *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы с превращениями, зависящими от возраста частиц// Теория вероятн. и ее примен., 1964, **9**, N4, 578–594.

[27] *Chover J., Ney P.E.* A non-linear integral equation and its application to critical branching processes// J.Math. and Mech., 1965, **14**, N5, 723–736.

[28] *Weiner H.J.* Asymptotic properties of a simple age-dependent branching processwith m=1// Ann. Math. Statistics, 1965, **36**, N 5, 1565–1568.

[29] *Севастьянов Б.А.* Предельные теоремы для ветвящихся процессов с превращениями, зависящими возраста частиц// Теория вероятн. и ее примен., 1968, **13**, N2, 243–264.

[30] *Goldstein M.I.* Critical age-dependent branching processes: single and multitype// Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Geb., 1971, **17**, 74–78.

[31] *Pakes A.G.* Some limit theorem for the total progeny of a branching process// Adv. Appl. Probab., 1971, **3**, N1, 176–192.

[32] *Weiner H.J.* Conditional moments in a critical age-dependent branching process// J. Appl. Probab., 1975, **12**, 581–587.

[33] *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.

[34] *Athreya K.B., Ney P.* Branching processes// Berlin et al., Springer, 1972, XI, 287p.

2007 г.