6. Бесконечномерные распределения

6.1. Введение. В настоящее время теория распределений в бесконечномерных пространствах является развитой областью теории вероятностей. Она возникла как естественное обобщение теории распределений в эвклидовом пространстве конечной размерности. Одна из ее ветвей – это теория суммирования случайных векторов со значениями в бесконечномерных пространствах преимущественно банаховых. В последней, в свою очередь, можно выделить два направления:

(a) предельные теоремы,

(b) вероятностные неравенства.

Оба эти направления в своем развитии проходили те же этапы, что и теория суммирования конечномерных случайных векторов.

В области предельных теорем первым этапом было изучение условий, при которых распределение суммы $\sum_{k=1}^{n} X_k$ независимых случайных векторов сближается с гауссовским, когда число слагаемых неограниченно увеличивается. Утверждения, касающиеся такого сближения, являются вариантами центральной предельной теоремы (ЦПТ) в соответствующем пространстве.

На эту тему существует обширная литература, но нас интересует несколько другой вопрос, а именно, скорость сходимости в ЦПТ.

(A) Оценки скорости сходимости сходимости в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве. Интерес к этой проблеме возник у меня в середине 1970 гг. В то время наибольшее внимание специалистов привлекала следующая задача: какова скорость сходимости в ЦПТ для одинаково распределенных случайных величин (с.в.) в гильбертовом пространстве на шарах с центром в нуле. Гипотетически наилучшей представлялась оценка $O(n^{-1/2})$, где n – число слагаемых, такая же по порядку, как классическая оценка Берри–Эссеена. Однако было неясно, возможна ли в данном случае такая оценка.

Первая публикация на эту тему [1] появилась в 1965 г. За 10 следующих лет оценка была доведена до $O(n^{-1/6})$ [2].

Занявшись этой проблемой, я решил на первом этапе сузить постановку задачи, ограничившись с.в. с независимыми координатами (имеется в виду l_2 – реализация гильбертова пространства). Этот план был осуществлен в совместной с моим учеником В.И. Чеботаревым статье [3] (см. также [4]). Мы показали, что в рассматриваемом нами частном случае имеет место оценка $O(n^{-1/2})$ при условии $\mathbf{E}|X_1|^3 < \infty$. Здесь и ниже символ $|X|$ означает норму X.

Исторически это была первая оценка вида $O(n^{-1/2})$ в бесконечномерном случае. Предложенная нами модель затем неоднократно использовалась другими авторами для построения различных примеров и контрпримеров. В первую очередь следует отметить работу В.В. Сенатова [5].

Наш результат, анонсированный в 1977 г. [4], был опубликован в 1978 г. [3], а уже в следующем, 1979 г., появилась статья Ф. Геце [6], в которой была выведена оценка $O(n^{-1/2})$ в общем случае, правда, при условии $\mathbf{E}|X_1|^6 < \infty$. Но самое главное в работе Геце – это остроумный и неожиданный прием, позволяющий оценивать характеристическую функцию квадрата нормы суммы $\sum_{k=1}^{n} X_k$. Следуя по этому пути, В.В. Юринский [7] в 1982 г. довел моментное ограничение до минимального: $\mathbf{E}|X_1|^3 < \infty$. Прием, найденный Геце, играет существенную роль во всех последующих работах, посвященных точности нормальной аппроксимации в гильбертовом пространстве (см., например, [8]– [20]). И Геце, и Юринского интересовала, в первую очередь, зависимость оценки от числа слагаемых n и моментов распределения слагаемых случайных векторов. Чтобы добиться полной аналогии с классической оценкой Берри–Эссеена, нужно было исследовать зависимость оценки от ковариационного оператора. Именно в эту сторону сместился центр тяжести дальнейших исследований.

Первой работой в этом направлении была моя статья [8]. Подробнее об этой и последующих работах будет сказано ниже в п. 6.2.

Наряду с оценками типа Берри–Эссеена мы с Чеботаревым занимались также асимптотическими разложениями в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве. Результаты наших исследований в этом направлении изложены в статьях [16] и [18]. Нашими предшественниками в этой области (имеются в виду асимптотические разложения) были Ф. Геце [6], В.Ю. Бенткус [10,11], В.Ю. Бенткус и Б.А. Залесский [12]. Параллельно с нами асимптотическими разложениями занимались Б.А. Залеский, В.В. Сазонов и В.В. Ульянов [15].

(B) Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных векторов со значениями в банаховых пространствах. Мы начнем с вероятностей больших уклонений для гауссовских мер в банаховом пространстве. Интенсивное изучение последних началось в 1950-е годы в связи с развитием общей теории случайных процессов. Большая заслуга в стимулировании интереса к распределениям в банаховом пространстве принадлежит А.Н. Колмогорову и Ю.В. Прохорову. Кстати, определение распределения в банаховом пространстве было дано Колмогоровым еще в 1935г.

Довольно долгое время не было известно, с какой скоростью убывает вероятность $\mathbf{P}(|X| > r)$ при $r \to \infty$, где X – гауссовская с.в. со значениями в сепарабельном банаховом пространстве, пока, наконец, в 1970 г. не появились сразу три работы [21]– [23], в которых были предложены три различных подхода к решению этой проблемы. Здесь и ниже символ $|X|$ означает норму X.

В работах Г. Ландау, Л. Шеппа [21] и К. Ферника [22] было показано, что для любой гауссовской случайной величины X существует постоянная $c(X) > 0$ такая, что

$$\mathbf{P}(|X| > r) < \exp\{-c(X)r^2\}. \tag{1}$$

Менее точный результат был получен А.В.Скороходом [23], а именно,

$$\mathbf{P}(|X| > r) < \exp\{-c(X)r\}. \tag{2}$$

.

Позднее обнаружилось, что при помощи простых рассуждений, опирающихся на безграничную делимость нормального закона, из (2) можно получить оценку вида (1) (см., например, [30], с. 80).

Новый подход, отличный от тех, которые использовались в вышеупомянутых работах был предложен в моей работе [31] (см. также [32]). Этот подход приводит к оценке вида (1). Более подробно о работе [31]) говорится в п. 6.4.

Перейдем теперь к вероятностным неравенствам для сумм независимых случайных векторов в сепарабельном банаховом пространстве. На эту тему я опубликовал работы [35–37]. В двух первых выводятся верхние оценки для вероятности попадания во внешность шара произвольного радиуса, а в третьей – нижние оценки для этой же вероятности. Форма оценки, найденая в [36] является новой и в одномерном случае, то же самое можно сказать по отношению к работе [37]. Верхние оценки, полученные в [36], обобщаются на зависимые случайные векторы в банаховом пространстве в моей работе [45]. В свою очередь, последние дают возможность очень просто получать моментные неравенства (подробнее см. п. 6.6).

Альтернативный подход к выводу вероятностных неравенств в банаховых пространствах ранее был предложен Юринским [39]. Этот подход основан на представлении нормы случайного вектора в виде суммы мартингал–разностей. Знакомясь с этой работой, я обратил внимание на то, что соответствующий мартингал удовлетворяет условиям Фука [40]. Это дает возможность без дополнительных усилий получать различные вероятностные и моментные неравенства (см. по этому поводу [42].)

6.2. Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме. Прежде всего я сформулирую оценку, которая получена в моей совместной с Чеботаревым статье [3].

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ – последовательность независимых одинаково распределенных с.в. со значениями в l_2, причем $\mathbf{E}X_1 = 0$. Через X_{kj} обозначим j-ю координату с.в. X_k. Положим $\sigma_j^2 = \mathbf{E}X_{1j}^2$, $\beta_j = \mathbf{E}|X_{1j}|^3$, $\beta = \mathbf{E}|X_1|^3$. В предположении, что X_{kj} взаимно независимы, мы получили в [3] оценку

$$\sup_x \Big|\mathbf{P}\Big(\big|n^{-1/2}S_n\big| < x\Big) - \mathbf{P}\Big(|Z| < x\Big)\Big| < c\Big[n^{-1/2}\Big(\prod_1^4 \sigma_j\Big)^{-3/4}\sum_5^\infty \beta_j + \Delta_n^{(4)}\Big]. \qquad (3)$$

Здесь $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $Z = (Z_1, Z_2, ...)$ – нормальная с.в. в l_2 с $\mathbf{E}Z = 0$, $\mathbf{E}Z_j^2 = \sigma_j^2$,

$$\Delta_n^{(m)} = \sup_x \Big|\mathbf{P}\Big(\sum_{j=1}^m \big(n^{-1/2}S_{nj}\big)^2 < x\Big) - \mathbf{P}\Big(\sum_{j=1}^m Z_j^2 < x\Big)\Big|,$$

где $S_{nj} = \sum_{k=1}^n X_{kj}$. С другой стороны, согласно многомерной центральной предельной теореме $\Delta_n^{(m)} < c(m)\, n^{-1/2}\sum_{j=1}^m \beta_j/\sigma_j^3$. Таким образом, в оценке (3) участвуют только четыре из бесконечного множества дисперсий σ_j^2. Не нарушая общности, можно считать, что $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \ge ... \ge \sigma_k^2 \ge ...$. Заметим, что дисперсии σ_j^2 являются собственными значениями соответствующего ковариационного оператора.

Перейдем теперь к общему случаю. Мы сохраним введенные выше обозначения, но будем считать, что X_j принимают значения в сепарабельном гильбертовом пространстве H, необязательно l_2.

Я сформулирую здесь следствие из основного результата моей статьи [8], которое приводится в заметке [24],

$$\Delta_n(a) \le c\beta\Bigg(\Big(\prod_1^7 \sigma_j\Big)^{-6/7} + \frac{1}{\sigma^2\sigma_1\sigma_2\sigma_7}\Bigg)\Big(\sigma^3 + |a|^3\Big)n^{-1/2}. \qquad (4)$$

Здесь

$$\Delta_n(a) := \sup_r \Big|\mathbf{P}\big(\big|n^{-1/2}S_n - a\big| < r\big) - \mathbf{P}\big(|Z - a| < r\big)\Big|,$$

$\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \ge \ldots \ge \sigma_j^2 \ge \ldots$ – собственные значения ковариационного оператора с.в. X_1, $\sigma^2 := \mathbf{E}|X_1|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2$, Z – гауссовская с.в. с такими же моментными характеристиками первого и второго порядков, что и X_1. По форме оценка (4) очень похожа на предшествующую оценку (3) с той разницей, что в ней участвуют не четыре, а семь собственных значений ковариационного оператора. Априори, это можно объяснить тем, что оценка (4) в отличие от предыдущей оценки рассчитана на шары со смещенными центрами.

В вышеупомянутой работе [3] было также доказано, что при $a = 0$ константа в оценке вида $\Delta_n(0) = O(n^{-1/2})$ должна зависеть, по крайней мере, от трех собственных значений. Уже после появления статьи [8] В.В. Сенатов [5] построил пример, показывающий, что при $a \neq 0$ постоянная в оценке $\Delta_n(a) = O(n^{-1/2})$ включает не менее 6 собственных значений. Более точно, для любых наперед заданных $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \ge \ldots \ge \sigma_6^2 \ge \sigma_7^2$ существует распределение в $\mathbb{R}^7$, для которого последние являются собственными значениями ковариационного оператора, такое, что при $\sigma_6^2 \le |a| \le \rho\sigma_6^2$, $\rho > 1$,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt{n}\Delta_n(a) \ge c(\sigma_7^2, \rho)|a|^3/\Lambda_6^{1/2}, \tag{5}$$

где $c(\sigma_7, \rho)$ зависит только от σ_7 и ρ. Здесь и в дальнейшем $\Lambda_l = \prod\limits_{j=1}^{l} \sigma_j^2$.

Спустя три года после публикации моей статьи [8] Б.А. Залесский, В.В. Сазонов, В.В. Ульянов [14, 17] получили оценку

$$\Delta_n(a) < \frac{c\beta(\sigma^3 + |a|^3)}{\sqrt{n}\Lambda_6^{1/2}}, \tag{6}$$

которая зависит от шести первых собственных значений. Полагая в этой оценке $a = 0$, имеем

$$\Delta_n(0) < \frac{c\beta\sigma^3}{\sqrt{n}\Lambda_6^{1/2}}. \tag{7}$$

Пример Сенатова, о котором речь шла выше, не распространяется на случай $a = 0$. Это наводит на мысль, что оценка (6) на самом деле не является правильной. И действительно, некоторое время спустя мне удалось получить более точную оценку

$$\Delta_n(a) \ll \frac{\beta}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sigma}{\Lambda_4^{1/2}}\left(1 + \sum_1^4 \left|\frac{a_j}{\sigma_j}\right|^{3/2}\right) + \frac{|a(5)|^3}{\Lambda_6^{1/2}}\right). \tag{8}$$

Здесь a_j – j-я координата вектора $a = (a_1, a_2, \ldots) \in l_2$, $a(k+1) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots)$. (Мы пишем $A \ll B$, если существует абсолютная постоянная c такая, что $A \le cB$). Этот результат был анонсирован в [25]. К сожалению, доказательство до сих пор не опубликовано.

Из (8) вытекает оценка

$$\Delta_n(0) < \frac{c\beta\sigma}{\sqrt{n}\,\Lambda_4^{1/2}},$$

которая точнее, чем (7), поскольку зависит только от четырех собственных значений ковариационного оператора. Нетрудно видеть также, что (8) влечет за собой (13). Действительно,

$$\frac{\sigma|a_j|^{3/2}}{\Lambda_4^{1/2}\sigma_j^{3/2}} \le \frac{\sigma^{3/2}|a|^{3/2}}{\Lambda_6^{1/2}}, \quad j \le 4.$$

В свою очередь,

$$\sigma^{3/2}|a|^{3/2} \le (\sigma^3 + |a|^3)/2.$$

Следовательно,

$$\Delta_n(a) \ll \frac{\beta}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sigma}{\Lambda_4^{1/2}} + \frac{|a|^3+\sigma^3}{\Lambda_6^{1/2}}\right) \ll \frac{\beta(|a|^3+\sigma^3)}{\sqrt{n}\Lambda_6^{1/2}}. \tag{9}$$

Еще в 1945 г. К.-Г. Эссеен [26] в частном случае $H = \mathbb{R}^l$ получил оценку

$$\Delta(0) \le c(l)\left(\mathbf{E}|X_1|^4\right)^{3/2} n^{-l/(l+1)} \tag{10}$$

в предположении, что ковариационная матрица является единичной. Зная этот результат, естественно было предположить, что нечто аналогичное имеет место и в общем случае. Интенсивные исследования в этом направлении велись в 1980 – 1990 годах. В 1982 г. Б.А. Залесский [9] доказал, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\Delta_n(0) = O(n^{-1+\varepsilon}), \tag{11}$$

если $\sigma_N^2 \ne 0$ при достаточно большом $N = N(\varepsilon)$. В 1983 г. В.Ю. Бенткус [27] получил более общий результат, из которого вытекает оценка (11) для

$$\Delta_{n,1}(a) = \sup_r \Big|\mathbf{P}(|n^{-1/2}S_n - a| < r) - \mathbf{P}(|Z-a| < r) - Q_{1,n}(a,r)\Big|, \tag{12}$$

где $Q_{1,n}(a,r)$ – первый член асимптотического разложения, причем $Q_{1,n}(0,r) \equiv 0$.

В 1986 г. мы с В.И. Чеботаревым [13] получили более точную оценку в случае $a = 0$:

$$\Delta_n(0) \le c(l,\delta)(\Gamma_{4,\,l}/n)^{l/(l+4+\delta)} + c(l)\begin{cases}(\Gamma_{3,\,l}/\sqrt{n})^{2l/13}, & 7 \le l \le 12,\\ \Gamma_{3,\,l}^2/n, & l \ge 13\end{cases} \tag{13}$$

для любых $\delta > 0$ и целых $l \ge 7$, где $\Gamma_{4,\,l} = \beta_4\sigma^4\Lambda_l^{-4/l}$, $\beta_4 = \mathbf{E}|X_1|^4$, $\Gamma_{3,\,l} = \beta\sigma^3\Lambda_l^{-3/l}$. Этот результат гораздо ближе к оценке Эссеена (10), чем у Залесского.

В свете того, что уже было сказано, можно предположить, что в существенно бесконечномерном случае, т.е. когда все σ_j не обращаются в нуль, $\Delta_n(0) = O(1/n)$. Однако в ходе дальнейших исследований выяснилось, что этот феномен имеет место и для конечных размерностей d, по крайней мере, для $d \ge 9$. Этот результат был получен в работе В.Ю. Бенткуса и Ф. Геце [28]. Их оценка имеет вид

$$\Delta_n(0) \le \frac{C(T)}{n}\frac{\beta_4}{\sigma^4}, \tag{14}$$

причем

$C(T) = e^{c\sigma^2/\sigma_{13}^2}$, если $13 \le d \le \infty$ и $\sigma_{13} \neq 0$;

$C(T) = \frac{\sigma^4}{\sigma_d^4}\, e^{c\sigma^2/\sigma_9^2}$, если $9 \le d \le \infty$ и $\sigma_d \neq 0$;

$C(T) = e^{c\sigma^2/\sigma_9^2}$, если распределение элемента X_1 симметрично и $9 \le d \le \infty$.

Сравнивая оценку (14) с предшествующим результатом (13), мы видим, что зависимость от ковариационного оператора в (13) выглядит не очень естественно. Более точная оценка была найдена вскоре в нашей совместной работе с В.И. Чеботаревым [19], а именно,

$$\Delta_n(0) < \frac{c}{n}\left[\Gamma_{4,13} + \Gamma_{3,13} + L_9^2\Big(\sigma^2/\Lambda_9^{1/9}\Big)^2\right],$$

где $L_l \equiv \max\limits_{1\le j\le l} \frac{\mathbf{E}|(X,e_j)|^3}{\sigma_j^3}$. Заметим, что $\Gamma_{\mu,l}/n^{(\mu-2)/2}$ является обобщением дроби Ляпунова $\beta_\mu/n^{(\mu-2)}\sigma^\mu$. Аналогичную оценку мы получили для $\Delta_n(a)$, определяемого равенством (12) (см. [20]).

6.3. Асимптотические разложения. Можно выделить две проблемы, с которыми сталкивается каждый, кто имеет дело с асимптотическими разложениями: во-первых, нужно построить и описать алгоритм, согласно которому вычисляются коэффициенты асимптотического разложения; во-вторых, нужно оценить погрешность, возникающую при использовании асимптотического разложения. Опишем теперь алгоритм, который используется в нашей работе [18]. Он основывается на формуле

$$\mathbf{E}\exp\{(2s)^{1/2}(x,\alpha)\} = \exp\{s|x|^2\}, \quad x \in H_{\mathbb{C}}, \quad s \in \mathbb{C}. \tag{15}$$

Здесь $H_{\mathbb{C}}$ – комплексное расширение пространства H, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ – последовательность независимых вещественных стандартных нормальных величин. Билинейная форма (x,α) определяется как $\sum_{j=1}^\infty x_j\alpha_j$, где x_j – координаты вектора x в в некотором ортонормированном базисе.

Пусть, как и прежде, $S_n = \sum\limits_{j=1}^n X_j$, где $X_1, X_2, \dots, X_n$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в H, причем $\mathbf{E}X_1 = 0$. Пусть $\{X_j\}_{j=1}^n$ и α независимы. Вследствие (15)

$$\mathbf{E}\exp\{it|S_n|^2\} = \mathbf{E}_{S_n}\mathbf{E}_\alpha \exp\{(2it)^{1/2}(S_n,\alpha)\}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что случайные величины X_j ограничены. Это позволяет поменять местами $\mathbf{E}_{S_n}$ и $\mathbf{E}_\alpha$ в правой части последнего равенства:

$$\mathbf{E}\exp\{it|S_n|^2\} = \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_{S_n} \exp\{(2it)^{1/2}(S_n,\alpha)\}.$$

Имеем α

$$(S_n,\alpha) = \sum_{j=1}^n (X_j,\alpha),$$

где при фиксированной последовательности α линейные формы (X_j,α) являются одномерными независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Поэтому, применяя классическое разложение Эджворта в $\mathbb{R}$, мы можем написать формальное разложение

$$\mathbf{E}_{S_n} e^{s(S_n,\alpha)} = e^{s^2\sigma^2/2} \sum_{j=0}^{\infty} n^{-j/2} p_j(s;(X_1,\alpha)),$$

где $p_j(s;(X_1,\alpha))$ – полином относительно s, коэффициенты которого зависят от псевдомоментов случайной величины (X_1,α), $\sigma^2 = \sum_1^\infty \sigma_j^2\alpha_j^2$. Полагая $s = (2it)^{1/2}$ и осредняя затем по α, мы приходим к формальному разложению Эджворта

$$\mathbf{E}\exp\{it|S_n|^2\} = g(t) \sum_{j=0}^{\infty} n^{-j/2} \mathbf{E} p_j((2it)^{1/2};(A_t X,\ \alpha)).$$

Здесь $g(t) = \prod_{j=1}^{\infty}(1-2it\sigma_j^2)^{-1/2}$, а оператор A_t определяется равенством

$$A_t x = \sum_1^\infty (1-2it)^{-1/2}(x,e_j)e_j,$$

где $\{e_j\}$ – ортонормированный базис в H, образованный собственными векторами ковариационного оператора случайной величины X_1. Преимуществом описанного подхода является то, что он устанавливает прямую связь с классическим разложением Эджворта. В цитированных работах других авторов, посвященных асимптотическим разложениям, используется подход, отличный от нашего: он восходит к работам Геце [6] и Бенткуса [11]. Что касается оценки остаточного члена, то предшествующие исследования были, в основном, направлены на получение оценки остатка при минимальных предположениях относительно моментов исходного распределения. Однако в бесконечномерном случае очень важна форма зависимости остатка от ковариационного оператора слагаемых случайных величин.

Наша цель заключалась в том, чтобы найти явный вид этой зависимости, сведя при этом к минимуму число собственных значений ковариационного оператора, участвующих в оценке. Как и в одномерном случае, для получения приемлемой оценки остатка, кроме моментных ограничений, приходится накладывать дополнительные ограничения на характеристический функционал. Использованное нами условие является обобщением известного условия Крамера. Оно близко к условию (1.1) в [11].

6.4. Большие уклонения для гауссовских случайных величин в банаховом пространстве. Мы начнем с описания работ [21]– [23], о которых уже шла речь во введении.

В работе Ландау и Шеппа [21] было установлено, что

$$\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq 1 - \Phi(at/b) \tag{16}$$

для любых a и b, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{P}(|X| < b) = \Phi(a) > \frac{1}{2},$$

где Φ – стандартный гауссовский закон. Доказательство неравенства (16) основано на изопериметрическом неравенстве на сфере в $\mathbb{R}^n$, из которого следует экстремальное свойство полупространства по отношению к гауссовской мере в классе выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$.

В работе Ферника [22] мы находим оценку

$$\mathbf{P}(|X| > t) < \mathbf{P}(|X| \le t_0) \exp\{-t^2\gamma/(24t_0)\}, \tag{17}$$

где $\gamma = \mathbf{P}(|X| \le t_0)\mathbf{P}(|X| > t_0)$, t_0 – произвольное положительное число. Изящный прием, посредством которого Ферник выводит (17), опирается на свойство инвариантности стандартного гауссовского распределения в $\mathbb{R}^2$ относительно поворота.

Наконец, третий подход был предложен Скороходом [23], который получил, правда, более слабую в смысле зависимости от t оценку, нежели (16) и (17), а именно

$$\mathbf{P}(|X| > t) < \exp\{-\eta t\}, \tag{18}$$

где $\eta > 0$ – некоторая постоянная.

Исходной точкой в работе Скорохода служит неравенство

$$\mathbf{P}(|X| > r) < \mathbf{P}(\sup_{0\le t\le 1} |X(t)| > r), \tag{19}$$

где $X(t)$ – винеровский процесс со значениями в банаховом пространстве, удовлетворяющий условию $X(1) = X$. С другой стороны, обозначая для краткости $\bar{X} = \sup_{0\le t\le 1} |X(t)|$, имеем

$$\mathbf{P}(\bar{X} > nr) < \mathbf{P}^n(\bar{X} > r). \tag{20}$$

Из двух последних оценок следует неравенство (18).

По своей сложности статья Ландау и Шеппа намного превосходит работы Ферника и Скорохода, но зато в ней получен более точный результат.

Несколько позже, в 1974г., Судаков и Цирельсон [29], используя метод блтзкий к подходу Ландау и Шеппа, показали, что

$$\mathbf{P}(|X| < t) = \Phi((t - d + o(1))/c), \quad t \to \infty,$$

где $c > 0$ и $d \ge 0$ – некоторые постоянные.

В моей статье [31] отправной точкой, как и у Скорохода, является неравенство (19), однако в дальнейшем я использую более точную, нежели (20), оценку для вероятности $\mathbf{P}(\bar{X} > r)$. Ниже приводится вывод этой оценки.

Пусть $\tau_n = \inf\{t : |X(t)| = n\lambda_0\}, n \ge 1$. Другими словами, τ_n есть момент, когда процесс $X(t)$ впервые достигает сферы $|x| = n\lambda_0$. Положим $\tau_0 = 0$. Пусть далее

$$\tau_n' = \inf\{t - \tau_{n-1} : t > \tau_{n-1},\ |X(t) - X(\tau_{n-1}| = \lambda_0\}.$$

Так как $X(t)$ обладает строго марковским свойством, случайные величины τ_n' взаимно независимы и совпадают по распределению с τ_1.

Очевидно,

$$|X(\tau_n) - X(\tau_{n-1})| \ge |X(\tau_n') - X(\tau_{n-1}| = \lambda_0.$$

Следовательно, $\tau_n' \le \tau_n - \tau_{n-1}$. Отсюда

$$\tau_n = \sum_1^n (\tau_k - \tau_{k-1}) \ge \sum_1^n \tau_k'. \tag{21}$$

Положим $X_\alpha(t) = X(\alpha t)/\sqrt{\alpha}$, $\alpha > 0$. Нетрудно видеть, что процессы $X(t)$ и $X_\alpha(t)$ порождают одну и ту же меру в пространстве непрерывных функций, определенных на $[0,1]$ и принимающих значения в B. Далее,

$$\mathbf{P}(\tau_n < t) = \mathbf{P}(\sup_{0\le s\le t} |X(s)| \ge n\lambda_0) = \mathbf{P}(\sup_{0\le s\le t} |X_{1/n^2}(s)| \ge n\lambda_0) =$$

$$= \mathbf{P}(\sup_{0\le s\le t} |X(s/n^2)| \ge \lambda_0) = \mathbf{P}(\sup_{0\le s\le t/n^2} |X(s)| \ge n\lambda_0) = \mathbf{P}(\tau_1 < t/n^2).$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(\tau_n < t) = \mathbf{P}(\tau_1 < t/n^2). \tag{22}$$

Вследствие (21) и (22)

$$\mathbf{P}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_1^n \tau_k' > t\Big) < \mathbf{P}(\tau_1 > t). \tag{23}$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_1^n \tau_k' < t\Big) = G(t), \tag{24}$$

где $G(t)$ – устойчивый закон с параметром $\alpha = 1/2$, логарифм характеристической функции которого допускает представление

$$\ln f(t) = -c|t|^\alpha\Big(1 + i\frac{t}{|t|}\Big).$$

Как известно (см., например, [33, с. 185] или [34, с. 79]), при $c = 1$

$$G'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, t^{3/2}} e^{-1/(2t)} = -2\frac{\partial}{\partial t}\Phi(1/\sqrt{t}).$$

Отсюда для произвольного $c > 0$

$$G'(t) = \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}\, t^{3/2}} e^{-x_0^2/2t} = -2\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x_0/\sqrt{t}), \tag{25}$$

где $x_0 = c$. Из (22) – (25) следует, что

$$\mathbf{P}(\tau_n < 1) < G\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = 2\big(1 - \Phi(nx_0)\big).$$

Вспоминая определение τ_n, мы можем утверждать, что

$$\mathbf{P}(|X| > n\lambda_0) < \mathbf{P}(\sup_{0\le t\le 1} |X(t)| > n\lambda_0) < 2\big(1 - \Phi(nx_0)\big), \tag{26}$$

где x_0 определяется равенством

$$2\big(1 - \Phi(x_0)\big) = \mathbf{P}(\tau_1 < 1).$$

Неравенство (26) справедливо для дискретного ряда точек $u_n = n\lambda_0$. Очевидно, для $u_n < u < u_{n+1}$

$$\mathbf{P}(|X| > u) < 2(1 - \Phi(nx_0)) < 2\Big(1 - \Phi\Big(\Big(\frac{u}{\lambda_0} - 1\Big)x_0\Big)\Big)$$

или

$$\mathbf{P}(|X| > u) < 2\Big(1 - \Phi\Big(\frac{x_0}{\lambda_0}u - x_0\Big)\Big).$$

6.5. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин в банаховых пространствах. В моих статьях [35] и [36] выводятся оценки сверху для вероятностей больших уклонений суммы $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ независимых с.в. со значениями в сепарабельном банаховом пространстве. Я сформулирую здесь ключевой результат статьи [36].

Итак, пусть $S_k = \sum_1^k X_i$, $M_n = \max\limits_{1\le k\le n} |S_k|$ и α – такое число, что $\mathbf{P}(2M_n \ge \alpha) < 1$. Тогда для любых $y \ge \alpha$, $1 > \delta_1 \ge \delta$

$$\mathbf{P}(M_n \ge y) \le \sum_1^{k_\alpha - 1} kP\Big(\frac{(k_\alpha - k)\alpha}{k}\Big)\delta^{k-1} + \delta^{k_\alpha} \le$$

$$\le \delta_1^{-2} \int_0^{y/\alpha - 1} u\delta_1^u P\Big(\frac{y - (u+1)\alpha}{u}\Big)du + \delta_1^{y/\alpha - 2} y/\alpha, \qquad (27)$$

где $k_\alpha = [y/\alpha]$, $P(y) = \min\Big\{\delta, \sum_1^n(\mathbf{P}(|X_i| \ge y)\Big\}$, $\sum_1^0 = 0$.

Хочу обратить внимание на то, что оценка (27) является новой и в одномерном случае. Ее отличает отсутствие каких-либо моментных характеристик. Если

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(|X_i| > \alpha) = 0, \qquad (28)$$

то в силу (27) последовательность функций распределения $\mathbf{P}(M_n/\alpha < y)$ компактна. Используя это обстоятельство, нетрудно показать, что при условии (28) последовательность $\mathbf{P}(M_n/\alpha < y)$ имеет предел, который является собственной функцией распределения.

Прототипом неравенства (27) послужила оценка

$$\mathbf{P}(M_n > lB_n + (l-1)c) \le [\mathbf{P}(M_n > B/2)]^l,$$

где $B_n^2 = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}|X_j|^2$, для ограниченных с.в. X_i, $|X_i| < c$, со значениями в банаховых пространстве. Ее можно найти в монографии И.И. Гихмана и А.В. Скорохода [38] (см. гл. 6, § 3, лемма 2).

Надо сказать, что случай неограниченных слагаемых с точки зрения вывода вероятностных неравенств является несравненно более трудным. Работы [35] и [36] отличаются как раз способами преодоления возникающих здесь трудностей.

В статье [36] выводится много следствий из неравенства (27), в частности, неравенство типа Розенталя для M_n, а именно, *для любого* $t \geq 1$

$$\mathbf{E}M_n^t \leq c_1(t,\delta)(A_t + t\alpha^t),$$

где $c_1(t,\delta) = 2^{t-1}\gamma(t+2)\delta^{-3}(-\ln\delta)^{-t-2}$.

Альтернативный подход к выводу вероятностных неравенств в банаховом пространстве берет начало от работы В.В. Юринского [39]. Он основан на разложении

$$|S_n| - \mathbf{E}|S_n| = \sum_1^n Y_k, \tag{29}$$

где

$$Y_k = \mathbf{E}\Big\{|S_n| \,\Big|\, \mathcal{F}_k\Big\} - \mathbf{E}\Big\{|S_n| \,\Big|\, \mathcal{F}_{k-1}\Big\},\ 1 \leq k \leq n,$$
$$\mathbf{E}\Big\{|S_n| \,\Big|\, \mathcal{F}_0\Big\} = \mathbf{E}|S_n|,$$

причем для любого $t > 0$

$$\mathbf{E}\Big\{|Y_k|^t \,\Big|\, \mathcal{F}_{k-1}\Big\} \leq 2^t\mathbf{E}|X_k|^t. \tag{30}$$

Здесь $\mathcal{F}_k$ – σ-алгебра, порожденная случайными величинами $X_1, X_2, ..., X_k$.

Заметим, что величины Y_k образуют мартингал-разность. Поэтому разложение (29) в сочетании с оценкой (30) позволяет использовать вероятностные неравенства для мартингалов (относительно последних см., например, [40] и [41]). На это обстоятельство впервые было обращено внимание в [42] и, почти одновременно, в [43]. Позднее такие же соображения были использованы в [44]. При описанном только что подходе более естественно и удобно выводить неравенства для $\mathbf{P}\big(\big|S_n - \mathbf{E}|S_n|\big| > y\big)$ и $\mathbf{E}\big|S_n - \mathbf{E}|S_n|\big|^t$, чем для $\mathbf{P}(|S_n| > y)$ и $\mathbf{E}|S_n|^t$. Это и делается в уже упомянутых работах [42] и [44].

Оценкам снизу для вероятностей $\mathbf{P}(|S_n| > u)$ посвящена моя работа [37]. В ней получено неравенство: *для любого* $\alpha > 0$

$$\mathbf{P}(|S_n| > u) \geq \sum_{k=1}^n \Big[\inf_f \mathbf{P}\Big(f(S^k) \geq (1-\alpha)u\Big) - \sum_1^n \mathbf{P}(|X_j| \geq \alpha u)\Big]\mathbf{P}(|X_k| \geq \alpha u), \tag{31}$$

где $S^k = S_n - X_k$, *а нижняя грань берется по всем функционалам* f, *принадлежащим пространству* B^* *с* $|f| = 1$.

Чтобы оценить $\mathbf{P}\big(f(S^k) \geq (1-\alpha)u\big)$ снизу, можно использовать различные вероятностные неравенства для одномерных случайных величин.

Пусть, например, $\mathbf{E}X_j = 0,\ j = \overline{1,n}$. Тогда, оценивая $\mathbf{P}(f(S^k) < 1-\alpha)$ для $\alpha > 1$ с помощью неравенства Кантелли, мы получаем, что

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq u) \geq \left(1 - B^2u^{-2}\Big(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{B^2u^{-2} + (\alpha-1)^2}\Big)\right)\sum_1^n \mathbf{P}(|X_j| \geq \alpha u).$$

Если случайные величины симметрично распределены, то полагая в (31) $\alpha = 1$, имеем

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq u) \geq \left(\frac{1}{2} - \sum_1^n \mathbf{P}(|X_k| > u)\right)\sum_1^n \mathbf{P}(|X_k| > u).$$

Это неравенство, очевидно, не тривиально при $\sum_1^n \mathbf{P}(|X_k| > u) < 1/2$.

6.6. Вероятностные неравенства для сумм зависимых случайных величин в банаховых пространствах. Следующим шагом было перенесение результатов моей работы [36] на случай слабозависимых слагаемых X_j. Это было сделано в моей статье [45]. Пусть

$$\phi(m) = \sup\left\{\left|\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} - \mathbf{P}(B)\right| :\ 1 \le k \le n-m,\ A \in \mathcal{F}_1^k,\ B \in \mathcal{F}_{k+m}^n,\ \mathbf{P}(AB) \ne 0\right\}$$

– коэффициент равномерного перемешивания. Здесь $\mathcal{F}_j^k$ означает σ-алгебру, порожденную случайными величинами $X_l,\ l = \overline{j,k}$. Пусть $\phi(1) < 1$ и $\delta > 0$ удовлетворяет условию $\delta + \phi(1) < 1$. Положим $\rho = \delta + \phi(1)$. Пусть α – любое число такое, что $\mathbf{P}\{2M_n > \alpha\} < \delta$. Определим $Q(r) = \sum_1^n \mathbf{P}\{|X_j| > r\},\ A_t = \sum_1^n \mathbf{E}|X_j|^t$.

Сформулируем теперь верхнюю оценку для $\mathbf{P}\{M_n > r\}$, полученную в работе [45]: *Для любых $r > \alpha$ и $0 < \varepsilon < 1/6$*

$$\mathbf{P}(M_n > r) < \frac{2}{\alpha\rho}\int_0^r Q\Big(\frac{r\alpha\varepsilon^2}{2u}\Big)\frac{du}{(1+\varepsilon u/\alpha)^{s(\varepsilon)+1}} + \rho^{-1}\Big(1 + \frac{\varepsilon r}{\alpha}\Big)^{-s(\varepsilon)}, \tag{32}$$

где $s(\varepsilon) = -\ln\rho/\ln(1+\varepsilon)$.

Заметим, что интеграл в правой части (32) представляет собой свертку двух функций, заданных на мультипликативной группе положительных действительных чисел.

Если $\phi(1) = 1$, но $\phi(2) < 1$, то можно рассмотреть две подпоследовательности $X_1, X_3, ..., X_{2k+1}, ..$ и $X_2, X_4, ..., X_{2k}, ...$. Для каждой из них $\phi(1) < 1$. Если M_n' и M_n'' определены для первой и второй подпоследовательности, то

$$\mathbf{P}(M_n > r) < \mathbf{P}\Big(M_n' > \frac{r}{2}\Big) + \mathbf{P}\Big(M_n'' > \frac{r}{2}\Big).$$

Очевидно, этот подход можно применить и в случае $\phi(k) = 1,\ 1 \le k < m,\ \phi(m) < 1$. Из (32) легко извлекается моментное неравенство: *для любых $t > 0$ и $0 < \varepsilon < 1/6$ таких, что $s(\varepsilon) > t$,*

$$\mathbf{E}M_n < c_1(t) + c_2(t)\alpha^t, \tag{33}$$

где

$$c_1(t) \ge \frac{2^{t+1}}{\varepsilon^{3t+1}\rho}B\Big(t+1,\, s(\varepsilon)-t+1\Big), \qquad c_2(t) \ge \rho^{-1}\varepsilon^{-t}tB\Big(t,\, s(\varepsilon)-t\Big),$$

$B(\cdot,\cdot)$ – функция Эйлера.

Неравенство (32) принципиально отличается от предшествующих вероятностных неравенств для сумм зависимых случайных величин как по форме, так и по методу доказательства. Прежде всего, в нем участвует только один из счетного числа коэффициентов перемешивания. Благодаря введению квантили α, оно не содержит никаких моментов. Постоянные, входящие в правую часть неравенства, явно вычислены. Вышесказанное вполне относится и к моментному неравенству (33). Неравенство (33) универсально в том смысле, что оно позволяет охватить случай $0 < t < 2$, а также $\mathbf{E}X_j \ne 0$.

Отдельно в [45] изучается специальный случай гильбертова пространства. Если $B = H$, где H сепарабельное гильбертово пространство и $\mathbf{E}X_j = 0$, то для $t > 2$ имеет место неравенство

$$\mathbf{E}M_n^t < c_1(t,\phi)A_t + c_2(t,\phi)\mathbf{E}|Y|^t\beta_t^{-1}, \tag{34}$$

где Y – гауссовская случайная величина в H с нулевым средним и тем же ковариационным оператором, что и S_n, β_t – абсолютный момент порядка t одномерного стандартного гауссовского закона.

Далее в [45] доказывается, что

$$\mathbf{E}|Y|^t < (\mathbf{E}|Y|^2)^{t/2}\beta_t. \tag{35}$$

Последнее неравенство может рассматриваться как изопериметрическое. Оно показывает, что максимум абсолютного момента порядка $t > 2$ нормы гауссовского вектора при фиксированном втором моменте достигается на одномерном распределении.

Используя оценку (35), мы можем переписать неравенство (34) в виде

$$\mathbf{E}M_n^t < c_1(t,\phi)A_t + c_2(t,\phi)(\mathbf{E}|Y|^2)^{t/2},\ t > 2.$$

Стандартный подход к выводу вероятностных неравенств основан на применении неравенства типа Розенталя. Для вывода последних используется прямой подход, основанный на представлении четного момента суммы или нормы суммы случайных величин в виде суммы смешанных моментов. При этом вместо A_t, как правило, фигурирует $\sum\limits_1^n(\mathbf{E}|X_j|^{t+\varepsilon})^{t/(t+\varepsilon)}$. Исключением является работа С.А. Утева [46]. В ней упомянутый выше прямой подход применяется в случае гильбертова пространства, однако A_t не заменяется на $\sum\limits_1^n(\mathbf{E}|X_j|^{t+\varepsilon})^{t/(t+\varepsilon)}$. Комбинаторные рассуждения Утева чрезвычайно сложны и запутаны в отличие от доказательства неравенства (34) в [45].

Неравенства, полученные в [45], позволяют, в частности, усовершенствовать многие результаты, касающиеся оценки скорости сходимости в законах больших чисел для последовательностей случайных величин с равномерным перемешиванием.

Обзор вероятностных и моментных неравенств для случайных процессов и полей с перемешиванием и их приложений содержится, например, в [47]. Упомянем в этой связи также статью Рио [48], в которой неравенства Беннета–Хефдинга и Нагаева–Фука переносятся на сумму случайных величин, удовлетворяющих условию сильного перемешивания.

Список литературы

[1] *Канделаки Н.П.* Об одной предельной теореме в пространстве Гильберта// Тр. ВЦ АН ГССР, 1965, **5**,N1, 46–55.

[2] *Паулаускас В.И.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме в некоторых банаховых прстранствах// Теория вероятн. и ее примен., 1976, **21**, N4, 775–790.

[3] *Нагаев С.В., Чеботарев В.И.* Об оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме для случайных векторов со значениями в пространстве l_2// В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск, "Наука", 1978, 153–182. **PDF**

[4] *Нагаев С. В., Чеботарев В. И.* Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме в l_2 для случая независимых координат// Тезисы докл. II Международной Вильнюсской конф. по теории вероятностей и мат. статистике. Вильнюс, 1977, **2**, 68–69.

[5] *Сенатов В.В.* Четыре примера нижних оценок// Теория вероятн. и ее примен., 1985, **30**, N4, 750–755.

[6] *Götze F.* Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals// Z. Wahrscheinlichkeitstheor., verw. Geb., 1979, B. 50, H. 3, 333–355.

[7] *Юринский В.В.* О точности нормального приближения вероятности попадания в шар// Теория вероятн. и ее примен., 1982, **24**, N2, 270–278.

[8] Нагаев С.В. О скорости сходимости к нормальному закону в гильбертовом пространстве// Теория вероятн. и ее примен., 1985, **30**, N1, 19–32. **PDF**

[9] *Залесский Б.А.* Оценка точности нормальной аппроксимации в гильбертовом пространстве// Теория вероятн. и ее примен., 1982, **27**, N2, 279–285.

[10] *Бенткус В.Ю.* Асимптотические разложения в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве// Литов. мат. сб., 1984, **24**, N3, 29–49.

[11] *Бенткус В.Ю.* Асимптотические разложения для сумм независимых случайных элементов пространства Гильберта// Литов. мат. сб., 1984, **24**, N4, 29–48.

[12] *Бенткус В.Ю., Залесский Б.А.* Асимптотические разложения с неравномерными остатками в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве// Литов. мат. сб., 1985, **25**, N3, 3–16.

[13] *Нагаев С.В., Чеботарев В.И.* Уточнение оценки погрешности нормальной аппроксимации в гильбертовом пространстве// Сиб. мат. ж., 1986, **27**, N3, 154–173. **PDF**

[14] *Залесский Б.А., Сазонов В.В., Ульянов В.В.* Правильная оценка точности нормального приближения в гильбертовом пространстве// Теория вероятн. и ее примен., 1988, **33**, N4, 753–754.

[15] *Залесский Б.А., Сазонов В.В., Ульянов В.В.* Нормальная аппроксимация в гильбертовом пространстве. I–II// Теория вероятн. и ее примен., 1988, **33**, N2, 225 - 245; N3, 508–521.

[16] *Нагаев С.В., Чеботарев В.И.* Об асимптотическом разложении типа Бергстрема в гильбертовом пространстве// Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.– (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; **13**), 66–77. **PDF**

[17] *Сазонов В.В., Ульянов В.В., Залесский Б.А.* Правильная оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве// Мат. сб., 1989, **180**, 1587–1613.

[18] *Нагаев С.В., Чеботарев В.И.* О разложении Эджворта в гильбертовом пространстве// Предельные теоремы для случайных процессов и их применения.– Новосибирск: Издательство Института математики СО РАН, 1993. – (Тр./РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; **20**), 170–203. **PDF**

[19] *Nagaev S.V., Chebotarev V.I.* On the Accuracy of Gaussian Approximation in Hilbert Space// Acta Applicandae Mathematicae, 1999, **58**, 189–215. **PDF**

[20] *Нагаев С.В., Чеботарев В.И.* О точности гауссовской аппроксимации в гильбертовом пространстве// Математические труды, ИМ СО РАН, 2004, **7**, N1, 91–152. **PDF**

[21] *Landau H.J., Shepp L.A.* On the supremum of a Gaussian process// Sankhya, Ser. A., 1970, **32**, No 4, 369–378.

[22] *Fernique X.* Intégrabilité des vecteurs Gaussiens // C.R. Acad. Sci. Paris, Sér.A, 1970. – **270**, No 25, 1698–1699.

[23] *Скороход А.В.* Замечание о гауссовских мерах в банаховом пространстве// Теория вероятн. и ее примен., 1970, **15**, N3, 519–520.

[24] *Нагаев С.В.* Об оценках типа Берри–Эссеена для сумм случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве// ДАН СССР, 1984, **276**, N6, 1315–1317. **PDF**

[25] *Nagaev S.V.* On estimaites of the rate of convergence in the CLT in a Hilbert space// Workshop on Limit Theorems and Nonparametric Statistics, August, 24 – 28. Abstracts of commun. Universität Bielefeld, 1992, 1–3. **PDF**

[26] *Esseen C.–G.* Fourier analysis of distribution function. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law// Acta Math., 1945, **77**, 1–125.

[27] *Бенткус В.Ю.* Асимптотические разложения сумм независимых случайных элементов пространства Гильберта// XXIV конференция Литов. мат. общества, Тез. докл., Вильнюс, 1983, 28–29.

[28] *Bentkus V., Götze F.* Uniform rates of convergence in the CLT for quadratic forms in multidimensional spaces// Probab.Theory Relat. Fields, 1997, **109**, N3, 367–416. **PDF**

[29] *Судаков В.Н., Цирельсон Б.С.* Экстремальные свойства полупространств для сферически инвариантных мер// Записки научн. семинаров ЛОМИ, 1974, **41**, 14–24.

[30] *Hoffman-Jorgensen J.* Probability in *B*-spaces// Aarhus Universitet Lecture Notes Series, 1977, No 48, 186 p.

[31] *Нагаев С.В.* О вероятностях больших уклонений для гауссовского распределения в банаховом пространстве// Изв. АН УзССР, серия физ.-мат., 1981, N5, 18–21. **PDF**

[32] *Нагаев С.В.* О вероятностях больших уклонений для гауссовского распределения в банаховом пространстве// Теория вероятн. и ее примен., 1982, **27**, N2, 406. **PDF**

[33] *Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин// Москва, Ленинград: Государств. изд-во технико-теоретич. литературы, 1949, 264 с.

[34] *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения// Москва: Наука, 1983, 304 с.

[35] *Нагаев С.В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве// В кн.: Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы. – Новосибирск: Наука, 1982, 159–167. **PDF**

[36] *Нагаев С.В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве// Сиб. мат. ж., 1987, **28**, N4, 171–184. **PDF**

[37] *Нагаев С.В.* О вероятностях больших уклонений в банаховых пространствах// Мат. Заметки, 1983, **34**, N2, 309–313. **PDF**

[38] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов// Москва: Наука, 1971, **I**, 664 с.

[39] *Юринский В.В.* Показательные оценки для больших уклонений// Теория вероятн. и ее примен., 1974, **19**, N1, 152–153.

[40] *Фук Д.Х.* Некоторые вероятностные неравенства для мартингалов// Сиб. мат ж., 1973, **14**, N1, 185–193.

[41] *Burkholder D.L.* Distribution function inequalities for martingales// Ann. Prob., 1973, **1**, No 1, 19–42.

[42] *Нагаев С.В., Пинелис И.Ф.* О больших уклонениях для сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве// Тезисы докл. II Международной Вильнюсской конф. по теории вероятностей и мат. статистике. Вильнюс, 1977, **2**, 66–67. **PDF**

[43] *Володин Н.А., Морозова Л.Н.* Некоторые оценки вероятностей больших уклонений// Вероятностные процессы и математическая статистика. Ташкент: Фан, 1978, 35–43.

[44] *D'Acosta A.* Inequalities for B-valued random vectors with applications to the strong law of large numbers// Ann. Prob., 1981, **9**, No 1, 157–161.

[45] *Нагаев С.В.* О вероятностных и моментных неравенствах для зависимых случайных величин// Теория вероятн. и ее примен., 2000, **45**, N1, 194–202. **PDF**

[46] *Утев С.А.* Неравенства для сумм слабозависимых случайных величин и оценки скорости сходимости в принципе инвариантности// Труды ин-та математики СО АН СССР, 1984, **3**, 50–77.

[47] *Doukhan P.* Mixing. Properties and Examples// New York: Springer–Verlag, 1994, 142 p.

[48] *Rio E.* The functional law of the iterated logarithm for mixing sequences// Ann. Probab., 1995, **23**, No 3, 1188–1203.

2008