Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 2, С. 67–70

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

УДК **517.11+517.98**

НЕСТАНДАРТНОМУ АНАЛИЗУ 50 ЛЕТ

С. С. Кутателадзе

Краткое приглашение к нестандартному анализу в связи с его пятидесятилетием и выходом в свет книги Е. И. Гордона, А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе «Инфинитезимальный анализ: избранные темы».

Ключевые слова: нестандартный анализ, инфинитезималь, монада, гипераппроксимация.

1. Введение

Термин «нестандартный анализ» возник 50 лет назад. Так была озаглавлена статья Абрахама Робинсона (1918–1974), в которой он доказал, что представления об актуальных бесконечно больших и бесконечно малых величинах никак не противоречат современным математическим воззрениям. В самом конце 2011 г. в издательстве «Наука» вышла книга «Инфинитезимальный анализ: избранные темы», написанная Е. И. Гордоном, А. Г. Кусраевым и С. С. Кутателадзе, отразившая ряд последних исследований этой новой математической технологии.

Книга состоит из четырех глав. В главе 1 дан экскурс в историю математического анализа. Отражены подлинные воззрения Г. В. Лейбница и И. Ньютона, Л. Эйлера, Дж. Беркли, Ж. Д'Аламбера и Л. Карно, Б. Больцано, О. Коши и К. Вейерштрасса, Н. Н. Лузина и А. Робинсона. В главе 2 дается ориентированное на массового читателя изложение наивных основ инфинитезимальных методов. В главе 3 на современном уровне строгости даны основные теоретико-множественные формализмы нестандартного анализа — теория внутренних множеств Нельсона, теории внешних множеств, нестандартная теория классов и теория относительно стандартных множеств. Эти главы составляют полное и независимое введение в методы нестандартного анализа как на наивном, так и на строгом логическом уровнях.

Остальная часть книги посвящена приложениям инфинитезимальных методов к ряду современных проблем других математических дисциплин. Глава 4 посвящена монадам в общей топологии. Глава 5 знакомит с использованием инфинитезимальных методов в субдифференциальном исчислении и математическом программировании. Главы 6 и 7 посвящены новейшей техники гипераппроксимации, т. е. изучения бесконечномерных пространства и уравнений в них с помощью погружения в конечномерные пространства бесконечно большой размерности. Особое внимание уделено технике гипераппроксимациии в гармоническом анализе.

Завершает книгу глава 8, в которой собраны упражнения и задачи для самостоятельной работы читателя, а также сформулированы некоторые нерешенные проблемы и темы для дальнейших исследований.

2. Реабилитация и демистификация инфинитезимальных методов

Нестандартный анализ наших дней часто воспринимается как новая дисциплина, претендующая занять место дифференциального и интегрального исчисление. В этой связи часто звучат суждения о том, что нестандартный анализ ничего нового в науку не внес по сравнению с классическим анализом. Под классическим анализом понимают при этом господствующую в преподавании его эпсилон-дельта версию. Именно с ней связывают революционные перемены европейского мировоззрения XVII–XVIII вв., связанные с открытиями Ньютон и Лейбница. Подобные воззрения основаны на недоразумении. Нестандартный анализ — прямой наследник инфинитезимального анализа, он реабилитировал и демистифицировал актуальную бесконечность в математике и естествознании, вернул многие интеллектуальные достижения прошлого в науку наших дней.

Век Просвещения — эпоха микроскопа и телескопа, обитель бесконечно больших и бесконечно малых величино, поиск следов божественного промысла в лучшем из миров. Математика Просвещения — инфинитезимальный анализ, основанный на свободном синтезе актуальных и потенциально бесконечных величин и процессов. Упрощенный взгляд на математику, основанный на эпсилон-дельтизме, запретил использовать актуальную бесконечность. Тем самым математика была обеднена, оторвана от своей истории и противопоставлена практике естествознания.

Методы Эйлера объявлены нестрогими или даже неверными. Временные трудности в обосновании были абсолютизированы и достижения Эйлера стали трактовать как гениальные, но недоказанные озарения. Математик — тот, кто отличает доказанное от недоказанного. Табу на инфинитезимали вывело Эйлера из числа математиков. Фактически Эйлер как математик был реабилитирован только в рамках нестандартного анализа. Включение наследия Эйлера в современную парадигму математики — выдающийся вклад нестандартного анализа наших дней.

3. Возрождение монадологии

Нестандартный анализ породил нестандартную теорию множеств, основанную на использовании нового первичного неопределяемого предиката — свойства объекта изучения быть или не быть стандартным. Фактически математика вернулась к своим античным истокам, в которых она базировалась на двух первичных понятиях — точки и монады. При этом нестандартный анализ обогатил технику математических доказательств принципами идеализации и стандартизации. Технологии нестандартного анализа существенно упрощают доказательства, так как содержать аксиомы, позволяющие менять кванторные приставки. На этом пути возникла современная математическая монадология.

Источником идей Лейбница служили геометрические воззрения античности, которыми он восторгался с детства. Монада Евклида — математический инструмент исчисления, парный атому геометрии — точке. Математика Евклида — произведение человеческого духа per se. Монады Лейбница, вскормленные его мечтой о calculemus, — универсальный инструмент творения, познание которого приобщает человека к божественному промыслу в создании лучшего из миров.

Точка и монада в древности — независимые формы, представления о неделимых началах фигур и чисел. Обе идеи прочно встроены в концепцию универсального атомизма. В основе первичного представления о прямой с самого начала лежит ее двойственная — дискретно-непрерывная — природа. Лейбниц придал древней геометрической идее универсальное значение, увидев в ней божественный промысел.

По Определению I Книги VII «Начал» Евклида монада — «есть [то] через что каждое из существующих считается единым». Определение II гласит: «Число же — множество, составленное из монад». В известных переводах трактата Евклида вместо термина «монада» используется слово «единица».

Современному читателю трудно понять, почему выдающийся скептик III в. Секст Эмпирик при изложении математических воззрений своих предшественников пишет: «Пифагор говорил, что началом сущего является монада, по причастности к которой каждое из сущего называется одним». И далее: «точка устроена по типу монады, ведь, как монада есть нечто неделимое, так и точка, и, как монада есть некое начало в числах, так и точка есть некое начало в линиях». А вот еще суждение того же рода, которое совсем не сложно принять за цитату из «Монадологии» Лейбница: «единое, поскольку оно есть единое, неделимо, и монада, поскольку она есть монада, не делится. Или если она делится на много частей, она становится совокупностью многих монад, а уже не [просто] монадою».

Стоит пояснить, что древние понимали особый статут начала счета. Для того чтобы перечислять, надо обособить перечисляемые сущности и только потом сопоставить их с символическим рядом числительных. Мы приступаем к счету тем, что «многое делаем единым». Особая роль акта начала счета нашла отражение в почти тысячелетнем диспуте о том, считать единицу (или монаду) натуральным числом или нет. Сейчас нам кажется чрезмерной особая щепетильность в выделении специальной роли единицы-монады как акта начала счета. Между тем так было далеко не всегда.

Математическая монадология возникла в работах В. Люксембурга, предложившего новый подход к общей топологии. Центральным в теории Люксембурга является понятие монады стандартного фильтра — внешнего множества, представляющего пересечение всех стандартных элементов фильтра. При этом исходный фильтр восстанавливается как стандартизация внешнего множества надмножеств своей монады. Монадология позволяет индивидуализировать важнейшие топологические понятия. Например, возникает понятие околостандартной точки, т. е. элемента монады некоторой стандартной точки. При этом стандартное множество оказывается компактным в том и только в том случае, если каждая его точка околостандартна. Равномерная сходимость возникает как поточечная сходимость в каждой точке стандартного множества, что раскрывает нам интуитивные представления Коши о строении континуума.

4. Тенденции и перспективы

Обозреть распространение идей нестандартного анализа не представляется возможным, ровно также как невозможен обзор приложений дифференциального и итегрального исчисления или теории вероятностей. Робинсоновский формализм используется в математической экономике, менеджменте, гидродинамике, моделировании, программировании, оптимизации. Формализм теории внутренних множеств Нельсона существенно расширил и обогатил методологию и сферу приложений нестандартного анализа. Новая парадигма связана с переменой точки зрения на классический континуум. В теории Нельсона инфинитезимали живут внутри единичного интервала, а не в его нестандартном расширении. Нельзя не отметить реабилитацию частотного подхода Мизеса, осуществленную Нельсоном в его концепции «радикальной элементарной теории вероятностей». Теории внешних множества Хрбачека и Каваи расширили выразительные и технические возможности нестандартного анализа, объединив достоинства формализмов Робинсона и Нельсона.

Математика обязана постоянно приспосабливать себя к общим парадигмам науки. Нестандартный анализ завершает догматический этап развития идей древнего математического атомизма подобно тому, как воображаемая геометрия Лобачевского завершила догматический этап развития евклидовой геометрии.

XX в. ознаменован освобождением человечества от догматизма и тирании единообразия. Наполненный гремучей смесью триумфов гения и злодейства, присущих популяции home sapiens, XX в. останется в истории не эпохой лютой ненависти и каннибализма, а периодом освобождения человечества от фатализма, категоричности, абсолютизма и доминирования. Нестандартный анализ — продукт и источник свободы.

Человечество никогда не расстается со своими интеллектуальными сокровищами. Поэтому нестандартный анализ в той или иной форме будет «анализом будущего», как предсказывал Гёдель. Но у нас нет оснований считать, что исчисление Ньютона и Лейбница будет играть ключевую роль в формировании мировоззрения будущих поколений. Теперешние физические взгляды имеют мало общего с атомизмом древних. Мы воспринимаем законы микромира в рамках квантовой механики и принципа неопределенности, чуждых аристотелевой логике. Вездесущим стал процесс дискретизации и конструктивизации прикладной математики, порожденной технологиями бинарных физических устройств.

Слабая востребованность современного инфинитезимального анализа связана не только с нехваткой новых учебников и консерватизмом и невежеством преподавателей. Короче говоря, проблема здесь в статусе классического исчисления, а не в современных подходах нестандартной теории множеств.

Нестандартный анализ возрождает на новом этапе диалектические представления древних о строении математических объектов, возвращает нас к извечным проблемам мышления, освобождает от догматизма и зазнайства. В этом его неизбывная гуманистическая ценность.

Статья поступила 11 марта 2012 г.

Кутателадзе Семен Самсонович
Институт математики им. С. Л. Соболева,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, 630090, пр. Ак. Коптюга, 4
E-mail: sskut@math.nsc.ru

50 YEARS OF NONSTANDARD ANALYSIS

Kutateladze S. S.

This is a short invitation to nonstandard analysis on the occassion of the publocation of the book "Infinitesimal Analysis: Selected Topics" by E. I. Gordon, A. G. Kusraev, and S. S. Kutateladze.

Key words: Nonstandard analysis, infinitesimal, monad, hyperapproximation.