

ЭТЮДЫ
ОБ УЧЕНЫХ

СЕРГЕЙ СОБОЛЕВ И ЛОРАН ШВАРЦ



С.Л. Соболев (1908–1989)

Имена С.Л. Соболева и Л. Шварца неразрывно связаны с одним из самых ярких математических достижений XX в. - теорией распределений, или обобщенных функций, предложившей принципиально новый подход к исследованию уравнений в частных производных.

Наиболее законченные и востребованные математические достижения воплощены в формулах и перечнях, списках объектов. Между списками и формулами есть принципиальные отличия. Перечни фиксируют то, что нам открыто. Списки Платоновых тел, элементарных катастроф, простых конечных групп сродни "Альмагесту" и гербариям. Они составляют объекты восхищения, совершенные и застывшие. Предмет математического ремесла - формула. Формула возникает как материализация математического творчества, она живет своей особой жизнью и имеет самостоятельную судьбу и ее редко используют только по ее прямому назначению. Отчасти формула похожа на домашний прибор, игрушку или программное обеспечение. Редко, кто читает инструкцию по применению нового телевизора или описание правил пользования новой программы - гораздо чаще эти обновки осваивают экспериментально,

нажимая подходящие клавиши и кнопки. Так же принято подходить и к формулам. Их "крутят", подставляют в них новые параметры, по-своему трактуют входящие в них символы и т. п. Математика - ремесло формул, искусство исчисления. Тем, кому эта констатация кажется слабой и неполной, можно напомнить, что в логическом плане теория множеств представляет из себя некоторую разновидность узкого исчисления предикатов. Теория распределений стала новым дифференциальным исчислением нашего времени. Таков масштаб научного открытия, связанного с именами наших героев.

ДВЕ СУДЬБЫ

Сергей Львович Соболев родился 6 октября 1908 г. в Петербурге в семье присяжного поверенного Льва Александровича Соболева. Дед со стороны отца был потомственным сибирским казаком. Сережа рано потерял отца и его воспитывала мать, Наталья Георгиевна, высокообразованный преподаватель литературы и истории, которая имела и вторую специальность: она окончила медицинский институт и работала доцентом 1-го Ленинградского медицинского института.

Программу средней школы Сергей освоил самостоятельно, особенно увлекаясь математикой. В годы гражданской войны он вместе с матерью жил в Харькове. Переехав в 1923 г. из Харькова в Петроград, поступил в последний класс 190-й школы. В 1924 г. окончил школу с отличием, но поступить в университет не смог по возрасту и стал учиться в Первой государственной художественной студии по классу фортепьяно.

В 1925 г. С.Л. Соболев поступил на физико-математический факультет Ленинградского университета, продолжая занятия музыкой. В ЛГУ Сергей Львович слушал лекции профессоров Н.М. Гюнтера, В.И. Смирнова, Г.М. Фихтенгольца и др. Под руководством Н.М. Гюнтера он написал дипломную работу об аналитических решениях системы дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. Представляется, что идеи Гюнтера по использованию функций множеств и интегральных тождеств при поиске обобщений понятия решения дифференциального уравнения оказали влияние на дальнейшее творчество Сергея Львовича. В 1929 г. после окончания университета он был принят в теоретический отдел Ленинградского сейсмологического института. В этот период в тесном сотрудни-

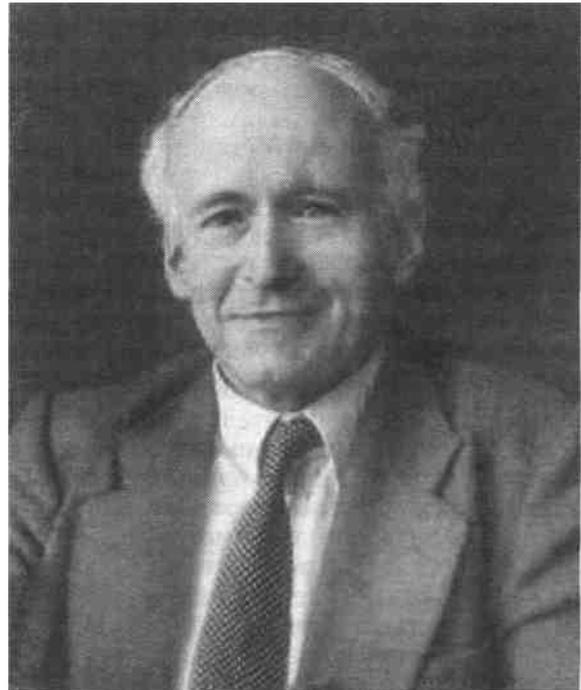
честве с В.И. Смирновым им решен ряд математических задач теории распространения волн.

С 1932 г. Сергей Львович работал в Математическом институте им. В.А. Стеклова в Ленинграде, а затем с 1934 г. - в Москве. Он предложил новый метод решения задачи Коши для гиперболического уравнения с переменными коэффициентами, основанный на обобщении формулы Кирхгофа. Работы, связанные с гиперболическими уравнениями, привели Сергея Львовича к пересмотру классического понятия решения дифференциального уравнения. Рассмотрение решений в пространствах функционалов ознаменовало начало теории обобщенных функций. Определив понятие обобщенными производными, он обогатил математику пространствами функций, обобщенные производные которых интегрируемы в некоторой фиксированной степени. Эти объекты теперь называют "пространствами Соболева".

В 1933 г., в возрасте 24 лет, С.Л. Соболев был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, а в 1939 г. стал ее действительным членом, долгое время оставаясь самым молодым академиком в стране. В 40-е годы он изучал системы дифференциальных уравнений, описывающие малые колебания вращающейся жидкости. Сергей Львович получил условия устойчивости вращающегося волчка с полостью, заполненной жидкостью, в зависимости от формы полости и ее параметров, разобрал подробно случаи цилиндрической полости и полости эллипсоида вращения. Эти исследования привели к возникновению нового направления в общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, посвященного исследованию решений задачи Коши и краевых задач для уравнений и систем, не разрешенных относительно старших производных по времени.

Академик Л.С. Соболев одним из первых понял значение вычислительной математики и кибернетики. С 1952 по 1960 г. он возглавлял первую в стране кафедру вычислительной математики. Его исследования этого периода стали одним из истоков общей теории вычислительных алгоритмов, связанной с абстрактным изучением приемов решения больших систем уравнений.

Задачи вычислительной математики в его работах обычно ставятся в рамках функционального анализа. Стали широко известными слова С.Л. Соболева о том, что теорию вычислений сейчас так же невозможно представить без банаховых пространств, как и без электронных вычислительных машин. Особо стоит выделить важную роль в становлении кибернетики и других новых направлений исследований, которую в 50-е годы сыграли его публичные выступления, в которых он открыто защищая науку от идеологизированного мракобесия. Работая много лет на посту главного заместителя директора Института атомной энергии, возглавляемого И.В. Курчато-



Л. Шварц (1915–2002)

вым, Сергей Львович принимал непосредственное участие в решении важных прикладных задач, имеющих оборонное значение. В январе 1952 г. С.Л. Соболев был удостоен высшей награды страны: ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда за исключительные заслуги перед государством.

Научная деятельность С.Л. Соболева была неотделима от его организаторской работы. В конце 50-х годов академики М.А. Лаврентьев, С.Л. Соболев и С.А. Христианович выступили с инициативой организации крупного исследовательского центра - Сибирского отделения Академии наук. Для многих ученых СО АН СССР первого призыва веским аргументом в принятии решения о переезде на работу в Новосибирск был пример Сергея Львовича Соболева, привлекательность его личности и его научный авторитет.

Сибирский период научной деятельности ознаменовался большими достижениями в теории кубатурных формул. Задача о приближенном интегрировании функций многих переменных является одной из основных и наиболее трудоемких в теории вычислений. Проблема оптимизации формул интегрирования сводится к нахождению минимума нормы функционала погрешности, заданного на некотором пространстве функций. Он предложил оригинальные подходы к названной проблематике, ввел и изучил новые типы оптимальных кубатурных формул. Ему была присуждена высшая награда Российской академии наук - Большая золотая медаль им. М.В. Ломоносова. Скончался ученый в Москве 3 января 1989 г.

Лоран Шварц родился в Париже 5 марта 1915 г. в семье хирурга. Среди его родственников немало выдающихся людей. Ж. Адамар был братом его бабушки. Много знаменитостей по линии матери Клэр Дебре (к этой фамилии принадлежит ряд незаурядных политиков голлистского толка). В 1938 г. Л. Шварц женился на Мари-Элен Леви, дочери выдающегося математика П. Леви, одного из основоположников функционального анализа. Мари-Элен со временем стала математиком-профессионалом и в 1963 г. - профессором.

Дарование Л. Шварца проявилось еще в лицейские годы. Он стал победителем в наиболее престижном соревновании лицейстов во Франции - *Concours General*. Л. Шварц колебался в выборе дальнейшей специальности между "классикой" (греческим и латынью) и геометрией. Любопытно, что Ж. Адамар был не в восторге от математических интересов Л. Шварца, так как 16-летний Лоран не знал дзета-функцию Римана. В сторону геометрии Л. Шварца подталкивали один из педагогов по классике и педиатр Робер Дебре. Лоран поступил в Высшую нормальную школу после двухлетней подготовки в 1934 г. вместе с Г. Шоке, победителем *Concours General* по математике. Вместе с ними поступила и Мари-Элен, ставшая одной из первых слушательниц Высшей нормальной школы. В те годы математическую атмосферу в школе определяли такие люди, как Э. Борель, Э. Картан, А. Данжуа, М. Фреше, П. Монтель. В соседнем Колледже Франции читал лекции А. Лебег и вел семинары Ж. Адамар. В студенческие годы под воздействием бесед со своим будущим тестем Полем Леви возникла и укрепилась неистребимая любовь Л. Шварца к теории вероятностей.

Вскоре после окончания Высшей нормальной школы Л. Шварц решил пройти обязательную военную службу. Вскоре грянула Вторая мировая война. Для молодой четы Шварцев наступили особенно тяжелые времена: как евреи они не могли оставаться в оккупированной немцами зоне Франции и вынуждены были покинуть родной север и жить на небольшие и не слишком определенные стипендии (в частности, от фонда Мишлена, всемирно известной фирмы по производству шин). В 1941 г. Л. Шварц встретился в Тулузе с А. Картаном и Ж. Дельсартом, которые посоветовали молодой чете перебраться в Клемон-Ферран, где в те годы собрались вытесненные немцами профессора Страсбургского университета Ж. Дьедонне, Ш. Эресманн, А. Лихневич, С. Мандельброт. Там Л. Шварц написал кандидатскую диссертацию по приближению непрерывной функции на оси суммами экспонент.

К сожалению, в математическую судьбу Л. Шварца опять вмешалась война - семья вынуждена была перейти на нелегальное положение.

Любопытно, что при открытии теории распределений в ноябре 1944 г. Л. Шварц жил под фамилией Селимартин. Основы своей теории Л. Шварц опубликовал в *Анналах Гренобльского университета* в 1945 г. Процесс своего открытия он сам характеризовал как "церебральную перколяцию". После года работы в Гренобле Л. Шварц перебрался в Нанси, где попал в самый центр "бурбакизма". Как известно, Н. Бурбаки жил в Нанкаго, смеси Нанси и Чикаго. В Чикаго был Анри Вейль, а в Нанси - Ж. Дельсарт, Ж. Дьедонне. Вскоре Л. Шварц был введен в состав группы Бурбаки. В 1950 г. он получил Филдсовскую медаль за теорию распределений, а затем увидел свет его знаменитый двухтомник "*Theorie des Distributions*". В 1952 г. Л. Шварц вернулся в Париж и стал работать сначала в Сорбонне, а с 1959 г. в Политехнической школе. Учениками Л. Шварца были многие знаменитости, среди них А. Гротендик, Ж.-Л. Лионе, Б. Мальгранж и А. Мартино.

Став в юности троцкистом из протеста против капиталистических мерзостей и сталинского террора 30-х годов, Шварц никогда в своей жизни не мирился с тем, что воспринимал как нарушение прав человека, угнетение и несправедливость. Он был активным борцом против американской войны во Вьетнаме и советского вторжения в Афганистан, сражался за освобождение ряда математиков, преследуемых по политическим мотивам, таких как Хосе Луи Массера, Вацлав Бенда и других. Л. Шварц был выдающимся лепидоптеристом и обладал коллекцией, насчитывающей более 20000 бабочек. Не случайно изображения бабочек украшают суперобложку второго издания его "Теории распределений". Умер Шварц 4 июля 2002 г. в Париже.

УСПЕХИ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В основе теории распределений лежит стремление применить технологии функционального анализа для исследования дифференциальных уравнений в частных производных. Функциональный анализ характеризуется алгебраизацией, геометризацией и социализацией аналитических задач. Под социализацией обычно понимают включение конкретной задачи в целый класс аналогичных проблем. Социализация позволяет стереть "случайные черты" - избавиться от трудностей, привносимых чрезмерной спецификой задачи. К началу 30-х годов достоинства функционального анализа уже были продемонстрированы в сфере интегральных уравнений. На повестке дня стояли уравнения дифференциальные.

Следует подчеркнуть, что размышления над природой интегрирования и дифференцирования лежат в основе большинства теорий современного функционального анализа, что неудивительно ввиду особой роли этих замечательных линейных

операций. Общеизвестно, что интегрирование обладает более привлекательными свойствами по сравнению с дифференцированием: эта операция монотонна и повышает гладкость. Указанные приятные свойства начисто отсутствуют у оператора дифференцирования. Всем известно, что классическое дифференцирование - замкнутый, но не непрерывный оператор (в естественной топологии, порожденной метрикой Чебышева). Ряды гладких функций, вообще говоря, нельзя дифференцировать почленно, что существенно затрудняет применение аналитических средств для решения дифференциальных уравнений.

В настоящее время мало кто усомнится в том, что центральным в теории распределений является понятие обобщенной производной. Производная рассматривается теперь как оператор, действующий на негладкие функции по тем же интегральным законам, которым подчиняется процедура взятия классической производной. Именно такой подход был впервые явно сформулирован С.Л. Соболевым. На предложенном пути стало возможным капитально расширить запас формул дифференцирования. В частности, оказалось, что любые распределения обладают производными любых порядков, поточечно сходящиеся ряды распределений можно сколько угодно раз дифференцировать почленно, а многие "традиционно расходящиеся" ряды Фурье допускают суммирование в виде явных формул. Математика приобрела дополнительные фантастические степени свободы, что обессмертило имя С.Л. Соболева как пионера нового исчисления.

Развернутые изложения достижений новой теории появились практически одновременно. В 1950 г. в Париже вышел первый том "Теории распределений" Л. Шварца, а в Ленинграде увидела свет книга С.Л. Соболева "Некоторые применения функционального анализа в математической физике". В 1962 г. Сибирское отделение издало репринт этой книги, а в 1963 г. в США вышел в свет ее английский перевод. Второе издание книги Л. Шварца (1966) было немного расширено за счет включения обобщенной версии теории потоков Ж. де Рама.

Предложенные теорией распределений новые методы оказались столь сильными, что позволили выписать в некотором явном виде общее решение произвольного дифференциального уравнения в частных производных в случае, когда коэффициенты при производных постоянны. Дело сводится к наличию фундаментальных решений - частных решений, отвечающих случаю, когда в правой части уравнения поставлена дельта-функция П. Дирака. Существование таких решений было установлено уже в 1953-1954 гг. независимо в работах Б. Мальгранжа и Л. Эренпрайса. Но лишь в 1994 г. фундаментальное решение было

выписано явно сначала Н. Кенигом, а затем несколько позже и в более элементарном виде Н. Ортнером и П. Вагнером. Структура найденной ими формулы показывает роль преобразования Фурье для распределений и пространства Шварца, составленного из умеренных распределений.

Факт существования фундаментального решения у произвольного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами по праву носит название теоремы Мальгранжа-Эренпрайса. Трудно переоценить это замечательное достижение, ставшее одним из триумфов абстрактной теории топологических векторных пространств.

Путь от обобщенных решений к классическим лежит через пространства Соболева. Исследование вложений и следов пространств Соболева и их обобщений стало одним из основных направлений современной теории функций вещественной переменной. Достаточно назвать таких математиков, как СМ. Никольский, О.В. Бесов, Г. Вейс, В.П. Ильин, В.Г. Мазья, чтобы представить масштабы этого математического направления. Десятки книг упоминают в своем названии пространства Соболева, что бывает не так уж часто в науке.

Даже сами создатели теории распределений С.Л. Соболев и Л. Шварц занимались приложениями теории обобщенных функций в математической физике [1,2]. Н.Н. Боголюбов после беседы с С.Л. Соболевым по обобщенным функциям использовал его классы основных (C^{TM}_{tr}) и обобщенных (C^{TM}_{tr}) функций при построении своей аксиоматической квантовой теории поля [3-5]. Это относится также к аксиоматике Вайтмана [6]. Более того, без обобщенных функций вообще нельзя построить аксиоматику квантовой теории поля. А в теории дисперсионных соотношений [7], выводимых из аксиоматики Боголюбова, обобщенные функции (и их обобщения - гиперфункции) выступают как граничные значения голоморфных функций (многих) комплексных переменных.

РАЗНЫЕ МНЕНИЯ ОБ ИСТОРИИ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Один из самых ярких французских математиков прошлого века Ж. Лерэ, удостоенный в 1989 г. вместе с С.Л. Соболевым Большой золотой медали им. М.В. Ломоносова, отмечал в своем отзыве о трудах С.Л. Соболева 1930-1955 гг.: "Теория распределений получила в настоящее время большое развитие благодаря теории векторных топологических пространств и их двойственности, благодаря понятию распределения умеренного роста, представляющему собой одно из важных достижений Л. Шварца (Париж), позволивших ему построить прекрасную теорию пре-

образований Фурье для распределений; Ж. де Рам ввел в дополнение к понятию распределения понятие потока, которое включает понятия дифференциальной формы и топологической цепи; Л. Хермандер, Б. Мальгранж, Ж.-Л. Лионе с помощью теории распределений обновили теорию уравнений с частными производными; П. Лелон установил одно из фундаментальных свойств аналитических множеств. Богатый содержанием двухтомный трактат Л. Шварца и еще более богатый пятитомный трактат Гельфанда и Шилова (Москва) - все эти достижения, столь важные, что уже один лишь французский вклад заслуживает высших наград, присужденных нашим сообществом. Приложения, которые получила теория распределений во всех областях математики, теоретической физики и численного анализа, ныне подобны густому лесу, который скрывает дерево, из зерен которого он вырос. Впрочем, мы знаем, что если бы С.Л. Соболев не сделал это открытие около 1935 г. в России, оно было бы сделано во Франции незадолго до 1950 г., а несколько спустя в Польше; США также льстят себя мыслью, что они сделали бы его в ту же пору: математическая наука и различные ее технические приемы запоздали бы по сравнению с Россией лишь на 15 лет.

Резким контрастом с этой оценкой звучит суждение Ф. Трева, который в статье, посвященной памяти Л. Шварца и вышедшей в октябре 2003 г., писал, что математиком 30-х годов, наиболее близко подошедшим к общему определению распределения, был Соболев. Далее он пишет о том, что обессмертило имя Л. Шварца: «Если допустить, что Шварца можно заменить в качестве изобретателя распределений, какие вещи тем не менее можно будет рассматривать как его важнейший вклад в их теорию? Автор этой статьи может упомянуть по крайней мере две из них, которые сохраняются: (1) решение о том, что пространство Шварца S функций, быстро убывающих на бесконечности, и его сопряженное S^1 являются "правильными" рамками для анализа Фурье, (2) теорема Шварца о ядре».

Мнение Ф. Трева почти перекликается с суждениями самого Л. Шварца, попавшим в его автобиографию, опубликованную в 1997 г. Более того, в этой автобиографии Л. Шварц написал о С.Л. Соболеве следующее: «Он не установил теорию применительно к общим приложениям, а ограничился только специальным вопросом: найти обобщенное решение уравнения в частных производных со вторым членом и с данными начальными условиями. Он превратил начальные условия во второй член и представил их в форме функционалов, записанных по границе. Он доказал также замечательную теорему о гиперболических уравнениях в частных производных второго порядка. Даже сегодня она является одним из лучших приложений теории распределений, это

очень удачная находка. Но все эти вещи оставались незавершенными. Его статья 1936 г., написанная по-французски, называется "Новый метод решения проблемы Коши для линейных нормальных гиперболических уравнений". После этой статьи он не сделал ничего нового в этом направлении, по крайней мере ничего плодотворного. Другими словами, сам Соболев не увидел важности своего собственного открытия».

Поражает полное отсутствие каких-либо упоминаний классической книги С.Л. Соболева 1950 г., которая долгие годы была настольной у многих специалистов по функциональному анализу и уравнениям в частных производных. Л. Шварц не упоминает о книге С.Л. Соболева "Введение в теорию кубатурных формул", где разработаны принципиально новые приложения теории распределений к вычислительной математике. Свои пионерские результаты в области численного интегрирования С.Л. Соболев основывал на развитии теории преобразования Фурье обобщенных функций, разработанной Л. Шварцем.

Сдержанный в оценках, исключительно тактичный и скромный человек, С.Л. Соболев всегда уклонялся от подробных экскурсов в историю теории распределений как в личных беседах, так и в своих многочисленных сочинениях. Все, что он считал необходимым оставить будущим поколениям по этому поводу, заключено в следующих указаниях об истории теории распределений, предваряющих VIII главу его книги "Введение в теорию кубатурных формул", опубликованной в 1974 г.: «Обобщенные функции представляют собой "идеальные элементы", которые пополняют классические функциональные пространства по тому же образцу, как вещественные числа пополняют множества рациональных».

Здесь мы изложим вкратце необходимую нам в дальнейшем теорию таких функций. Мы будем придерживаться способа изложения, близкого к тому, который был впервые использован автором в 1935 г.».

Теория обобщенных функций была позднее разработана Л. Шварцем, который, в частности, рассмотрел и исследовал преобразование Фурье обобщенных функций [8-10]. Исторически обобщенные функции в явном виде встречались уже в исследованиях по теоретической физике, в работах Ж. Адамара, М. Риса, С. Бохнера и других. Поэтому можно лишь отчасти согласиться с констатацией Л. Шварца: "...Соболев и я (и все прочие до нас) были хорошо подготовлены нашей эпохой, нашим окружением и нашими предшествующими работами. Это никому не добавляет славы, но каждый из нас развивал свой оригинальный подход (более того, каждый игнорировал работы всех остальных)" (цит. по [11, с. 248]).

Многие согласятся, что арбитром в теории распределений следует считать И.М. Гельфанда. Написанная им с учениками многотомная серия монографий "Обобщенные функции", начатая еще в середине 1950-х годов, остается одной из вершин мировой математической литературы, энциклопедией теории распределений. В предисловии к первому изданию первого выпуска этой серии И.М. Гельфанд писал: «Впервые обобщенные функции в явной и теперь общепринятой форме ввел С.Л. Соболев в 1936 г. ... В 1950-1951 гг. появилась монография Л. Шварца "Теория распределений". В этой книге Л. Шварц систематизировал теорию обобщенных функций, связал воедино все прежние подходы, привлек к ее обоснованию теорию линейных топологических пространств и получил ряд существенных и далеко идущих результатов. После выхода в свет "Теории распределений" обобщенные функции необыкновенно быстро, буквально за два-три года приобрели чрезвычайно широкую популярность». Это суждение взвешенно и справедливо, и его стоит принять во внимание.

КЛАССИЦИЗМ И РОМАНТИЗМ

Размышляя о судьбах С.Л. Соболева и Л. Шварца, невозможно обойти вопрос о причинах поляризации оценок математического открытия, связанного с их именами. Наивно полагать, что этот вопрос когда-либо получит простой и полный ответ, убедительный для всех и каждого. Достаточно обратиться к имеющемуся опыту, касающемуся других знаменитых пар математиков, споры о судьбе и творчестве которых продолжаются иногда столетиями, вызывая резкие столкновения мнений по сей день. Думается, что истоки этого довольно универсальны и заключены не только в особенностях личностей обсуждаемых людей, но и, не в последнюю очередь, в природе самого математического творчества.

Прибегая к аналогии, можно отметить, что математике присущи черты, ассоциирующиеся с теми направлениями в искусстве, которые принято называть классицизмом и романтизмом. Трудно

не увидеть классические черты эллинской традиции в сочинениях Евклида, И. Ньютона, Я. Больяи, Д. Гильберта и Н. Бурбаки. Невозможно не отозваться на тот романтический гимн человеческому гению, который звучит со страниц сочинений Диофанта, Г.В. Лейбница, Н.И. Лобачевского, А. Пуанкаре и В.И. Арнольда. Лучшие черты математического классицизма и романтизма нашли воплощение в творчестве С.Л. Соболева и Л. Шварца. Эти люди и их достижения навсегда останутся с нами.

С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ,

доктор физико-математических наук

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
2. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965. Соболев С.Л. Задача Коши в пространстве функционалов // Докл. АН СССР. 1935. №7.
3. *Боголюбов Н.Н., Жирков Д.В.* Введение в теорию квантовых полей. М.: Наука, 1984.
4. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров ИЛ., Оксак А.И.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
5. *Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В., Поливанов М.К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Физматлит, 1958.
6. *Streater R., Wightman A.S.* PCT, Spin and Statistics, and All That. Benjamin, 1964.
7. *Соболев С.Л.* Об одной теореме функционального анализа // Матем. сборник. 1938. № 3.
8. *Schwartz L.* Theorie des Distributions. Tome I. Paris: Hermann, 1950.
9. *Schwartz L.* Theorie des Distributions. Tome II. Paris: Hermann, 1951.
10. *Schwartz L.* Un Mathématicien aux Prises avec le Siècle. Editiones Odile Jacob Fevrier, 1997.
11. *Гельфанд ИМ., Шилев Т.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. М.: ГИФМЛ, 1959.