# ДОКЛАДЫ

## АКАДЕМИИ НАУК СССР

1970

т. 192, № 5

Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 5

УДК 517.93 *МАТЕМАТИКА*

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

# ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ В СМЫСЛЕ МИНКОВСКОГО ФУНКЦИОНАЛЫ НАД ВЫПУКЛЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

*(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 10 XII 1969)*

При анализе некоторых экстремальных задач изопериметрического типа, а также в ряде других вопросов возникает задача о представлении положительного линейного относительно операций Минковского функционала над выпуклыми поверхностями. В настоящей работе дается описание таких функционалов в терминах отношения порядка, родственного так называемой сильной упорядоченности мер по Люмису. Однако, к сожалению, идея доказательства близкой теоремы Картье — Фелла — Мейе [1], описывающей поляру конуса выпуклых функций, в данном случае непригодна. Дальнейшее изложение использует некоторые свойства пространства выпуклых множеств.

Пусть $\mathfrak{V}_n$ есть совокупность выпуклых компактных подмножеств $n$-мерного арифметического пространства $R^n$ с эвклидовой нормой $|\cdot|$. Для $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y} \in \mathfrak{V}_n$ и $\alpha \geqslant 0$ определяются операции Минковского:

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \{z \in R^n\colon z = x + y \ (x \in \mathfrak{x};\ y \in \mathfrak{y})\};$$
$$\alpha\mathfrak{x} = \{z \in R^n\colon z = \alpha x \ (x \in \mathfrak{x})\}.$$

Наделив $\mathfrak{V}_n$ топологией Хаусдорфа, получим непрерывную полугруппу с операторами из полугруппы неотрицательных чисел $R_+$. Пусть теперь $\mathfrak{V}O_n$ есть множество телесных выпуклых компактов, или, что то же самое, множество выпуклых поверхностей. Так как $\mathfrak{V}O_n$ всюду плотно в $\mathfrak{V}_n$, то искомое множество $\mathfrak{V}O_n^*$ положительных линейных в смысле Минковского функционалов совпадает с $\mathfrak{V}_n^*$ — множеством непрерывных $R_+$-операторных гомоморфизмов $\mathfrak{V}_n$ в $R_+$.

Через $\mathrm{Sub}\,(R^n)$ обозначим совокупность сублинейных (выпуклых, положительно однородных) функций, определенных на всем $R^n$. Наделим это множество обычной алгебраической структурой и топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах $R^n$.

Обозначим через $\varphi\colon \mathfrak{V}_n \to \mathrm{Sub}\,(R^n)$ отображение, переводящее выпуклый компакт $\mathfrak{x}$ в его опорную функцию $\varphi(\mathfrak{x})$, определенную соотношением

$$\varphi(\mathfrak{x})(y) = \sup_{x \in \mathfrak{x}} (x, y) \quad (y \in R^n).$$

Известна

Теорема Минковского — Фенхеля. *Отображение* $\varphi\colon \mathfrak{V}_n \to \mathrm{Sub}\,(R^n)$ *есть изоморфизм алгебраической и топологической структур.*

Отождествим теперь каждую сублинейную функцию с ее следом на единичной сфере $Z_n = \{x \in R^n\colon |x| = 1\}$. При этом элементы $\mathrm{Sub}\,(R^n)$ переходят в точки конуса $H_n$, определенного соотношением

$$H_n = \Big\{h \in C(Z_n) : |x|\, h\left(\frac{x}{|x|}\right) + |y|\, h\left(\frac{y}{|y|}\right) - |x+y|\, h\left(\frac{x+y}{|x+y|}\right) \leqslant 0 \quad (x, y \in R^n)\Big\}.$$

В последней формуле, если $z = 0$, то, по определению, $|z|\,h(z/|z|) = 0$, а под $C(Z_n)$ понимается пространство непрерывных на $Z_n$ функций с чебышевской нормой.

С этого момента символ $\mathfrak{V}_n$ будет использоваться для обозначения каждого из трех объектов $\mathfrak{V}_n$, $\mathrm{Sub}\,(R^n)$ и $H_n$.

Из теоремы Стона — Вейерштрасса следует, что $\mathfrak{V}_n$ тотально с $C(Z_n)$. Таким образом, задача сводится к описанию сопряженного конуса

$$\mathfrak{V}_n{}^* = \{\mu \in C^*(Z_n):\ \mu(h) \geqslant 0\ \ (h \in \mathfrak{V}_n)\}.$$

Здесь $C^*(Z_n)$ есть пространство, сопряженное к $C(Z_n)$. При этом мы будем считать уже проведенным отождествление мер Радона с борелевскими мерами на $Z_n$.

Определение 1. Пусть $\mu, \nu \in C^*(Z_n)$. Условимся говорить, что $\mu$ линейно эквивалентна $\nu$ и писать $\mu \sim \nu$, если $\mu(z) = \nu(z)$ для любой линейной функции $z$ из $\mathfrak{V}_n$.

Определение 2. Про неотрицательные меры $\mu, \nu \in C^*(Z_n)$ будем говорить, что $\mu$ линейно сильнее $\nu$ и писать $\mu \gg \nu$, если для любого конечного разбиения $\nu_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{s} \nu_k = \nu$ меры $\nu$ найдется разбиение $\mu_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{s} \mu_k = \mu$ меры $\mu$ такое, что $\mu_k \sim \nu_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$.

Можно показать, что отношение $\gg$ является частичным порядком. Основной результат работы содержит следующая

Теорема 1. *Разность неотрицательных мер* $\mu$ *и* $\nu$ *входит в* $\mathfrak{V}_n{}^*$ *в том и только том случае, если* $\mu$ *линейно сильнее* $\nu$.

Достаточность непосредственно проверяется на функциях вида $h = \sup\limits_{1 \leqslant k \leqslant s} l_k$, где $l_k$ — линейный функционал над $R^n$. Кроме того, множество таких функций всюду плотно в $\mathfrak{V}_n$.

Доказательство необходимости основано на двух леммах.

Лемма 1. *Пусть* $\mu$, $\nu$, $\delta$ — *неотрицательные меры, причем носитель* $\delta$ *конечен. Если* $\mu + \delta \gg \nu + \delta$, *то и* $\mu \gg \nu$.

Лемма 2. *Пусть* $x_1, x_2, \ldots, x_p$, $y_1, y_2, \ldots, y_p$ — *произвольные векторы из* $R^n$. *Если для любой сублинейной функции* $h \in \mathfrak{V}_n$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{p} h(x_k) \geqslant \sum_{k=1}^{p} h(y_k),$$

*то вектор* $(y_1, y_2, \ldots, y_p) \in (R^n)^p$ *лежит в образе множества* $S$ *квадратных стохастических матриц при отображении*

$$S \ni \|\alpha_k^s\| \to \Big(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k^1 x_k,\ \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^2 x_k, \ldots,\ \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^p x_k\Big) \in (R^n)^p.$$

Доказательство теоремы завершается следующим образом. Ясно, что нужно проверить импликацию $\mu - \nu \in \mathfrak{V}_n{}^* \Rightarrow \mu \gg \nu$. Ввиду леммы 1 можно считать, что мера $\mu$ удовлетворяет условиям известной теоремы А. А. Александрова (2) о восстановлении выпуклого тела по его поверхностной функции. Пусть $\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}_n$ таково, что $\mu = \mu(\mathfrak{x})$. Здесь $\mu$: $\mathfrak{V}_n \to C^*(Z_n)$ — отображение, переводящее выпуклый компакт в его поверхностную функцию. Пусть теперь $\{\mathfrak{x}_m\}$ — последовательность многогранников, аппроксимирующая $\mathfrak{x}$, причем такая, что $2\mathfrak{x} \supset \mathfrak{x}_m \supset \mathfrak{x}$. Как известно, в этой ситуации $\{\mu(\mathfrak{x}_m)\}$ сходится в смысле ослабленной топологии пространства $C^*(Z_n)$ к $\mu(\mathfrak{x})$. Кроме того, ввиду монотонности смешанного объема, $\mu(\mathfrak{x}_m)(h) \geqslant \mu(\mathfrak{x})(h)$ для всякой $h \in \mathfrak{V}_n$. Таким образом, $\mu(\mathfrak{x}_m) - \nu \in \mathfrak{V}_n{}^*$, следовательно, по лемме 2, $\mu(\mathfrak{x}_m) \gg \nu$. Требуемый результат теперь непосредственно устанавливается предельным переходом.

В качестве следствия доказанной теоремы получается

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}$ — *выпуклые поверхности из* $\mathfrak{B}O_n$. *Тогда неравенство*

$$V(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}, \mathfrak{z}) \geqslant V(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}, \mathfrak{z})$$

*справедливо для каждой выпуклой поверхности* $\mathfrak{z}$ *в том и только в том случае, если*

$$\mu(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}) \gg \mu(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}).$$

*Здесь* $V(\cdot, \ldots, \cdot)$ *и* $\mu(\cdot, \ldots, \cdot)$ — *соответственно смешанный объем и смешанная поверхностная функция.*

Введем теперь в рассмотрение семейство мер

$$NS = \{|x|\varepsilon_{x/|x|} + |y|\varepsilon_{y/|y|} - |x+y|\varepsilon_{(x+y)/|x+y|}\}_{x,\, y \in R^n},$$

где $\varepsilon_{z/|z|}$ при $z \neq 0$ есть мера, порожденная единичной массой, расположенной в точке $z / |z| \in Z_n$, а при $z = 0$ есть нулевая мера. Уверенность в том, что никаких неравенств над сублинейными функциями, кроме «следствий» неравенств сублинейности, быть не может, подтверждает простое

Предложение. *Замыкание в ослабленной топологии пространства* $C^*(Z_n)$ *конической выпуклой оболочки* $K(NS)$ *множества* $NS$ *совпадает с* $\mathfrak{B}_n^*$.

Для доказательства достаточно взглянуть на пространства $C(Z_n)$ и $C^*(Z_n)$ со слабой и ослабленной топологиями соответственно как на дуальную пару и применить теорему отделимости.

Замечание. Из легко проверяемого соотношения

$$K(NS) \subset \{\mu - \nu \in C^*(Z_n) \colon \mu \gg \nu\} \subset \mathfrak{B}_n^* \tag{1}$$

ясно, что для доказательства основного результата — теоремы 1 — достаточно проверить ослабленную замкнутость среднего множества в (1). Осуществить непосредственно указанную проверку автору не удалось. Заметим, что Картье, Фелл и Мейе в аналогичной ситуации (см. [1]) также не пошли по этому пути.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
24 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Фелпс, Лекции по теоремам Шоке, М., 1968. [2] Г. Буземан, Выпуклые поверхности, «Наука», 1964.