ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1971

т. 197, № 6

Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 6

УДК 513.88:513.83 *МАТЕМАТИКА*

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ, А. М. РУБИНОВ

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ H-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 28 X 1970)

Техника исследования ряда задач выпуклого анализа состоит в комбинировании теорем отделимости и методов теории пространств Л. В. Канторовича. В настоящей работе выделяется структурная часть схем двойственности, связанных прежде всего с именами Минковского и Фенхеля и приводится способ перехода от «супремальных» конструкций к линейным операциям с помощью так называемых декомпозиций Решетняка — Люмиса ([1], [2]).

Рассмотрим совокупность $\bar{R}^X$ всех функций, определенных на некотором множестве X и принимающих значения из «полурасширенной» числовой прямой $(-\infty, +\infty]$. Считаем, что $\bar{R}^X$ упорядочено естественным образом. Пусть S — некоторое подмножество $\bar{R}^X$, являющееся структурой (решеткой) относительно порядка, индуцированного из $\bar{R}^X$, и H — подмножество S. Элемент $f \in S$ называется H-выпуклой функцией, если $f = \sup U$, где $U \subset H$. Подмножество U множества H назовем H-выпуклым, если найдется H-выпуклая функция f такая, что $U = \{h \in H: h \leqslant f\}$. Совокупность всех H-выпуклых функций (соответственно, H-выпуклых множеств) обозначим через $P(H, S)$ (соответственно, $\mathfrak{B}(H, S)$).

Приведем несколько примеров. Условимся предварительно через R^X обозначать подмножество $\bar{R}^X$, состоящее из конечнозначных функций.

Пример 1. Пусть X — некоторое подмножество локально выпуклого пространства (л.в.п.) Z; $H(X)$ — совокупность следов на X аффинных над Z функционалов. Элементы множества $P(H(X), R^X)$ естественно назвать выпуклыми (замкнутыми) на X функциями. В самом деле, каждая $H(X)$-выпуклая функция допускает распространение до выпуклой (замкнутой) функции, определенной на замкнутой выпуклой оболочке X.

Пример 2. Пусть K и L — два замкнутых выпуклых конуса в л.в.п. X, причем $K \supset L$ и $L - L = X$. Через K_L^* (соответственно, L_L^*) обозначим сужение функционалов из сопряженного к K конуса K^* на L (соответственно сужение функционалов из L^* на L). Можно показать, что $U \in \mathfrak{B}(K_L^*, R^L)$ тогда и только тогда, если U выпукло, слабо ограничено и $U = (\overline{U - L_L^*}) \cap K_L^*$ (здесь черта означает слабое замыкание).

Пример 3. Пусть H — совокупность всех вогнутых квадратных трехчленов, определенных на отрезке $[a, b]$. В этом случае, $P(H, C([a, b])) = C([a, b])$. Отсюда, в частности, следует, что если положительный линейный оператор $T: C([a, b]) \to C([a, b])$ таков, что $T(1) = 1$, $T(I) = I$, $T(I^2) \leqslant I^2$ (где $1(t) = 1$, $I(t) = t$, $I^2(t) = t^2$ $(t \in [a, b])$, то T — единичный оператор (ср. ([3])).

Пример 4. Пусть на множестве X задано семейство Φ вещественных на X функций. Тогда множество $A \subset X$ называется Φ-выпуклым (в смысле Фаня ([4])), если для каждого $x \in X \setminus A$ существует такая функция $\varphi \in \Phi$, что $\varphi(x) > \sup\limits_{y \in A} \varphi(y)$. Будем считать множество X вложенным в пространство R^Φ следующим способом: каждая точка $x \in X$ отождествляется с δ-функцией $\tilde{x}$: $\varphi \mapsto \varphi(x)$ (предполагается, что Φ разделяет точки из X). Совокупность всех функций вида x, где $x \in X$, обозначим через $\tilde{X}_\Phi$. Более того, знаком $\sim$ обозначим и сам оператор вложения X в R^Φ. Тогда непрерывных сублинейных функционалов, определенных на K, при этом $H(K)$ обладает свойством (C).

Пример 7. Пусть H — выпуклый замкнутый конус в пространстве $\mathbf{R}^n$. Рассматривая элементы H как линейные функционалы над $\mathbf{R}^n$ и отождествляя линейный функционал с его следом на единичную эвклидову сферу Z_{n-1}, будем считать H конусом в $C(Z_{n-1})$. Из теоремы 2 следует, что H обладает свойством (L). Привлекая схему Минковского — Фенхеля, можно показать, в частности (ср. [7]), что имеет место

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}$; $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}$ — *заданные выпуклые поверхности в* $\mathbf{R}^n$ *и* H — *подпространство* $\mathbf{R}^n$. *Для того чтобы для любой выпуклой поверхности* $\mathfrak{z}$, *лежащей в* H, *имело место неравенство для смешанных объемов*

$$V(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}, \mathfrak{z}) \geqslant V(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}, \mathfrak{z}),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие для смешанных поверхностных функций:

$$\mu(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}) \underset{H}{\geqslant} \mu(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}).$$

Рассмотрим теперь л.в.п. Z, являющееся K-линеалом. Через Z' обозначим пространство, сопряженное к Z, через K — конус положительных элементов Z, через K^* — конус в Z', сопряженный к K. Предположим, что отношение порядка и топология в Z согласованы так, что конусный отрезок $\langle 0, f\rangle = (f - K^*) \cap K^*$ компактен в $\sigma(Z', Z)$ для любого $f \in K^*$. Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — выпуклые замкнутые конусы в Z, обладающие тем свойством, что для любых $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2, \ldots, h_n \in H_n$ и всякого $f \in K^*$ найдется разбиение $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ функционала f такое, что

$$f(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k(h_k).$$

В этой ситуации можно установить общую связь между декомпозициями [8] и «супремальными» конструкциями. Именно, справедлива

Теорема 4. *Пусть* $f, g \in K^*$.

Тогда неравенство

$$f(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n) \geqslant g(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n)$$

имеет место для любых $h_k \in H_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *в том и только том случае, если для любого разбиения* $(g_1, \ldots, g_n)$ $(g_k \geqslant 0, \sum g_k = g)$ *найдется разбиение* $(f_1, \ldots, f_n)$ $(f_k \geqslant 0, \sum f_k = f)$ *такое, что* $f_k - g_k \in H_k^*$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

В заключение отметим, что приводимые в работе конструкции находят применения в различных разделах выпуклого анализа, геометрии и математической экономики.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
12 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Г. Решетняк, Диссертация, Л., 1954. [2] Р. Фелипс, Лекции по теореме Шоке, М., 1968. [3] П. П. Коровкин, Линейные операторы и теория приближений, М., 1959. [4] C. Fan, Convexity, Providence, 1963, p. 211. [5] R. T. Rockafellar, Convex Analysis, New Jersy, 1970. [6] V. Strassen, Ann. Math. Stat., 36, 423 (1965). [7] С. С. Кутателадзе, ДАН, 192, № 5, 984 (1970). [8] H. Dinges, J. Funct. Anal., 5, 3, 436 (1970).