ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1971

т. 199, № 4

Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 4

УДК 513.88

МАТЕМАТИКА

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ, А. М. РУБИНОВ

СУПРЕМАЛЬНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 29 I 1971)

В настоящей работе излагается одна схема исследования сходимостных явлений, изучаемых, например, в ([1–4]). Отправным пунктом является теория H-выпуклых функций ([5]). Приводимые типичные результаты показывают, что изучение сходимости последовательностей положительных линейных операторов естественно связывать с вводимым понятием супремального генератора полуупорядоченного пространства.

Пусть X — векторное подпространство K-пространства Y, а H — конус (= выпуклый конус) в X. Будем говорить, что H является *супремальным генератором* X (относительно Y), или что H супремально порождает X (относительно Y), если: а) конус H минорантен в X, т. е. для любого $x \in X$ множество $U_x = \{h \in H \mid h \leqslant x\}$ не пусто, б) для каждого $x \in X$ выполняется соотношение $x = \sup U_x$.

Условимся символом $\mathscr{L}^+(V_1, V_2)$, где V_1, V_2 — упорядоченные векторные пространства, обозначать множество линейных положительных операторов из V_1 в V_2. Положительным ростком оператора $T \in \mathscr{L}^+(V_1, V_2)$ на конусе $H \subset V_1$ называют множество

$$\operatorname{Spr}(T, H) = \{T' \in \mathscr{L}^+(V_1, V_2) \mid T'h \geqslant Th \ \ (h \in H)\}.$$

Теорема 1. *Пусть $(Y_\alpha)_{\alpha \in A}$ — разложение K-пространства Y, а H — минорантный конус в X.*

Следующие утверждения эквивалентны:

а) *H — супремальный генератор X;*

б) *для любого $\alpha \in A$ и любой последовательности (T_n), где $T_n \in \mathscr{L}^+(X, Y_\alpha)$, такой, что $(o) - \varliminf_n T_n h \geqslant \mathrm{Pr}_\alpha h$ при всех $h \in H$, при любом $x \in X$ справедливо $T_n x \xrightarrow{(o)} \mathrm{Pr}_\alpha x$ (здесь Pr_α — проектор на компоненту Y_α);*

в) *$\operatorname{Spr} \widetilde{\mathrm{Pr}}_\alpha, H) = \{\widetilde{\mathrm{Pr}}_\alpha\}$ при любом $\alpha \in A$ (здесь $\widetilde{\mathrm{Pr}}_\alpha$ — сужение Pr_α на X).*

В случае, когда конус H натянут на не более чем счетное число образующих, (o)-сходимость в этой теореме можно заменить на (t)-сходимость.

Пусть теперь V есть K-линеал, снабженный системой монотонных полунорм, и M — подмножество пространства V^*, топологически сопряженного к V, состоящее из положительных функционалов. Будем говорить, что конус H из V есть супремальный генератор V относительно множества M, если для всех $x \in V$ и $\mu \in M$ имеет место соотношение

$$\mu(x) = \sup_{h \in H,\ h \leqslant x} \mu(h).$$

Эта модификация понятия супремального генератора оказывается также весьма полезной. Приведем лишь пример, касающийся пространства $C(Q)$, где Q — компактное топологическое пространство. В этом случае в положительный росток оператора в $C(Q)$ (соответственно меры на Q) будем включать только операторы (меры) того же класса. Если M — множество из положительных мер на Q (с широкой топологией), то через

$\Phi(M)$ обозначается совокупность всех непрерывных отображений φ: $Q \to M$. Через T_φ обозначается распространение отображения $\varphi \in \Phi(M)$ до оператора из $C(Q)$ в $C(Q)$.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

а) *H — супремальный генератор $C(Q)$ относительно множества M*;

б) *для каждой меры $\mu \in M$ положительный росток* $\mathrm{Spr}(\mu, H)$ *совпадает с* $\{\mu\}$;

в) *для каждого $\varphi \in \Phi(M)$ положительный росток* $\mathrm{Spr}(T_\varphi, H)$ *совпадает с* $\{T_\varphi\}$;

г) *для каждой меры $\mu \in M$ и любой последовательности* (μ_n) *положительных мер такой, что* $\underline{\lim}_n \mu_n(h) \geqslant \mu(h)$ *для всех $h \in H$, последовательность* (μ_n) *широко сходится к* μ.

д) *для каждого $\varphi \in \Phi(M)$ и любой последовательности* (T_n), *где* $T_n \in \mathscr{L}^+(C(Q), C(Q))$, *такой, что равномерный* $\lim_n T_n h \geqslant T_\varphi h$ *для всех* $h \in H$, *последовательность* (T_n) *сильно сходится к оператору* T_φ.

Отметим попутно, что техника декомпозиций Решетняка — Люмиса ([5]) позволяет дать характеристику супремального генератора через поведение всех операторов из $C(Q)$ в пространство ограниченных на Q функций.

Для дальнейшего существенно понятие границы Шоке ([6]), которая в данной ситуации определяется так: точка $z \in Q$ входит в границу Шоке конуса $H \subset C(Q)$, если H является супремальным генератором $C(Q)$ относительно меры Дирака ε_z.

Итак, пусть Q — метрический компакт с непрерывной регулярной мерой μ. Через $S(Q)$ обозначим K-пространство μ-измеримых функций на Q.

Теорема 3. *Пусть Z_1 и Z_2 суть банаховы пространства функций, причем $C(Q) \subset Z_1 \subset Z_2 \subset S(Q)$, $C(Q)$ плотно в Z_1, Z_2 является KB-пространством, нормально содержащимся в $S(Q)$, пусть, далее, H — конус в $C(Q)$, граница Шоке которого измерима и имеет полную меру; последовательность (T_n) операторов из $\mathscr{L}^+(Z_1, Z_2)$ такова, что* $\sup_n \|T_n\| < \infty$ *и, кроме того,* $\|T_n h - b_h\|_{z_2} \to 0$, *где* $b_h \geqslant h$ *при всех* $h \in H$.

Тогда $\|T_n x - x\|_{z_2} \to 0$ *при всех* $x \in Z_1$.

Особый интерес представляет случай существования конечных супремальных генераторов. Нетрудно показать, что KB-линеал с конечным супремальным генератором реализуется как пространство $C(Q)$. Для этого последнего пространства особый интерес представляют супремальные генераторы относительно семейства вероятностных мер с носителем, имеющим не более чем заданное число точек. Наличие тех или иных генераторов в таком пространстве тесно связано с топологическим устройством компакта, на чем мы не останавливаемся. Укажем только, что конечные генераторы такого класса существуют в том и только том случае, если компакт конечно-мерен.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск.

Поступило
15 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Коровкин, ДАН, 90, 961 (1953). [2] Ю. А. Шашкин, УМН, 20, 6, 1085 (1965). [3] М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, УМН, 23, 2, 213 (1968). [4] Р. К. Васильев, Матем. заметки, 8, 4, 475 (1970). [5] С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов, Оптимальное планирование, 17, 96 (1970). [6] Р. Фелпс, Лекции по теоремам Шоке, М., 1968.