ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1973

т. 208, № 4

Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 4

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 11 V 1972)

В работе изучаются некоторые вопросы сходимости последовательностей операторов и связанная с этим задача об однозначной определенности оператора в том или ином классе. Аналогичному вопросу о сходимости, как правило, положительных операторов к тождественному, посвящены работы, упомянутые в обзоре (1), статьи (2-8), а также работы (9, 10), являющиеся отправным пунктом дальнейшего изложения. Используемые ниже сведения из теории пространств Канторовича см. в (11).

Пусть X — упорядоченное векторное пространство, Y — K-пространство и $T \in \mathscr{L}^+(X, Y)$ (т. е. T — положительный линейный оператор, действующий из X в Y). Конус (= выпуклый конус) H в X называется супремальным генератором пространства X относительно оператора T, если H минорирующий (т. е. для любого x из X множество $\{h \in H\colon h \leqslant x\}$ не пусто) и, кроме того,

$$Tx = \sup_{h\leqslant x,\, h\in H} Th.$$

Если $X \subset Y$ и $T = E$, где E — оператор тождественного вложения X в Y, то данное определение совпадает со стандартным определением супремального генератора относительно K-пространства; если Y есть K-пространство вещественных чисел R, то это определение переходит в определение генератора относительно функционала (9).

В рассматриваемой ситуации справедлива следующая теорема (ср. (10)), которую следует считать специальным случаем теоремы Хана — Банаха — Канторовича.

Теорема 1. *Пусть H — минорирующий конус в X. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *H — супремальный генератор пространства X относительно оператора T.*

2) *Для любой последовательности операторов (T_n), $T_n \in \mathscr{L}^+(X, Y)$, такой, что $\underline{\lim}_n T_n h \geqslant Th$ для всех h из H, следует, что $(o) - \lim_n T_n x = Tx$ для всех x из X.*

3) $\operatorname{Spr}(T, H) = \{T' \in \mathscr{L}^+(X, Y) : T'h \geqslant Th\,(h \in H)\} = \{T\}$.

В случае телесности конуса положительных элементов в X условие минорантности H можно отбросить.

Рассмотрим, например, в качестве Y K-пространство H_G функций, гармонических и ограниченных в ограниченной области (числового пространства) G с компактной границей ∂G. В качестве X возьмем $C(\partial G)$, где $C(Q)$ — пространство непрерывных на Q функций. Пусть $HC_{\overline{G}}$ — пространство функций, гармонических в G и непрерывных в $\overline{G} = G \cup \partial G$. Обозначим через HC_G пространство следов функций из $HC_{\overline{G}}$ на G, а через $H_{\partial G}$ — пространство следов на ∂G. Ясно, что HC_G и $H_{\partial G}$ естественным образом изоморфны и могут быть отождествлены. Пусть, далее, $T : C(dG) \to H_G$ — оператор, сопоставляющий каждой функции из $C(\partial G)$ соответствующее решение обобщенной задачи Дирихле. Тогда теорема Келдыша (12) перепишется в виде $\mathrm{Spr}(T, H_{\partial G}) = \{T\}$. Отсюда, по теореме 1, получаем для $f \in C(\partial G)$ представление

$$Tf = \sup \{h \in HC_G\colon h(x) \leqslant f(x),\ x \in \partial G\}.$$

Очевидно, в свою очередь, что теорема Келдыша является простым следствием указанного представления.

Теорему 1 можно применить для исследования операторов $T\colon V \to Y$ (V — нормированное пространство, Y — K-пространство), обладающих абстрактной нормой, т. е. таких, что множество $TS = \{|Tx|\colon \|x\| \leqslant 1\}$ ограничено (элемент $\sup TS$ называется абстрактной нормой оператора T и обозначается $|T|$). Переход к случаю положительных операторов происходит с помощью порядковой надстройки (см., например, [13]). Напомним, что порядковой надстройкой нормированного пространства V называют пространство $V \times R$, упорядоченное телесным конусом $\{(x, t) \in V \times R\colon \|x\| \leqslant t\}$ — надграфиком функционала $x \mapsto \|x\|$.

Теорема 2. *Пусть H — конус в V и T — обладающий абстрактной нормой оператор, $T\colon V \to Y$. Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *Конус $\tilde{H} = H \times (-R_+)$, где $R_+ = \{t \in R : t \geqslant 0\}$, является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно оператора $(T, |T|)\colon (x, t) \mapsto Tx + t|T|$.*

2) *Для каждого x из V имеет место представление*

$$Tx = \sup_{h \in H} (Th - |T|\,\|x - h\|).$$

3) *Для любой последовательности $(T_n), T_n\colon V \to Y$, такой, что $\overline{\lim_n} |T_n| \leqslant |T|$ и $\underline{\lim_n} T_n h \geqslant Th$ для всех h из H, выполняется $(o) - \lim_n T_n x = x$, $x \in V$.*

4) *Для любого оператора $T'\colon V \to Y$ такого, что $|T'| \leqslant |T|$ и, кроме того, $T'h \geqslant Th$, $(h \in H)$, следует, что $T' = T$.*

В случае, когда $Y = R$, эта теорема переходит в аналог известного результата Шмульяна [14], см. также [15]. Аналогичное утверждение справедливо также в случае, когда V нормируется при помощи произвольного K-линеала.

Особенный интерес представляют конечные генераторы, которые при естественных предположениях, как известно [10], существуют лишь в K-линеалах ограниченных элементов. В дальнейшем поэтому мы остановимся особо на случае, когда V является KN-линеалом ограниченных элементов. Прежде всего, для конуса H в V условимся через $\tilde{H}$ обозначать коническую оболочку элемента $(-1, -1)$, где 1 — единица в V, и конуса $\{(h, -h) \in V \times V\colon h \in H\}$ в пространстве $V \times V$.

Имеет место эффект «удвоения генератора», именно:

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *$\tilde{H}$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно оператора $(E, 1)$, где E — вложение V в Y.*

2) *$\tilde{H}$ является супремальным генератором пространства $V \times Y$ относительно оператора $E\colon (x_1, x_2) \mapsto x_1$.*

3) *Для любой последовательности (T_n), где $T_n\colon V \to Y$, $\overline{\lim_n} |T_n| \leqslant 1$ и $\underline{\lim_n} T_n h \geqslant h$ для $h \in H$, выполняется $(o) - \lim_n T_n x = x$, $x \in V$.*

4) *Для любого оператора $T\colon V \to Y$ такого, что $|T| \leqslant 1$ и, кроме того, $Th \geqslant h$, $h \in H$, выполняется $T = E$.*

При применении этой теоремы следует иметь в виду, что подпространство H в V обладает тем свойством, что $\tilde{H}$ — супремальный генератор относительно оператора $\tilde{E}$ в том и только том случае, если $\tilde{H}$ — супремальный генератор $V \times V$ относительно K-пространства $Y \times Y$.

Приведем типичное приложение описанного эффекта. Рассмотрим метрический компакт Q, снабженный положительной бэровской мерой. Через $S_\mu(Q)$ обозначим соответствующее пространство измеримых функций. Будем считать компакт Q реализованным в сопряженном пространстве $C'(Q)$, т. е. отождествлять точку x из Q с мерой Дирака ε_x: $f \mapsto f(x)$. Положим $\hat{Q} = Q \cup (-Q)$ и определим на $\hat{Q}$ меру $\hat{\mu}$, считая для бэровского множества e в $\hat{Q}$, что

$$\hat{\mu}(e) = \mu(e \cap Q) + \mu(-(e \cap (-Q))).$$

Если H — подпространство в $C(Q)$, то через $\hat{H}$ обозначим конус в $C(\hat{Q})$, натянутый на функцию -1 и множество, состоящее из функций $\hat{h}$, где для h из H и x из Q считается

$$\hat{h}(\varepsilon_x) = h(x), \ \hat{h}(-\varepsilon_x) = -h(x)$$

(мы, разумеется, полагаем, что в $\hat{Q}$ индуцирована широкая топология).

Конкретизация теоремы 3 приводит к следующему результату.

Теорема 4. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Мера $\hat{\mu}$ максимальна в упорядоченности Шоке, порожденной конусом $\hat{H}$.*

2) *Конус H является супремальным генератором пространства $C(Q) \times C(Q)$ относительно K-пространства $S_\mu(Q) \times S_\mu(Q)$.*

3) *Если последовательность (T_n) операторов из $C(Q)$ в $S_\mu(Q)$ такова, что $|T_n|1 \leqslant 1$ и для всякого h из H последовательность $(T_n h)$ сходится к h почти всюду (соответственно по мере), то для любой функции f из $C(Q)$ последовательность $(T_n f)$ сходится к f почти всюду (соответственно по мере).*

Представляет интерес заменить в приведенных теоремах абстрактную норму на «обыкновенную», ибо в последнем случае имеют место специфические явления. К сожалению, простые примеры показывают, что в теоремах 2—4 заменить абстрактную норму на обычную (даже когда Y есть KB-пространство с аддитивной нормой) нельзя. Отметим, однако, что при $Y = B(Q)$, где $B(Q)$ — пространство ограниченных на Q функций, $|T| \leqslant 1 \Leftrightarrow \|T\| \leqslant 1$. При этом, если Q — компакт, то в теореме 3 можно говорить о равномерной сходимости. В частности, при $V = C(Q)$ получающийся результат содержит соответствующий факт о нерастягивающих операторах из ([8]).

Заменить абстрактную норму на обычную в некотором смысле можно также для компактных операторов со значениями в пространстве непрерывных на компакте Q функций. При этом рабочим аппаратом служит теорема Майкла ([16]).

Теорема 5. *Пусть V — нормированное пространство, T — компактный оператор, T: $V \to C(Q)$ и H — конус в V, а ε — положительное число. Имеют место импликации* (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) *и* (4) $\Rightarrow$ (1), *где*:

1) *Конус $\hat{H}$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно функционала $(T_x, \|T\|)$, T_x: $v \mapsto (Tv)(x)$, для любого x из Q.*

2) *Для любого оператора T': $V \to B(Q)$ такого, что $\|T'\| \leqslant \|T\|$ и, кроме того, $T'h \geqslant Th$, $h \in H$, следует, что $T' = T$.*

3) *Для любой последовательности (T_n) операторов T_n: $V \to C(Q)$ таких, что $\overline{\lim_n} \|T_n\| \leqslant \|T\|$ и равномерный $\lim_n T_n h \geqslant Th$ для всех h из H, следует, что (T_n) сходится в сильной операторной топологии к T.*

4) *Для любого компактного оператора T': $V \to C(Q)$ такого, что $\|T'\| \leqslant (1+\varepsilon)\|T\|$ и $T'h \geqslant Th$, $h \in H$, следует, что $T' = T$.*

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
1 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Гаркави, В сборн. Математический анализ, 1967. Итоги науки, М., 1969, стр. 75. [2] Р. К. Васильев, Сборн. пер. Математика, 6, 35 (1970). [3] Р. К. Васильев, Матем. заметки, 8, 475 (1970). [4] М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, УМН, 23, 213 (1968). [5] M. A. Krasnosel'skii, E. A. Lifsic, Studia math., 31, 5, 455 (1968). [6] Л. Г. Лабскер, ДАН, **197**, № 6, 1264 (1971). [7] Р. М. Минькова, Ю. А. Шашкин, Матем. заметки, 6, 5, 591 (1969). [8] Ю. А. Шашкин, Mathematica (R. S. R.), **11**, № 2, 355 (1969). [9] С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов, ДАН, **199**, № 4, 776 (1971). [10] С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов, Оптимизация, 3, 20, 120 (1971). [11] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950. [12] Н. С. Ландкоф, Основы современной теории потенциала, «Наука», 1966. [13] G. Jameson, Ordered Linear Spaces, N. Y., 1970. [14] В. Л. Шмульян, ДАН, **27**, 7, 643 (1940). [15] K. Fan, I. Glicksberg, Duke Math. J., **25**, 4, 553 (1958). [16] E. Michael, Ann. Math., **63**, 2, 361 (1956).