ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1977

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

Доклады Академии наук СССР
1977. Том 232, № 4

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 X 1976)

Пусть X — векторное пространство, $Y\cup\{+\infty\}$ — упорядоченное векторное пространство Y с присоединенным наибольшим элементом $+\infty$. Обозначим через $L(X, Y)$ пространство линейных операторов, действующих из X в Y. Рассмотрим выпуклый оператор F: $X\to Y\cup\{+\infty\}$. Пусть для некоторой точки $x^*\in X$ выполняется $Fx^*<+\infty$, т. е. x^* входит в **эффективное множество** $\operatorname{dom}(F)$ оператора F. **Субдифференциалом** оператора F в точке x^* называется множество $\partial_{x^*}(F)$, определенное следующим образом:

$$\partial_{x^*}(F)=\{A\in L(X, Y): Ax-Ax^*\leqslant Fx-Fx^*,\ x\in X\}.$$

Субдифференциалы выпуклых операторов играют ключевую роль в современной теории экстремальных задач, представляя собой обобщение понятия дифференциала на случай негладких выпуклых отображений. В то же время в перечне правил нахождения субдифференциалов имеется существенный пробел: в нем практически отсутствуют формулы вычисления субдифференциалов составных выпуклых операторов (см. ([1]) и имеющуюся там библиографию). Причина этого — принципиальная непригодность геометрических методов отделимости для исследования векторнозначных функций. В настоящей работе приводятся общие формулы вычисления субдифференциалов операторов, содержащие в себе все основные скалярные варианты. При этом метод их получения, основанный на теории упорядоченных векторных пространств ([2], [3]), является новым и в скалярном случае.

I. **Формула для субдифференциала суперпозиции.** Пусть G: $Y\to Z\cup\{+\infty\}$ — возрастающий выпуклый оператор, причем Z является K-пространством и $\operatorname{dom}(G)=Y$. Тогда для суперпозиции $G\circ F$ справедливо представление

$$\partial_{x^*}(G\circ F)=\bigcup_{A\in\partial_{Fx^*}(G)}\partial_{x^*}(A\circ F).$$

II. **Формула для субдифференциала суммы.** Пусть H_1, H_2 — конусы в векторном пространстве X. Говорят, что конусы H_1 и H_2 находятся в **общем положении**, если $H_1-H_2=H_2-H_1$.

Говорят, что **система конусов** $H_1, \ldots, H_n$ находится в **общем положении**, если для некоторой перестановки $\{i_1, \ldots, i_n\}$ множества индексов в общем положении находятся конусы

$$H_{i_k},\quad \bigcap_{s=k+1}^{n} H_{i_s}$$

для $k=1, \ldots, n-1$.

Если $U_1, \ldots, U_n$ — выпуклые множества и $x^*\in U_1\cap\ldots\cap U_n$, то говорят, что $U_1, \ldots, U_n$ находятся в **общем положении** (относительно точки x^*), если в общем положении находятся конусы допустимых направлений $\operatorname{Fd}_{x^*}(U_1), \ldots, \operatorname{Fd}_{x^*}(U_n)$. Здесь

$$\operatorname{Fd}_{x^*}(U)=\{h\in X: \exists\alpha>0: x^*+\alpha h\in U\}.$$

Пусть $F_1, \ldots, F_n\colon X \to Y \cup \{+\infty\}$, где Y — некоторое K-пространство, и $F_1, \ldots, F_n$ — выпуклые операторы, причем их эффективные множества находятся в общем положении. Тогда

$$\partial_{x^\bullet}(F_1 + \ldots + F_n) = \partial_{x^\bullet}(F_1) + \ldots + \partial_{x^\bullet}(F_n).$$

III. Формула для субдифференциала максимума. Пусть Y — некоторое K-пространство. Оператор $\alpha \in L(Y, Y)$ называется мультипликатором, если $0 \leqslant \alpha \leqslant I_Y$, т. е. если $0 \leqslant \alpha y \leqslant y$ для всех $y \in Y^+$. Множество всех мультипликаторов обозначается $\Lambda(Y)$.

Пусть $F_1, \ldots, F_n\colon X \to Y \cup \{+\infty\}$ — выпуклые операторы, эффективные множества которых находятся в общем положении. Пусть далее $F_1 \vee \ldots \ldots \vee F_n\colon x \mapsto F_1 x \vee \ldots \vee F_n x$.

Справедливо представление

$$\partial_{x^\bullet}(F_1 \vee \ldots \vee F_n) = \bigcup_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Gamma(x^\bullet)} (\partial_{x^\bullet}(\alpha_1 \circ F_1) + \ldots + \partial_{x^\bullet}(\alpha_n \circ F_n)),$$

где объединение берется по множеству

$$\Gamma(x^\bullet) = \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Lambda(Y)^n\colon \sum_{k=1}^n \alpha_k = I_Y, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k \circ F_k x^\bullet = F_1 x^\bullet \vee \ldots \vee F_n x^\bullet \right\}.$$

IV. Формулы для субдифференциала суперпозиции во внутренней точке. В случае, когда множество $\operatorname{dom}(F) - x^\bullet$ является поглощающим, т. е. когда точка $x^\bullet$ — внутренняя в $\operatorname{dom}(F)$, приведенные формулы существенно улучшаются.

Пусть Y — некоторое K-пространство и $\mathfrak{A}$ — слабо порядково ограниченное подмножество в пространстве $L(X, Y)$. Обозначим через $(Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ пространство ограниченных (по порядку) Y-значных функций на $\mathfrak{A}$. Пусть далее $\varepsilon_{\mathfrak{A}} = \varepsilon_{\mathfrak{A}, Y}$ — канонический оператор,

$$\varepsilon_{\mathfrak{A}}\colon f \mapsto \sup\{f(A)\colon A \in \mathfrak{A}\},$$

а $\Delta_{\mathfrak{A}} = \Delta_{\mathfrak{A}, Y}$ — отождествление Y с подпространством постоянных функций в $(Y^{\mathfrak{A}})_\infty$. Кроме того, определим оператор $\langle \mathfrak{A} \rangle \in L(X, (Y^{\mathfrak{A}})_\infty)$ соотношением

$$(\langle \mathfrak{A} \rangle x)(A) = Ax, \quad x \in X, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Для оператора $F\colon X \to Y \cup \{+\infty\}$ символом $F'(x^\bullet)$ обозначим производную по направлениям F в точке $x^\bullet \in \operatorname{dom}(F)$, т. е.

$$F'(x^\bullet)x = (o)\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} (F(x^\bullet + \alpha x) - Fx^\bullet)/\alpha.$$

Если теперь $G\colon Y \to Z \cup \{+\infty\}$, где Z — также K-пространство, G — выпуклый оператор, $\operatorname{dom}(G) = Y$ и G возрастает, то говорят, что G и F согласованы, если $(G \circ F)'(x^\bullet) = G'(Fx^\bullet) \circ F'(x^\bullet)$. Можно показать, что G, F согласованы, например, в следующих случаях:

(а) F произвольный, G (o)-непрерывный,

(б) G произвольный, F регулярный, т. е. на некотором открытом выпуклом подмножестве $U \subset \operatorname{dom}(F)$ таком, что $x^\bullet \in U$, для всех $x \in X$ выполняется

$$\sup_{x' \in U} |F'(x')x| < +\infty;$$

$$\sup_{x' \in U} (F'(x')(x - x') - F(x')) < +\infty.$$

Если операторы G и F согласованы, то справедливо следующее представление:

$$\partial_{x^\bullet}(G \circ F) = \{A \circ \langle \partial_{x^\bullet}(F) \rangle\colon A \circ \Delta_{\partial_{x^\bullet}(F)} \in \partial_{Fx^\bullet}(G);\ A \in L^+((Y^{\partial_{x^\bullet}(F)})_\infty, Z)\},$$

где $L^+((Y^{\partial_{x^\bullet}(F)})_\infty, Z)$ — конус положительных операторов.

В связи с последним представлением отметим, что для всякого оператора $A\in L^{+}((Y^{\mathfrak{A}})_{\infty}, Z)$ выполняется

$$A=\alpha\circ\langle A\circ\Delta_{\mathfrak{A},\, Y}\circ\partial_0(\varepsilon_{\mathfrak{A},\, Y})\rangle$$

для некоторого $\alpha\in\partial_0(\varepsilon_{\mathfrak{A},\, Z})$.

Отсюда вытекает, что для согласованных операторов G и F выполняется соотношение

$$\partial_{x^*}(G\circ F)=\bigcup_{A\in\partial_{Fx^*}(G)}\ \bigcup_{\alpha\in\partial_0(\varepsilon_{\partial_{x^*}(F),\, Z})}\alpha\circ\langle A\circ\partial_{x^*}(F)\rangle.$$

Последнее соотношение выполняется и при более слабых предположениях на пространство Y.

В заключение применим полученные формулы для анализа задачи выпуклого программирования в следующей форме.

Пусть $F, G\colon X\to Y\cup\{+\infty\}$ — выпуклые операторы, причем для простоты $\mathrm{dom}\,(F)=\mathrm{dom}\,(G)=X$. Предположим, что для каждого $x\in X$ либо $Gx\leqslant 0$, либо $Gx\geqslant 0$ и, кроме того, для некоторой точки x^0 элемент $-Gx^0$ является слабой порядковой единицей в Y.

Рассмотрим выпуклую программу $Gx\leqslant 0$, $Fx\to\inf$. Допустимая точка x^* является оптимальной в том и только в том случае, если совместна система условий:

$$\alpha^*, \beta^*\in\Lambda(Y);$$

$$\mathrm{Ker}\,(\alpha^*)=\{0\};$$

$$\alpha^*+\beta^*=I_Y;$$

$$\beta^*\circ Gx^*=0;$$

$$0\in\alpha^*\circ\partial_{x}^{*}(F)+\beta^*\circ\partial_{x}^{*}(G).$$

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
1 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров,* Теория экстремальных задач, М., 1974. [2] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер,* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950. [3] *Б. З. Вулих,* Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М.—Л., 1961.