# ДОКЛАДЫ
## АКАДЕМИИ НАУК СССР

1977

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

**Доклады Академии наук СССР**
1977. Том 233, № 6

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

# ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЮНГА

*(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 I 1977)*

Пусть $X$ — векторное пространство, $Y$ — некоторое $K$-пространство и $F\colon X\to Y\cup\{+\infty\}$ — выпуклый оператор. Для линейного оператора $A\in\in L(X, Y)$ положим

$$F^{\cdot}A=\sup_{x\in X}(Ax-Fx).$$

Оператор $F^{\cdot}$ называется преобразованием Юнга оператора $F$.

В настоящей заметке анонсируются правила замены переменных для преобразования Юнга. Почти все приводимые формулы являются новыми уже для скалярных функций. Приведенные результаты допускают трактовку как теоремы двойственности в теории экстремальных задач, в том числе векторных [1].

1. Суперпозиция выпуклых операторов. Пусть $F\colon X\to\to Y\cup\{+\infty\}$ — выпуклый оператор, действующий в предупорядоченное векторное пространство $Y$ и $G\colon Y\to Z\cup\{+\infty\}$ — возрастающий выпуклый оператор, действующий в $K$-пространство $Z$. Если образ $F[\mathrm{dom}(F)]$ эффективного множества $\mathrm{dom}(F)$ содержит внутреннюю точку $\mathrm{dom}(G)$, то для любого $A\in L(X, Z)$ выполняется

$$(G\circ F)^{\cdot}A=\inf\{(B\circ F)^{\cdot}A+G^{\cdot}B\colon B\in L^{+}(Y, Z)\};$$

при этом последняя формула является точной, т. е. инфимум в ее правой части достигается.

2. Суперпозиция выпуклого оператора с сублинейным. Если в условиях п. 1 оператор $F$ является сублинейным, то справедлива точная формула

$$(G\circ F)^{\cdot}A=\inf\{G^{\cdot}B\colon A\in\partial(B\circ F);\ B\in L^{+}(Y, Z)\}.$$

3. Суперпозиция сублинейного оператора с выпуклым. Если в условиях п. 1 оператор $G$ является сублинейным, то справедлива точная формула

$$(G\circ F)^{\cdot}=\inf_{B\in\partial(G)}(B\circ F)^{\cdot}_{-}.$$

Приведенный факт является теоремой о векторном минимаксе. Действительно,

$$-(G\circ F)^{\cdot}\mathbf{O}=\inf_{x\in\mathrm{dom}(F)}\ \sup_{B\in\partial(G)}B\circ Fx,$$

$$(B\circ F)^{\cdot}\mathbf{O}=-\inf_{x\in\mathrm{dom}(F)}B\circ Fx.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\sup_{B\in\partial(G)}\ \inf_{x\in\mathrm{dom}(F)}B\circ Fx=\inf_{x\in\mathrm{dom}(F)}\ \sup_{B\in\partial(G)}B\circ Fx.$$

Один из важных частных случаев этого утверждения недавно был сообщен автору А. М. Рубиновым.

4. Суперпозиция выпуклого оператора с аффинным. Пусть $X_1$, $X$ — векторные пространства, $Y$ — некоторое $K$-пространство и $F\colon X\to Y\cup\{+\infty\}$ — выпуклый оператор, эффективное множество которого содержит внутреннюю точку, принадлежащую образу пространства $X_1$ при аффинном отображении

$$A_x\colon x_1\mapsto Ax_1+x,$$

где $A\in L(X_1, X)$ и $x\in X$. Тогда для всякого $B\in L(X_1, Y)$ справедлива точная формула

$$(F\circ A_x)^*B=\inf\{F^*C-Cx\colon B=C\circ A;\ C\in L(X, Y)\}.$$

5. Сумма выпуклых операторов. Пусть $F_1,\ldots,F_n\colon X\to Y\cup$ $\cup\{+\infty\}$ — выпуклые операторы, действующие в $K$-пространство $Y$, причем конусы $\operatorname{dom}(H_{F_1}),\ldots,\operatorname{dom}(H_{F_n})$ находятся в общем положении. Здесь $\operatorname{dom}(H_F)$ — эффективное множество преобразования Хёрмандера оператора $F$, т. е.

$$\operatorname{dom}(H_F)=\{(x,t)\in X\times R^+;\ x\in t\operatorname{dom}(F)\}.$$

При сделанных предположениях выполняется

$$(F_1+\ldots+F_n)^*=F_1^*\oplus\ldots\oplus F_n^*,$$

где $\oplus$ — операция inf-конволюции, т. е.

$$F_1^*\oplus\ldots\oplus F_n^*A=\inf\left\{\sum_{k=1}^n F_k^*A_k\colon A_k\in L(X,Y);\ \sum_{k=1}^n A_k=A\right\}.$$

6. Максимум выпуклых операторов. Пусть $F_1,\ldots,F_n$: $X\to Y\cup\{+\infty\}$ — выпуклые операторы, действующие в векторную решетку $Y$ и такие, что конусы $\operatorname{dom}(H_{F_1}),\ldots,\operatorname{dom}(H_{F_n})$ находятся в общем положении. Если $Z$ — некоторое $K$-пространство и $A\in L^+(Y,Z)$, то

$$(A\circ(F_1\vee\ldots\vee F_n))^*=\inf\left\{\bigoplus_{k=1}^n (A_k\circ F_k)^*\colon A_k\in L^+(Y,Z);\quad \sum_{k=1}^n A_k=A\right\}.$$

Последняя формула также является точной. Иными словами, для любого $B\in L(X,Z)$ совместна система условий

$$B_k\in L(X,Z),\quad A_k\in L^+(Y,Z),$$

$$B=\sum_{k=1}^n B_k,\quad A=\sum_{k=1}^n A_k,$$

$$(A\circ(F_1\vee\ldots\vee F_n))^*B=\sum_{k=1}^n (A_k\circ F_k)^*B_k.$$

Здесь же уместно отметить, что достаточным условием общего положения конусов $\operatorname{dom}(H_{F_1}),\ldots,\operatorname{dom}(H_{F_n})$ является наличие в пересечении $\operatorname{dom}(F_1),\ldots,\operatorname{dom}(F_n)$ внутренней точки каждого, за исключением, быть может, одного из этих множеств.

7. Суперпозиция с регулярным оператором. Пусть выпуклый оператор $F$ регулярен, т. е. $F=\varepsilon_{\mathfrak{A}}\circ\langle\mathfrak{A}\rangle_y$, где $\mathfrak{A}$ — слабо порядково ограниченное множество в $L(X,Y)$, элемент $y$ входит в пространство $(Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ ограниченных $Y$-значных функций на $\mathfrak{A}$ и $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ — канонический оператор ([2]). Пусть, далее, $G\colon Y\to Z\cup\{+\infty\}$ — возрастающий выпуклый оператор, действующий в $K$-пространство $Z$. Если в образе $F[X]$ есть внутренняя точка эффективного множества $\operatorname{dom}(G)$, то для всякого $A\in$

$\in L(X, Z)$ справедлива точная формула

$$(G\circ F)^{*}A=\inf\{G^{*}(B\circ\Delta_{\mathfrak{A}})-By\colon B\circ\langle\mathfrak{A}\rangle=A;\ B\in L^{+}((Y^{\mathfrak{A}})_{\infty}, Z)\},$$

где $\Delta_{\mathfrak{A}}$ — диагональное вложение $Y$ в $(Y^{\mathfrak{A}})_{\infty}$.

Последняя формула, в частности, опровергает бытующую в литературе гипотезу о строении нормального конуса к лебегову множеству суперпозиции. Достаточно рассмотреть случай, когда $G$ — это банахов предел на пространстве $l_{\infty}$ и $Fx=x^{+}$ для $x\in l_{\infty}$.

8. Принцип Лагранжа. Пусть $X$, $X_1$ — векторные пространства, $Y_1$ — предупорядоченное архимедово векторное пространство и $Y$ — некоторое $K$-пространство. Пусть $A\in L(X, X_1)$ и $G\colon X\to Y_1$, $F\colon X\to Y$ — выпуклые операторы, для простоты всюду определенные. Допустим, что выполнено условие Слейтера, т. е. для некоторого $x^0\in X$ точка $-Gx^0$ является внутренней в $Y_1^{+}$ и пространство $Y$ является $K$-пространством ограниченных элементов. Рассмотрим векторную программу

$$Ax=Ax^0,\quad Gx\leqslant 0,\quad Fx\to\inf$$

и пусть $y\in Y$ — значение этой программы. Определим сублинейный оператор скаляризации $\tau\colon Y_1\to Y$ соотношением

$$\tau y_1=\inf\{t\in R\colon y_1\leqslant -tGx^0\}1,$$

где $1$ — сильная единица в $Y$. Пусть

$$U=\{x\in X\colon Ax=Ax^0\}$$

и $F_U$ — ограничение оператора $F$ на это множество.

Составим штраф Иоффе

$$\Phi\colon x\mapsto(F_Ux-y)\vee\tau\circ Gx.$$

Ясно, что $\Phi$ — положительный выпуклый оператор, причем

$$0=\inf_{x\in X}\Phi x=-\Phi^{*}0.$$

Применяя правила замены переменных и привлекая условие Слейтера, найдем операторы $\alpha\in L^{+}(Y_1, Y)$ и $\beta\in L(X_1, Y)$ такие, что

$$y=\inf_{x\in X}(Fx+\alpha\circ Gx+\beta\circ(Ax-Ax^0)).$$

Таким образом, значение рассматриваемой векторной программы есть значение безусловной программы для подходящей функции Лагранжа.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
29 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров,* Теория экстремальных задач, М., 1974.
[2] *С. С. Кутателадзе,* ДАН, т. 230, № 5, 1029 (1976).