# ДОКЛАДЫ

## АКАДЕМИИ НАУК СССР

1977

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

Глубокоуважаемому Семёну Самсоновичу
с огромной благодарностью от автора.

3/III-1978 г. Гордон

Доклады Академии наук СССР
1977. Том 237, № 4

УДК 517.11+513.88 *МАТЕМАТИКА*

Е. И. ГОРДОН

# ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА В БУЛЕВОЗНАЧНЫХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И $K$-ПРОСТРАНСТВА

*(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 8 VIII 1977)*

В настоящей работе устанавливается, что множество, элементами которого являются объекты, изображающие вещественные числа в булевозначной модели теории множеств $V^{(B)}$ ([1]), можно наделить линейной структурой и отношением порядка так, что оно превратится в расширенное $K$-пространство с базой $B$. Показывается, что в некоторых случаях этот факт может быть использован для обобщения теорем о вещественных числах на расширение $K$-пространства. Приводится также одно применение этого факта для изучения форсинга с нормированными булевыми алгебрами.

1. Приведем основные сведения о булевозначных моделях теории множеств из ([1]). Пусть $B$ — полная булева алгебра. Определим булевозначный универсум $\overline{V}^{(B)}$: $\overline{V}_0{}^{(B)}=\phi$, $\overline{V}_\alpha{}^{(B)}=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\overline{V}_\beta{}^{(B)}$, если $\alpha$ — предельный ординал,

$$\overline{V}_{\alpha+1}^{(B)}=\{x\,|\,x \text{ — функция, } \operatorname{dom}x\subseteq\overline{V}_\alpha^{(B)},\ \operatorname{rng}f\subseteq B\},\quad \overline{V}^{(B)}=\bigcup_\alpha \overline{V}_\alpha^{(B)}.$$

Ясно, что $\overline{V}^{(B)}$ — собственный класс. Если $a\in\operatorname{dom}x$, то $x(a)$ определяет «вероятность» вхождения элемента $a$ в «подмножество» $x$. Существует каноническое вложение $i$ класса всех множеств $V$ в булевозначный универсум $\overline{V}^{(B)}$, которое определяется по $\in$-рекурсии: $i\phi=\phi$, $\operatorname{dom}ix=\{iy\,|\,y\in x\}$, $ix(iy)=1$ для всех $y\in x$. Для любых $x,y\in\overline{V}^{(B)}$ определяются булевы значения $\|x\in y\|$ и $\|x=y\|$; эти определения можно найти в ([1]). Отметим только, что $\|ix\in iy\|$ ($\|ix=iy\|$) равно 1, если $x\in y$ ($x=y$), и равно 0 в противном случае. Имея булевы значения для атомарных формул, мы очевидным образом определяем булево значение $\|\varphi(x_1,\dots,x_n)\|$ для любой формулы $\varphi$ и для любых $x_1,\dots,x_n\in\overline{V}^{(B)}$.

Лемма 1. а) $\|(\exists y\in x)\varphi(y)\|=\sup\{x(y)\cdot\|\varphi(y)\|\ |\ y\in\operatorname{dom}x\}$;
б) *если* $\|\exists y\varphi(y)\|=1$, *то существует* $t\in\overline{B}^{(B)}$ *такое, что* $\|\varphi(t)\|=1$.

Теорема 1 ([1]). *Каждая теорема* ZFC (*система аксиом Цермело — Френкеля с аксиомой выбора*) *имеет булево значение* —1.

Отношение $\|x=y\|=1$ есть, очевидно, эквивалентность на $\overline{V}^{(B)}$. Выбирая из каждого класса эквивалентности по одному элементу ([2]), мы приходим к новому булевозначному универсуму $V^{(B)}$, для которого лемма 1 и теорема 1 справедливы, но который обладает свойством отделимости: $\|x==y\|=1$ тогда и только тогда, когда $x=y$.

2. Пусть $R\in V^{(B)}$ таково, что $\|R$ — множество вещественных чисел$\|=1$ (такое $R$ существует по теореме 1 и лемме 1 б)). Используя свойство отделимости $V^{(B)}$, можно показать, что $\overline{R}=\{t\in V^{(B)}\,|\ \|t\in R\|=1\}$ есть множество. Кроме того, если $\lambda\in V$ — вещественное число, то $\|i\lambda\in R\|=1$. По теореме 1 и лемме 1 б) для любого вещественного $\lambda$ и для любых $x,y\in\overline{R}$ найдутся такие $z_1,z_2\in\overline{R}$, что

$$\|z_1=x+y\|=1,\quad \|z_2=i\lambda\cdot x\|=1,$$

причем $z_1$ и $z_2$ определяются этими условиями однозначно. Теперь мы можем определить операции сложения и умножения на число, а также отношение частичного порядка на $\overline{R}$, положив $x+y=z$, $\lambda x=y$, $x\leqslant y$ тогда и только тогда, когда

$$\|x+y=z\|=1, \quad \|i\lambda\cdot x=y\|=1, \quad \|x\leqslant y\|=1$$

соответственно.

Теорема 2. *Множество $\overline{R}$ с введенными операциями и отношением порядка есть расширенное $K$-пространство, база которого изоморфна $B$. Операции $z=|x|$, $z=x\vee y$, $z=x\wedge y$ определяются из условий*

$$\|z=|x|\|=1, \quad \|z=\max\{x, y\}\|=1, \quad \|z=\min\{x, y\}\|=1$$

*соответственно.*

Покажем, например, что каждое ограниченное сверху подмножество $A$ в $\overline{R}$ имеет точную верхнюю грань. Пусть $t\in\overline{R}$ таково, что $\forall x\in A$ $(x\leqslant t)$. Определим $\underline{A}\in V^{(B)}$, положив $\operatorname{dom} A=A$ и $\forall x\in A$ $(\underline{A}(x)=1)$. Тогда по лемме 1 а)

$$\|(\forall x\in\underline{A})\ (x\leqslant t)\|=\inf\{\|x\leqslant t\|\ |x\in A\}=1.$$

Следовательно, $\|\underline{A}$ ограничено $\|=1$ и $\|\exists z\ (z=\sup\underline{A})\|=1$. По лемме 1 б) найдется такое $z_0\in\overline{R}$, что $\|z_0=\sup\underline{A}\|=1$. Теперь легко показать, что $z_0=\sup A$. Для доказательства того, что $\overline{R}$ – расширенное пространство, покажем ([3]), что каждое множество $M\subseteq\overline{R}$, состоящее из попарно дизъюнктных элементов ограничено. Определим $\underline{M}$ аналогично $\underline{A}$, тогда

$$\|\forall x,\ y\in\underline{M}(\min\{|x|,\ \|y\|\}=0)\|=1,$$

откуда, очевидно, следует, что $\|\underline{M}$ ограничено$\|=1$, а теперь так же, как и выше, легко показать, что $M$ ограничено.

Легко видеть, что роль единицы в $\overline{R}$ играет элемент $iI$, где $I$ – единица поля вещественных чисел. Тогда, если $\mathfrak{B}(\overline{R})$ – база $\overline{R}$, то $b\in\mathfrak{B}(\overline{R})$ тогда и только тогда, когда $b\wedge(iI-b)=0$, т. е. $\|\min\{b, iI-b\}=0\|=1$, т. е. $\|b==0\|\vee\|b=iI\|=1$. Положим $\chi(b)=\|b=iI\|$. Тогда можно проверить, что $\chi$: $\mathfrak{B}(R)\to B$ – изоморфизм.

Теорема 3. *Если $x\in\overline{R}$ и $\{e_\lambda^x\}$ – характеристики $x$, то $\chi(e_\lambda^x)=\|x<<i\lambda\|$.*

Для любых двух элементов $x$, $y\in V^{(B)}$ однозначно определяется элемент $z\in V^{(B)}$ такой, что $\|z=\langle x, y\rangle\|=1$. В этом случае будем писать $z=\langle x, y\rangle^{(B)}$. Пусть $X$ – произвольное множество и $p$: $X\to\overline{R}$. Определим элемент $\underline{p}\in V^{(B)}$ такой, что $\operatorname{dom}\underline{p}=\{\langle ix, y\rangle^{(B)}|\langle x, y\rangle\in p\}$ и $\forall a\in\operatorname{dom}\underline{p}$ $(\underline{p}(a)=1)$. Тогда можно показать, что $\|\underline{p}$: $iX\to R\|=1$. Обратно, если $f\in V^{(B)}$ таково, что $\|f$: $ix\to R\|=1$ и $\bar{f}=\{\langle x, t\rangle\,|\,\|\langle ix, t\rangle\in f\|=1\}$, то $\bar{f}$ есть отображение $X\to\overline{R}$.

Сделанные замечания позволяют переносить некоторые утверждения о вещественных функциях на функции со значениями в $K$-пространстве. Так, например, в ([4]) доказано, что если $p\leqslant q$ – субаддитивная и супераддитивная функции с вещественными значениями, заданные на предупорядоченной абелевой полугруппе и сохраняющие порядок, то существует аддитивная сохраняющая порядок функция $r$ на $S$ такая, что $p\leqslant r\leqslant q$. Пусть теперь $p$ и $q$ – такие же функции, но со значениями в $\overline{R}$. Можно проверить, что $\|iS$ – предупорядоченная абелева полугруппа$\|=1$, $\|\underline{p}$: $iS\to R$ – субаддитивная, сохраняющая порядок функция$\|=1$, $\|\underline{q}$: $iS\to R$ – супераддитивная, сохраняющая порядок функция$\|=1$, $\|\underline{p}\leqslant\underline{q}\|=1$. Поскольку сформулированное выше утверждение из ([4]) есть теорема ZFC, то по теореме 1 и лемме 1 б) существует $f\in V^{(B)}$ такое, что $\|(f$: $iS\to R$ – аддитивная, сохраняющая порядок функция) & $(\underline{p}\leqslant f\leqslant\underline{q})\|=1$. Тогда легко показать, что $\bar{f}$: $S\to\overline{R}$ аддитивна, сохраняет порядок и $p\leqslant\bar{f}\leqslant q$.

Заметим, что попытка применения аналогичных рассуждений в случае, когда $S$ есть линейное пространство, наталкивается на трудности, связанные с тем, что $\|iS$ – линейное пространство$\|=0$ (в $iS$ определено умножение не на все вещественные числа из $V^{(B)}$). Если $s$ – последовательность элементов из $\overline{R}$, т. е. $s$: $\omega\to\overline{R}$, то, как отмечалось выше, $\|\underline{s}$: $i\omega\to R\|=1$.

Теорема 4. $s \xrightarrow{(o)} x$ *тогда и только тогда, когда* $\|\lim \underline{s}=x\|=1$.

3. Пусть $B$ — полная булева алгебра и $D \in V^{(B)}$ таково, что $\|D$ — полная булева алгебра $\|=1$. Тогда [1] множество $\bar{D}=\{c \mid \|c \in D\|=1\}$ с отношением порядка $c_1 \leqslant c_2 \Leftrightarrow \|c_1 \leqslant_D c_2\|=1$ есть полная булева алгебра. В [1] показано, что отображение $e$: $B \to \bar{D}$, определяемое из условий

$$\|e(b)=1_D\|=b, \quad \|e(b)=0_D\|=-b,$$

есть полный мономорфизм, который называется каноническим. Предположим, что $\mu$ — мера на $B$ и $m \in V^{(B)}$ задает меру на $D \in V^{(B)}$, т. е. $\|m$: $D \to R$ — мера на $D\|=1$. Тогда для любого $c \in \bar{D}$ определен элемент $s \in \bar{R}$ такой, что $\|s=m(d)\|=1$. Положим $F_c(\lambda)=\mu(\|s<i\lambda\|)$, где $\lambda$ — вещественное число.

Теорема 5. *Пусть для любого* $c \in \bar{D}$

$$M(c)=\int \lambda \, dF_c(\lambda).$$

*Тогда $M$ — мера на $\bar{D}$ такая, что $\mu(b)=M(e(b))$ для любого $b \in B$.*

Эта теорема является следствием теорем 3 и 4. Из теоремы 5 и теоремы о существовании $\mu$-независимого дополнения у правильной однородной подалгебры полной нормированной булевой алгебры (п.н.б.а.) [5] вытекает

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{M}$ — счетная стандартная транзитивная модель ZFC, $B \in \mathfrak{M}$ — однородная не сепарабельная п.н.б.а.*

*Тогда по любой формуле теории множеств $\varphi(x)$ можно построить другую формулу $\psi(x)$ так, что для любого $\mathfrak{M}$-генерического фильтра $G$ на $B$ и для любой последовательности ординалов $\lambda \in \mathfrak{M}[G]$*

$$\mathfrak{M}[G] \models \varphi(\lambda) \Leftrightarrow \mathfrak{M}[\lambda] \models \psi(\lambda).$$

Это свойство формул называется слабой абсолютностью. Слабая абсолютность формул в моделях коэновского типа может быть использована для изучения измеримости по Лебегу и наличия свойства Бэра у проективных множеств в этих моделях [6-8]. На основании теоремы 6 доказывается

Теорема 7. *В условиях теоремы 6 в модели $\mathfrak{M}[G]$ существует инвариантная относительно сдвигов счетно-аддитивная мера, являющаяся продолжением меры Лебега и определенная на всех проективных множествах.*

Заметим, что в [8] показано, что в модели $\mathfrak{M}[G]$ теоремы 6 существует уже проективное множество второго класса, не измеримое по Лебегу.

Автор признателен В. А. Любецкому за постановку задачи, а также Г. П. Акилову и С. С. Кутателадзе за интерес к работе и полезное обсуждение.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
30 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Т. Иех*, Теория множеств и метод форсинга, М., «Мир», 1973. [2] *R. Solovay, S. Tennenbaum*, Ann. Math., v. 94, 201 (1971). [3] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинснер*, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М., 1950. [4] *B. Fuchssteiner*, J. Funct. Anal., v. 16, № 1, 1 (1974). [5] *Д. А. Владимиров*, Булевы алгебры, М., «Наука», 1969. [6] *R. Solovay*, Ann. Math., v. 92, 1 (1970). [7] *D. Martin, R. Solovay*, Ann. Math. Logic, v. 2, 143 (1970). [8] *В. А. Любецкий*, Исследования по теории множеств и неклассическим логикам, М., «Наука», 1976, стр. 96.