ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1978

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

Доклады Академии наук СССР
1978. Том 242, № 5

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

КРАЙНИЕ ТОЧКИ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

(Представлено академиком А. Д. Кутателадзе 26 V 1978)

В настоящей заметке аннонсируются результаты о геометрическом строении субдифференциалов выпуклых операторов во внутренних точках областей определения. В частности, приводится операторный вариант теоремы Крейна — Мильмана без дополнительных топологических предположений, отмечается цикличность множества крайних точек и дается характеристика крайних операторов в терминах, связанных со значениями некоторых экстремальных задач. Излагаемые результаты тесно связаны с известной проблемой внутреннего описания субдифференциалов ([1]), ([2]).

1°. Пусть X — векторное пространство, Y — некоторое K-пространство и P: $X\to Y$ — сублинейный оператор. Символом $\mathrm{Ch}(P)$ обозначается множество крайних точек субдифференциала $\partial(P)$ оператора P (в нуле). Пусть, далее, Z — еще одно K-пространство и $T\in L^+(Y, Z)$ — положительный линейный оператор, в дальнейшем предполагаемый o-непрерывным. Символом $\mathscr{E}(T, P)$ обозначается совокупность таких операторов $A\in\partial(P)$, что $T\circ A$ — крайняя точка $\partial(T\circ A)$. Если $\mathfrak{T}$ — некоторое семейство положительных o-непрерывных операторов, определенных на Y, то полагают

$$\mathscr{E}(\mathfrak{T}, P)=\bigcap_{T\in\mathfrak{T}}\mathscr{E}(T, P).$$

Если, в частности, $\mathfrak{T}_0$ — класс всех o-непрерывных операторов, определенных на Y, то $\mathscr{E}(\mathfrak{T}_0, P)$ обозначают $\mathscr{E}_0(P)$. Элементы $\mathscr{E}_0(P)$ называют o-крайними точками.

Теорема 1. *Множество o-крайних точек субдифференциала $\partial(P)$ непусто. При этом $\partial(P)$ является наименьшим субдифференциалом, содержащим $\mathscr{E}_0(P)$.*

Замечание. Полезно отметить, что $\mathrm{Ch}(P)=\mathscr{E}(I_Y, P)$, где I_Y — тождественное отображение Y на себя. Таким образом, субдифференциал $\partial(P)$ восстанавливается, в частности, по множеству $\mathrm{Ch}(P)$. Существенно, что теорема 1 справедлива также и в случае, когда Y обладает лишь свойством цепной полноты.

2°. Здесь приводятся основные свойства o-крайних точек.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *оператор A входит в $\mathscr{E}(T, P)$;*

2) *если для операторов T_1, T_2; A_1, A_2 выполняется*

$$T_1,\ T_2\in L^+(Y, Z),\qquad A_1,\ A_2\in L(X, Z),$$
$$T_1+T_2=T,\quad A_1\in\partial(T_1\circ P),\quad A_2\in\partial(T_2\circ P),\quad T\circ A=A_1+A_2,$$

то справедливы равенства

$$T_1\circ A=A_1,\qquad T_2\circ A=A_2;$$

3) *для оператора $\mathscr{A}$: $(x, y)\mapsto y-Ax$, определенного на пространстве $X\times Y$, упорядоченном конусом $\{(x, y)\in X\times Y\colon y\geqslant Px\}$, имеет место равенство порядковых интервалов*

$$[0, T]\circ\mathscr{A}=[0, T\circ\mathscr{A}];$$

4) *для любых $x\in X$ и $y\in Y$ выполняется*

$$Ty^+=\inf_{u\in X}\{T((Pu-Au)\vee(P(u-x)-A(u-x)+y))\}.$$

морфизмов $(Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ *в* Y *из* $\partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$ *совпадает с* $\mathrm{Ch}\,(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$. *При этом* $\mathscr{E}_0(\varepsilon_{\mathfrak{A}})=$ $=\mathrm{Ch}\,(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$.

Множество $\mathfrak{A}\subset L(X, Y)$, где Y — некоторое K-пространство, называется циклическим, если для любого проектора Pr в Y и операторов $A_1, A_2\in\mathfrak{A}$ выполняется $\mathrm{Pr}\circ A_1+\mathrm{Pr}^d\circ A_2\in\mathfrak{A}$. Наименьшее циклическое множество, содержащее данное множество $\mathfrak{A}$, называется циклической оболочкой $\mathfrak{A}$ и обозначается $c\,(\mathfrak{A})$. Можно проверить, что

$$c(\mathfrak{A})=\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Pr}_k\circ A_k: A_k\in\mathfrak{A},\ \ \sum_{k=1}\mathrm{Pr}_k=I_Y,\ \ n=1,2,\ldots\right\}.$$

Предложение 7. *Множество крайних точек субдифференциала является циклическим.*

Замечание. Приведенные утверждения позволяют показать, что для локально-выпуклых K-пространств с условием (A) справедливо «мильмановское обращение» теоремы 1 с точностью до перехода к циклической оболочке. В частности, для таких пространств замыкание в слабой операторной топологии циклической оболочки множества o-крайних точек содержит все крайние точки рассматриваемого субдифференциала.

Перейдем теперь к общему случаю.

Лемма. *Пусть* X — *упорядоченное векторное пространство,* X_0 — *мажорирующее подпространство в* X, *причем конус* $X_0\cap X^+$ *воспроизводящий в* X_0. *Если* Y — *некоторое* K-*пространство и оператор* $T_0\in L^+(X_0, Y)$ *таков, что* $[0, T_0]=[0, I_Y]\circ T_0$, *то существует продолжение* $T\in L^+(X, Y)$ *оператора* T_0 *такое, что* $[0, T]=[0, I_Y]\circ T$.

Следствие 1. *Пусть* X — *векторное пространство,* X_0 — *подпространство в* X. *Пусть, далее,* Y — *некоторое* K-*пространство,* $P: X\to Y$ — *сублинейный оператор и* $\mathrm{Ch}_{X_0}(P)$ — *совокупность таких операторов из* $L(X, Y)$, *что их сужения на* X_0 — *крайние точки сужения* P *на* X_0. *Тогда*

$$\mathrm{Ch}_{X_0}(P)\subset\mathrm{Ch}\,(P)+\partial(\delta_Y(X_0)),$$

где $\delta_Y(X_0)$ — *индикатор подпространства* X_0.

Следствие 2. *Пусть* P: $X\to Y$ — *сублинейный оператор. Для оператора* $A\in L(X_1, X)$ *выполняется* $\mathrm{Ch}(P\circ A)\subset\mathrm{Ch}(P)\circ A$.

Теорема 4. *Если* $\partial(P)$ *является наименьшим субдифференциалом, содержащим множество* $\mathfrak{A}$, *то* $\mathrm{Ch}(P)\subset\mathrm{Ch}(\varepsilon_{\mathfrak{A}})\circ\langle\mathfrak{A}\rangle$.

Следствие. $\mathrm{Ch}(P)\subset\mathrm{Ch}(\varepsilon_{\mathscr{E}_0(P)})\circ\langle\mathscr{E}_0(P)\rangle$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
10 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г. П. Акилов, С. С. Кутателадзе*, Упорядоченные векторные пространства, Новосибирск, 1978. [2] *А. М. Рубинов*, УМН, т. 32, № 4, 113 (1977).