ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1979

ТОМ 245 № 5

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

УДК 513.88 + 519.95

С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ВЫПУКЛОЕ ϵ -ПРОГРАММИРОВАНИЕ

(Представлено академиком А.Д. Александровым 10 XI 1978)

Пусть X – векторное пространство, $Y \cup \{+\infty\}$ – упорядоченное векторное пространство Y с присоединенным наибольшим элементом $+\infty$. Рассмотрим выпуклый оператор $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$, точку x из эффективного множества $\mathrm{dom}(F) = \{x \in X: Fx < +\infty\}$ и положительный элемент $\epsilon \in Y^+$. Множество

$$\partial_{x,\epsilon}(F) = \{A \in L(X, Y): Ax' - Ax \leqslant Fx' - Fx + \epsilon, x' \in X\},$$

где $L(X, Y)$ – пространство линейных операторов из X в Y, называется ϵ-субдифференциалом F в точке x. Точка x называется ϵ-оптимальной для F, если $0 \in \partial_{x,\epsilon}(F)$. В настоящей заметке аннонсируются формулы для вычисления ϵ-субдифференциалов и соответствующие критерии ϵ-оптимальности, обосновывающие справедливость подходящих вариантов принципа Лагранжа для задач ϵ-программирования. При $\epsilon = 0$ естественно возникает классическая теория выпуклого программирования.

Суперпозиция выпуклых операторов. Пусть $G: Y \to Z \cup \{+\infty\}$ – возрастающий выпуклый оператор, причем Z является К-пространством, $x \in \mathrm{dom}(F)$ и $Fx \in \mathrm{dom}(G)$. Если $F[\mathrm{dom}(F)]$ содержит внутреннюю точку $\mathrm{dom}(G)$, то для каждого $\epsilon \in Z^+$ выполняется

$$\partial_{x,\epsilon}(G \circ F) = \bigcup_{\substack{\epsilon_1 \geqslant 0,\, \epsilon_2 \geqslant 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon}} \ \bigcup_{B \in \partial_{Fx,\, \epsilon_1}(G)} \partial_{x,\epsilon_2}(B \circ F).$$

Сумма выпуклых операторов. Пусть $F_1, \ldots, F_n: X \to Y \cup \{+\infty\}$ – выпуклые операторы, причем Y является К-пространством. Если эффективные множества преобразований Хёрмандера операторов $F_1, \ldots, F_n$ находятся в общем положении ([1]), то

$$\partial_{x,\epsilon}(F_1 + \ldots + F_n) = \bigcup_{\substack{\epsilon_1 \geqslant 0, \ldots, \epsilon_n \geqslant 0 \\ \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_n = \epsilon}} (\partial_{x,\epsilon_1}(F_1) + \ldots + \partial_{x,\epsilon_n}(F_n)).$$

Для скалярных функций на конечномерном пространстве эта формула аннонсирована в ([2]).

Максимум выпуклых операторов. Пусть $F_1, \ldots, F_n: X \to Y \cup \{+\infty\}$ – выпуклые операторы, эффективные множества преобразований Хёрмандера которых находятся в общем положении и Y является векторной решеткой. Если Z – некоторое К-пространство и $A \in L^+(Y, Z)$ – положительный линейный оператор, то для всякого $\epsilon \in Z^+$ выполняется

$$\partial_{x,\epsilon}(A \circ (F_1 \vee \ldots \vee F_n)) =$$

$$= \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \partial_{x,\epsilon_k}(A_k \circ F_k): A_k \in L^+(Y, Z), \ \sum_{k=1}^{n} A_k = A;$$

$$\epsilon_k \geqslant 0, \ \sum_{k=1} \epsilon_k = \epsilon; \ \sum_{k=1}^{n} A_k \circ F_k x \geqslant A \circ F_1 x \vee \ldots \vee F_n x - \epsilon_{n+1} \Big\}.$$

Суперпозиция с аффинным оператором. Пусть X_1, X – векторные пространства, Y – некоторое К-пространство и $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ – выпуклый оператор, эффективное множество которого содержит внутреннюю точку, принадлежащую образу пространства X_1 при некотором аффинном отображении A_x: $x_1 \mapsto Ax_1 + x$, где $A \in L(X_1, X)$ и $x \in X$. Тогда для $x_1 \in X_1$ такого, что $A_x x_1 \in \mathrm{dom}(F)$, выполняется

$$\partial_{x_1, \epsilon}(F \circ A_x) = \partial_{A_x x_1, \epsilon}(F) \circ A.$$

С у п е р п о з и ц и я с р е г у л я р н ы м в ы п у к л ы м о п е р а т о р о м. Пусть X – векторное пространство, Y – некоторое К-пространство и $\mathfrak{A}$ – слабо порядково ограниченное множество в $L(X, Y)$. Как обычно, символом $\langle \mathfrak{A} \rangle$ обозначается линейный оператор, действующий из X в К-пространство $(Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ ограниченных в смысле порядка Y-значных функций на $\mathfrak{A}$ по правилу $\langle \mathfrak{A} \rangle x$: $A \mapsto Ax$, $A \in \mathfrak{A}$. Символом $\Delta_{\mathfrak{A}}$ обозначается естественное отождествление Y с диагональю пространства $Y^{\mathfrak{A}}$, а символом $\epsilon_{\mathfrak{A}}$ – канонический сублинейный оператор:

$$\epsilon_{\mathfrak{A}}\colon (Y^{\mathfrak{A}})_\infty \to Y; \ \ \epsilon_{\mathfrak{A}} f = \sup\{f(A)\colon A \in \mathfrak{A}\}.$$

Допустим теперь, что $F\colon X \to Y \cup \{+\infty\}$ – регулярный выпуклый оператор, т.е. оператор, допускающий представление $F = \epsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle_y$ для подходящих $\mathfrak{A}$ в $L(X, Y)$ и $y \in (Y^{\mathfrak{A}})_\infty$. Пусть, далее, Z – некоторое К-пространство и $G\colon Y \to Z \cup \cup \{+\infty\}$ – возрастающий выпуклый оператор. Если в образе $F[X]$ имеется внутренняя точка эффективного множества $\mathrm{dom}(G)$ и точка $Fx \in \mathrm{dom}(G)$ для некоторого $x \in X$, то для любого $\epsilon \in Z^+$ выполняется

$$\partial_{x,\epsilon}(G \circ F) = \{B \circ \langle \mathfrak{A} \rangle\colon B \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial_{Fx, \epsilon - \epsilon'}(G);\ B \in L^+((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Z);$$

$$0 \leqslant B \circ \Delta_{\mathfrak{A}} Fx - B \circ \langle \mathfrak{A} \rangle_y x \leqslant \epsilon' \leqslant \epsilon\}.$$

ϵ-О п т и м а л ь н о с т ь д л я р е г у л я р н ы х п р о г р а м м. Рассмотрим регулярную выпуклую программу

$$Gx \leqslant 0, \ \ Fx \to \inf.$$

Иными словами, $G, F\colon X \to Y \cup \{+\infty\}$ – выпуклые операторы, причем для простоты $\mathrm{dom}(G) = \mathrm{dom}(F) = X$; пространство Y является К-пространством и для каждого $x \in X$ либо $Gx \leqslant 0$, либо $Gx \geqslant 0$, а для некоторого $x_0 \in X$ элемент $-Gx_0$ является единицей в Y.

Допустимая точка x является ϵ-оптимальной в регулярной программе в том и только в том случае, если совместна система условий

$$\alpha, \beta \in L^+(Y, Y); \ \ \alpha + \beta = I_Y; \ \ \mathrm{Ker}(\alpha) = \{0\};$$

$$\epsilon_1 \geqslant 0, \ \ \epsilon_2 \geqslant 0; \ \ \epsilon_1 + \epsilon_2 \leqslant \alpha\epsilon + \beta \circ Gx;$$

$$0 \in \partial_{x, \epsilon_1}(\alpha \circ F) + \partial_{x, \epsilon_2}(\beta \circ G);$$

здесь I_Y – тождественное отображение Y на себя.

ϵ-О п т и м а л ь н о с т ь д л я р е г у л я р н ы х в с м ы с л е С л е й т е р а п р о г р а м м. Рассмотрим выпуклую программу

$$Ax = Ax_0, \ \ Gx \leqslant 0, \ \ Fx \to \inf,$$

где X_1, X – векторные пространства, $A \in L(X, X_1)$ – линейный оператор, $G\colon X \to \to Z \cup \{+\infty\}$, $F\colon X \to Y \cup \{+\infty\}$ – выпуклые операторы. Для простоты будем считать, что $\mathrm{dom}(G) = \mathrm{dom}(F) = X$. Предположим, что рассматриваемая программа регулярна в смысле Слейтера, т.е. Z является архимедово упорядоченным векторным пространством, Y является К-пространством ограниченных элементов, причем для некоторой допустимой точки x_0 элемент $-Gx_0$ является внутренней точкой конуса Z^+.

Допустимая точка x является ϵ-оптимальной в регулярной в смысле Слейтера программе в том и только в том случае, если совместна система условий

$$\gamma \in L^+(Z, Y);\ \ \mu \in L(X_1, Y);$$

$$\epsilon_1 \geqslant 0,\ \ \epsilon_2 \geqslant 0;\ \ \epsilon_1 + \epsilon_2 \leqslant \gamma \circ Gx + \epsilon;$$

$$0 \in \partial_{x,\epsilon_1}(F) + \partial_{x,\epsilon_2}(\gamma \circ G) + \mu \circ A.$$

ϵ-Оптимальность по Парето. Рассмотрим регулярную в смысле Слейтера программу и положительное число ϵ. Допустимая точка x называется ϵ-оптимальной по Парето (относительно сильной единицы $\mathbf{1}$ в пространстве Y), если для каждой допустимой точки x' такой, что $Fx' - Fx \leqslant -\epsilon\mathbf{1}$, выполняется $Fx' = Fx - \epsilon\mathbf{1}$.

Если допустимая точка x является ϵ-оптимальной по Парето в регулярной в смысле Слейтера программе, причем $0 \leqslant \epsilon < 1$, то для некоторых линейных функционалов α, β, γ на пространствах Y, Z и X_1 соответственно совместна система условий

$$\alpha > 0,\ \beta \geqslant 0;\ \ \epsilon_1 \geqslant 0,\ \epsilon_2 \geqslant 0;$$

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 \leqslant \epsilon + \beta \circ Gx;$$

$$0 \in \partial_{x,\epsilon_1}(\alpha \circ F) + \partial_{x,\epsilon_2}(\beta \circ G) + \gamma \circ A.$$

Если, в свою очередь, приведенные условия выполнены для некоторой допустимой точки x, причем $\alpha(\mathbf{1}) = 1$, то x является ϵ-оптимальной по Парето точкой.

Обобщенные ϵ-решения. Пусть Y – некоторое К-пространство и $F_0: X \to Y \cup \{+\infty\}$ – выпуклый оператор. Пусть выпуклое множество U_0 содержится в $\mathrm{dom}(F_0)$. Подмножество $U \subset U_0$ называется обобщенным ϵ-решением программы $x \in U_0$, $F_0 x \to \inf$, если $\inf F_0[U_0] \geqslant \inf F_0[U] - \epsilon$.

Рассмотрим пространство X^U и на нем оператор

$$F: X^U \to Y^U \cup \{+\infty\};\ \ F\mathfrak{X}: x \to F_0 \mathfrak{X}(x).$$

Положим $\mathfrak{X}: x \to x$ и допустим, что для всякого $\mathfrak{X}_0$ из $(\mathrm{dom}(F_0))^U$ выполняется $F\,\mathfrak{X}_0 \in (Y^U)_\infty$, причем точка $\mathfrak{X}$ является внутренней в $\mathrm{dom}(F_0))^U$.

Множество U является обобщенным ϵ-решением программы $x \in U_0$, $F_0 x \to \inf$ в том и только в том случае, если совместна система условий

$$\alpha \in L^+((Y^U)_\infty, Y);\ \ \alpha \circ \Delta_U = I_Y;$$

$$\alpha \circ F\mathfrak{X} = \inf_{x \in U} F_0 x;\ \ \epsilon_1 \geqslant 0,\ \epsilon_2 \geqslant 0,\ \ \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon;$$

$$0 \in \partial_{\mathfrak{X},\epsilon_1}(\alpha \circ F) + \partial_{\mathfrak{X},\epsilon_2}(\delta_Y((U_0)^U)).$$

Как обычно, $\delta_Y(V)$ – индикаторный оператор множества V.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
22 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г.П. Акилов, С.С. Кутателадзе,* Упорядоченные векторные пространства, Новосибирск, 1978. [2] *В.Ф. Демьянов, В.К. Шомесова,* ДАН, т. 242, № 4, 753 (1978).